数学選書 8

有限群の表現

大阪大学教授 理学博士
永尾　汎

大阪市立大学教授 理学博士
津島行男

共　著

数学の基礎的諸分野への
現代的入門

東京　裳　華　房　発行

Representations of Finite Groups

by

Hirosi Nagao Dr.Sc.   Yukio Tsushima Dr.Sc.

SHOKABO

TOKYO

故　中山 正先生に捧げる

まえがき

有限群の複素数体上の表現（通常表現）の基礎理論は Frobenius，Burnside によってほぼ完成されたといってよい．その後 Schur は現在「Schur の補題」とよばれる定理を用いて，難解であった Frobenius の理論を著しく簡易化した．これらはいずれも行列表現，あるいはその指標を考察するものであった．一方 E. Noether による多元環の研究は，群の表現を環論的，あるいは加群論的に考察することを可能にした．

標数が $p>0$ の体上の群 G の表現は Dickson によってモジュラー表現とよばれ，これは現在の用語にもなっている．Dickson は p が G の位数を割らない場合は，モジュラー表現は通常表現と本質的に変わらないことを指摘したが，その後約 30 年間研究は途絶えたままであった．

1935 年に Brauer はモジュラー既約指標の個数に関する論文を発表し，その後 Brauer-Nesbitt の基本的な論文がでてモジュラー表現の本格的な研究が始まった．以後の発展は主として Brauer の非常な努力によるものであるが，中山，大嶋をはじめとする我が国の研究者の寄与も大きい．Brauer 以後，Green のヴァーテックスの理論によって加群論的な研究の新しい視野が開かれ，いくつかの深い未解決の問題を抱きながら活発な研究が続けられているのが現状である．

本書は代数学の基本的な知識を仮定した上で，通常表現とモジュラー表現に関する基礎的な事柄をまとめたもので，仮定する知識は可能な限り少なくし，また解説はできるだけ丁寧にするよう心掛けた積りである．本書がこの魅力ある分野への誘いと入門書としての役割を果すことができれば幸いである．

現在最も多くの内容を含む教科書としては Feit [2] がある．本書の内容は同書の I 章から V 章，ならびに X 章の一部に相当する部分に最近の結果をいくつ

か加えたものである．以下章を追ってその内容を簡単にのべておこう．

I 章はII章以下の準備のための章で，環と加群について基礎的な事柄を解説している．特に§13では離散付値環について必要な事柄がまとめてある．

II章は多元環論で，単純多元環の理論，Schur 指数の表現論的な意味，接合積，Frobenius 多元環等についてのべている．

III章の前半では主として通常表現に関する古典理論と Brauer の基本定理についてのべ，§6ではモジュラー表現の基礎理論，特にその指標の理論についてのべている．

IV章は Green による加群論的な理論の解説で，Burry-Carlson の結果や Scott 加群等最近の話題もいくつか含んでいる．

V章ではブロックに関する Brauer の基本的な諸定理と，Fong による被覆の理論についてのべているが，他書と異なる着想による証明もいくつか与えている．

各章の終わりには問題をいくつかあげておいたが，本文を補足する意図もあってかなり高度な内容を持つものもある．したがって独力で解けなくとも後の略解を参考にした上で完全な解答が得られれば十分である．勿論飛ばして先に進んでも本文を理解する上で支障はない．

本文ならびに問題のいくつかについての解説と，本書ではふれられなかった事柄に関する参考文献は「あとがき」にまとめてある．

最初にのべたように群の表現の研究には指標の考察，環論的，あるいは加群論的考察による方法等があるが，それぞれに利点があって，相補い合って発展してきているのが実状である．本書も一つの方法に固執することを避け，むしろ最近の他の著書に較べて指標の考察に重点がおかれた保守的な解説になっている面がある．それは計算できることによって事柄の理解が深まる点を考慮したためである．

本書の作製にあたっては，飯塚健三，渡辺アツミ，宇野勝博の諸氏に原稿の段階から校正に至るまで丁寧に目を通して頂き，また，山本芳彦，延沢信夫の諸氏にはその一部の検討をお願いして，本質的な数多くの御注意を頂いた．そ

のため原稿の誤りがどれだけとり除かれたか計り知れない．上の諸氏に心からお礼申し上げる次第である．

本書の出版は岩堀長慶教授のお勧めによるものである．著者の一人（永尾）がそれをお引き受けしてから10年以上の歳月が経過し，その間にこの分野の様相はかなり変ってきた．これはひとえに永尾の怠慢によるものであるが，この度よき共著者をえて最近の情勢に適した著作になったことは著者の一人として望外の喜びである．

ここに岩堀教授に対し，また辛抱強く完成を待って絶えず励まして頂いた裳華房の我孫子貞次，遠藤恭平の両氏と，本書の出版に多くの御尽力頂いた細木周治氏をはじめ裳華房編集部の方々に深謝する次第である．

昭和32年頃，中山正先生と共同で表現論に関する本を書くことを計画したことがある．その後先生から頂いた昭和34年11月4日付のお手紙によれば，Brauer教授が同年春に来日された際，御自身で表現論の本を書く積りであると先生に話されたとのことでこの計画が中断した経緯がある．また著者の他の一人（津島）は中山先生の最後の学生の一人でもあった．先生に対する二人の尽きない思い出のために，感謝の気持をこめて本書を先生に捧げる次第である．

1987年6月

著　　者

読者への案内

1. 本文中の，定理，補題，問，例 等には節の番号と通し番号が付してある．

2. 異なる章の定理等を引用するときは，例えば「II，8.17」（II 章，定理 8.17 の略）などと，章の番号，定理等の番号のみを記してある．一方同じ章の定理等を引用するときは，章の番号は省略して単に「問 8.12 参照」などと記す．

3. 巻末の参考文献は主として本書で引用した文献のリストである．したがって重要な文献をすべて列挙したものではない．それらについては他書（例えば Feit[2]，Curtis-Reiner[1]，[2]，Issacs[2]等）を参照されたい．

目　　次

I. 環 と 加 群

II. 多元環とその表現

III. 群の表現

IV. 直既約加群

V. ブロックの理論

I　環と加群

群，環，体等についての基礎的な知識（例えば永尾［4］の内容）は仮定するが，この章で環と加群についてII章以下で必要な事柄をまとめておく．

§1. 定義と記号

1.1 一般的記号

集合 Y が集合 X の部分集合であるとき $Y \subset X$ とかく．したがってこのとき $Y = X$ となることもあるものとする．Y が X の真部分集合であるとき，そのことを明示したいときは $Y \subsetneqq X$ とかく．$Y \subset X$ のとき，X における Y の補集合を $X - Y$ と表す．

X が有限集合のときその元の個数を $|X|$ または $\sharp X$ と表し，X が無限集合のときは $|X| = \infty$ とかく．

$f: X \to X'$ が X の元 x を X' の元 x' にうつす写像であるとき，この写像を $f: X \to X'$ $(x \mapsto x')$ と表す．これを簡単に $f: x \mapsto x'$ とかくこともある．またこの写像 f と写像 $g: X' \to X''$ の合成写像を $g \circ f$ とかく：　$g \circ f: X \to X''$ $(x \mapsto g(f(x)))$．Y が X の部分集合であるとき，上の f の定義域を Y に制限してえられる写像を $f|_Y: Y \to X'$ と表す．写像 $\iota: Y \to X$ $(y \mapsto y)$ を**埋め込み**とよび，特に $Y = X$ のときはこれを X 上の**恒等写像**とよんで id_X と表す．

本書では特に断らない限り

(1.1)　　<u>群はすべて有限群を意味する</u>

ものとする．また H が群 G の部分群であることを $H \leq G$ または $G \geq H$ と

表し，真部分群であるときは $H \lneqq G$ などとかく．$|G:H|$ は G における H の指数を表す．H が特に G の正規部分群であるとき $H \lhd G$ または $G \rhd H$ と表す．$G \ni x$ の位数を $o(x)$ とかく．π を素数のある集合とするとき，π に属さない素数の全体を π' とかく．自然数 m の素因数がすべて π に属するとき m は π-数であるといい，自然数 n を $n = n_\pi n_{\pi'}$（n_π：π-数，$n_{\pi'}$：π'-数）と分解するとき，n_π，$n_{\pi'}$ をそれぞれ n の **π-因子**，**π'-因子** という．$G \ni x$ は $o(x)$ が π-数のとき **π-元** であるといい，$G \geq H$ の元がすべて π-元のとき，H は **π-部分群** であるという．G の任意の元 x は可換な π-元 x_π と π'-元 $x_{\pi'}$ の積

$$x = x_\pi x_{\pi'} \ (= x_{\pi'} x_\pi)$$

と一意的に表される．このとき x_π，$x_{\pi'} \in \langle x \rangle$ となり，それぞれを x の **π-部分**，**π'-部分**という．π が一つの素数 p だけからなるときは p-部分，p'-部分などという．群 G の Sylow p-部分群の全体を $\mathrm{Syl}_p(G)$ と表す．

本書ではまた特に断らない限り

(1.2)　　環はすべて単位元をもつ

ものと仮定し，これを普通 1 と表す．特に環 A の単位元であることを強調したいときは 1_A と表す．環準同型 $f: A \to B$ においては，普通 A の単位元は B の単位元にうつされるものとする：$f(1_A) = 1_B$．環 A の元 u が逆元をもつとき，すなわち $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$ となる $u^{-1} \in A$ が存在するとき，u は A の **正則元** であるという．A の正則元の全体は乗法に関して群を作り，これを $A^\times$ と表して A の **単数群** という．

環 A の元を成分とする n 次の正方行列の全体は環を作り，これを A 上 n 次の **全行列環** といって $M_n(A)$ と表す．$M_n(A)$ における正則元を **正則行列** とよび，その全体を $GL_n(A)$ と表して，これを A 上 n 次の **一般線形群** とよぶ．

環 A の両側イデアルを単に **イデアル** とよぶ．I が A のイデアルであるとき，剰余環 A/I を $\bar{A}$（あるいは A^*）などと表すことが多い．このとき自然な準同型 $A \to \bar{A}$（あるいは $A \to A^*$）による a の像を $\bar{a}$ $(= a + I)$（あるいは a^*）と表すことにする．剰余群などについても同様である．

さらに本書では

(1.3)　　体といえば可換体を意味する

ものとし，乗法の可換性を仮定しないときは**斜体**という．体 K の標数を Char K と表す．

数の集合については $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$ で，それぞれ自然数の全体，有理整数環，有理数体，実数体，複素数体を表すことにする．

1.2　A-加群

環 A の右（あるいは左）加群 V としては，任意の $v \in V$ に対して $v1 = v$（あるいは $1v = v$）をみたすものを考える．V が右（あるいは左）A-加群であることを簡単のため V_A（あるいは ${}_AV$）と表す．また V が ${}_AV$ かつ V_B であって，A の元と B の元の作用が可換であるとき，すなわち $(av)b = a(vb)$ $(a \in A,\ v \in V,\ b \in B)$ がつねに成り立つとき，V は (A, B)-両側加群であるといい ${}_AV_B$ と表す．例えば A 自身は，A の元の右あるいは左からの乗法を作用と考えて A_A あるいは ${}_AA$ と考えることができ，また ${}_AA_A$ とも考えられる．

右 A-加群 V の部分集合 X に対し $\{a \in A\,;\, Xa = 0\}$ は A の右イデアルで，これを X の**零化イデアル**とよび $(0 : X)$ と表す．特に $(0 : V)$ は A の（両側）イデアルで，これが 0 であるとき，すなわち $va = 0\ (\forall v \in V)$ ならば $a = 0$ となるとき V は**忠実**な A-加群であるという．例えば A_A は忠実な A-加群である．

環 A に対し文字の集合 $A^0 = \{a^0\,;\, a \in A\}$ を考え，そこにおける加法，乗法を

$$a^0 + b^0 = (a + b)^0, \qquad a^0b^0 = (ba)^0$$

と定義してえられる環 A^0 を A に**逆同型**な環という．

右 A-加群 V に対し，A^0 の元の左からの作用を $a^0v = va$ と定義すれば V は左 A^0-加群になる．同様に ${}_AV$ は自然に V_{A^0} と考えられる．

R が可換環のときは $R^0 \simeq R\ (a^0 \leftrightarrow a)$ で，これらを同一視して V_R は自然に ${}_RV$ と考えることができて，作用の右，左の区別は不要である．この場合単

に R-加群とよぶことにし，R の元は普通左から作用するようにかく．例えば任意の加群は $\boldsymbol{Z}$-加群と考えることができる．R-準同型 $f: V_R \to W_R$ を **R-線形写像** とよぶことがある．

本書では主として右 A-加群についてのべるが，同様のことが左 A-加群について成り立つことが明らかなときには特に注意しないことにする．また V_A の A-部分加群や，V_A から W_A への A-準同型などで，A を作用域と考えていることが文脈から明らかなときは，“A-” を省略することがある．

以後，特に断らない限り

(1.4) <u>A-加群といえば右 A-加群を意味する</u>

ものとする．

$\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が加群 V の部分加群の集合で，V の任意の元 v が $v = \sum_\lambda w_\lambda$（有限和；$w_\lambda \in W_\lambda$）と表されるとき $V = \sum_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ とかく．

A-加群 V の部分集合 $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は，$V = \sum_\lambda v_\lambda A$ であるとき V を **生成する** という．また，このとき $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は V_A の **生成元** であるということもある．V_A が有限個の元で生成されるとき，V は **A-有限生成** であるという．

特に一つの元で生成される加群 $V = vA$ を **巡回加群** という．

問 1.1 $vA \simeq A/(0:v)$（A-同型）である．

V_A において $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda a_\lambda = 0$（$v_\lambda \in V$，$a_\lambda \in A$；左辺は有限和）が成り立つのは $a_\lambda = 0\ (\forall\lambda \in \Lambda)$ となる場合に限るとき，$\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は **A-自由** であるといい，V_A が A-自由な生成元 $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をもつとき V は **A-自由加群** であるという．またこのとき $\{v_\lambda\}$ をその (A-) **基**という．例えば $A = 1A$ で，A_A は $\{1\}$ を基とする A-自由加群である．

R が可換環のとき，R-有限生成な R-自由加群 V は有限個の元からなる基をもち，その基に属する元の個数は基のとり方によらず一定である（永尾 [4] 定理 30.1 参照）．この基の元の個数を V の R 上の **階数** といい，$\mathrm{rank}_R V$ と表す．特に R が体のときは，階数を **次元** とよび，これを $\dim_R V$ と表す．

問 1.2 D は斜体とし，V_D は D-有限生成とする．このとき V は D-自由加群で，

その基に属する元の個数は基のとり方によらないことを示せ．（この基の個数も $\dim_D V$ と表す．）

1.3 A-準同型

V_A から W_A への A-準同型 $\sigma: V \to W$ に対し，$\mathrm{Im}\,\sigma = \{\sigma(v)\,;\, v \in V\}$ をその**像**といい，$\mathrm{Ker}\,\sigma = \{v \in V\,;\, \sigma(v) = 0\}$ を**核**，$W/\mathrm{Im}\,\sigma$ を σ の**余核**といって $\mathrm{Coker}\,\sigma$ と表す．$\mathrm{Ker}\,\sigma = 0$ のとき σ は**単準同型**であるといい，$\mathrm{Coker}\,\sigma = 0$，すなわち $\mathrm{Im}\,\sigma = W$ のとき σ は**全準同型**であるという．特に σ が全単射であるとき A-**同型**であるといい，$\sigma: V \simeq W$ と表す．

V_A から W_A への A-準同型の全体を $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ とかく．V，W がそれぞれ右 A-加群であることを明記したいときは $\mathrm{Hom}_A(V_A, W_A)$ とかくこともある．A-準同型 σ による $v \in V$ の像を σv と表し，$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ における加法を

$$(\sigma + \tau)v = \sigma v + \tau v$$

と定義すれば，$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は加群になる．

特に $W = V$ のとき，$\mathrm{Hom}_A(V, V)$ を $\mathrm{End}_A(V)$ と表し，そこにおける乗法を

$$(\sigma\tau)v = \sigma(\tau v)$$

と定義すれば，$E = \mathrm{End}_A(V)$ は環をなす．これを V_A の（A-）**自己準同型環**という．明らかに V は (E, A)- 両側加群である．

注意 左 A-加群 ${}_AV$ に対しては，上で σv とかく代りに $v\sigma$ とかき，乗法は $v(\sigma\tau) = (v\sigma)\tau$ と定義する．このとき V は (A, E)- 両側加群である．

問 1.3 (i) $\mathrm{Hom}_A(A_A, V_A) \simeq V$.

（ヒント：$\sigma \mapsto \sigma 1_A$ が同型を与える．）

(ii) $\mathrm{End}_A(A_A)$，$\mathrm{End}_A({}_AA)$ はいずれも A に環同型である．

1.4 直和分解

$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は V_A の A-部分加群の集合とする．V の任意の元 v が V_λ の元の

有限和として $v = \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ ($v_\lambda \in V_\lambda$) と一意的に表されるとき，V は部分加群の集合 $\{V_\lambda\}_\lambda$ の **直和** であるといって $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ と表す．このとき各 V_λ は V の **直和因子** であるという．Λ が有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ であるときは $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ とかく．

例えば V_A が A-自由加群であることは，V が A_A に同型ないくつかの部分加群の直和であることと同値である．

問 1.4　$V = \sum_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ であるとき，これが直和であるため必要十分な条件は次が成り立つことである：

$$\Big(\sum_{\lambda\neq\mu} V_\lambda\Big) \cap V_\mu = 0 \qquad (\forall \mu \in \Lambda).$$

特に $V = V_1 + V_2$ であるとき，これが直和であることと $V_1 \cap V_2 = 0$ となることは同値である．

$V_A (\neq 0)$ が 0 と異なる二つの A-部分加群の直和に分解されないとき，V は **直既約** であるといい，そうでないとき **直可約** であるという．V がいくつかの直既約な A-部分加群 V_λ の直和であるとき，これを V の **直既約分解** といって

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \qquad (\text{直既約分解})$$

と表す．またこのとき，各 V_λ を V の **直既約因子** という．

U_A が V_A のある直和因子と同型であるとき，すなわち $V = W \oplus W'$, $W \simeq U$ となるとき $U|V$ と表す．

問 1.5　(i)　$W|U, U|V \Rightarrow W|V$.

(ii)　$V = W \oplus W'$ で，U が W を含む部分加群ならば $U = W \oplus (U \cap W')$ となる．

直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ において，$V \ni v = \sum_\lambda v_\lambda$ にその V_λ-成分 v_λ を対応させる写像 $\pi_\lambda : V \to V$ は V の自己準同型で，これを（上の直和分解における）V_λ への **射影** という．このとき次が成り立つ：

$$\pi_\lambda \pi_\mu = \delta_{\lambda\mu}\pi_\lambda, \qquad \mathrm{id}_V = \sum_\lambda \pi_\lambda.$$

ただし $\delta_{\lambda\mu}$ は Kronecker のデルタとする．

(注意：$V \ni v$ に対し $\pi_\lambda v \neq 0$ となる λ は有限個しかないから，上の第2式の右辺は意味をもつ.)

射影 π_λ の値域を V_λ に制限して A-準同型 $\pi_\lambda' : V \to V_\lambda$ がえられるが，これも V_λ への射影とよぶ.

A-加群の集合 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，これらの直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ に加法と A の元の作用を

$$(v_\lambda)_\lambda + (v'_\lambda)_\lambda = (v_\lambda + v'_\lambda)_\lambda, \qquad (v_\lambda)_\lambda a = (v_\lambda a)_\lambda$$

と成分ごとに定義してえられる A-加群を $\{V_\lambda\}_\lambda$ の **直積** という.

直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ において，0 でない成分が有限個である元 $(v_\lambda)_\lambda$ ($\#\{\lambda\,;\,v_\lambda \neq 0\} < \infty$) の全体はその A-部分加群で，これを $\{V_\lambda\}_\lambda$ の（外部）直和といって，部分加群の直和と同じ記号を用いて $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ と表す. $\lambda \in \Lambda$ に対し，λ-成分以外の成分がすべて 0 である元の全体は V_λ に同型な $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ の部分加群で，普通これと V_λ を同一視して V_λ を V の部分加群とみる. このとき V はこれらの部分加群の直和である.

Λ が有限集合のときは直積と直和は一致する.

定理 1.6 任意の A-加群 V はある A-自由加群の準同型像である.

[**証明**] $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を V_A の生成元とする.（例えば V の元全体をとればよい.）このとき文字の集合 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考え A_A に同型な A-加群 $x_\lambda A$ の直和を $F = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda A$ とすれば，F は A-自由加群で $f: F \to V$ ($\sum_\lambda x_\lambda a_\lambda \mapsto \sum_\lambda v_\lambda a_\lambda$) は A-全準同型である. □

1.5 多元環

環 A において，A のすべての元と可換な元の全体 $\{z \in A\,;\, az = za\ (\forall a \in A)\}$ は A の可換な部分環である. これを A の **中心** といって $Z(A)$ と表す.

可換環 R から $Z(A)$ への環準同型 $f: R \to Z(A)$ が与えられているとき，A は **R 上の多元環**，あるいは **R-多元環** であるといい，R をその **係数環** という. このとき A-加群 V に対し，R の元 r の作用を $rv = vf(r)$ と定義すれば，V は自然に R-加群と考えられ，$a \in A$ に対し $(rv)a = r(va)$ が成り立つ.

注意 上のように，係数環の元の作用は左から作用するようにかくことにする.

特に A 自身 R-加群と考えることができて，次が成り立つ：

(1.5)　　$r(ab) = (ra)b = a(rb) \quad (r \in R,\ a,\ b \in A)$.

逆に環 A が R-加群であって (1.5) が成り立つとき，$f: R \to Z(A)\ (r \mapsto r1_A)$ は環準同型で，A は R-多元環になる.

特に $f: R \to Z(A)$ が単準同型であるときは，r と $f(r)$ を同一視して $R \subset Z(A)$ と考えてよい.

R-多元環 A が R-加群として有限生成，あるいは R-自由加群であるとき，A は R-有限生成，あるいは R-自由な多元環であるという.

例えば体 K 上の多元環 A は K-自由で，また $K \subset Z(A)$ と考えてよい.

補題 1.7　体 K 上の可換な多元環 A が K-有限生成で，かつ整域ならば A は体で，したがって A は K の有限次拡大である.

［**証明**］　$A \ni a \neq 0$ に対し $f_a: A \to A\ (x \mapsto xa)$ は K-準同型で，A が整域であることから単準同型である．したがって $\dim_K A = \dim_K (\mathrm{Im}\, f_a)$ となり，仮定によりこれは有限であるから $A = \mathrm{Im}\, f_a$ をえる．よって，特に $xa = 1$ となる $x \in A$ があり，A は体である．□

例 1.8　R は可換環，G は有限群とする．このとき G を基とする R-自由加群 $RG = \bigoplus_{a\in G} Ra$ を考え，$\sum_{a\in G} \alpha_a a$ と $\sum_{b\in G} \beta_b b$ $(\alpha_a,\ \beta_b \in R)$ の積を

$$\Big(\sum_a \alpha_a a\Big)\Big(\sum_b \beta_b b\Big) = \sum_c \gamma_c c \qquad \Big(\gamma_c = \sum_{ab=c} \alpha_a \beta_b\Big)$$

と定義する．このように G における乗法を線形に拡張して RG における乗法を定義すれば，RG は R-多元環になる．これを G の R 上の **群環** という．G の R 上の群環を普通 RG とかくが，$R[G]$ と表すこともある.

RG において，G の部分集合 X の元の和を $\hat{X}$ で表す：$\hat{X} = \sum_{x\in X} x$.

§2. ネーター加群とアルチン加群

A-加群 V の A-部分加群からなる空でない任意の集合に極大（極小）なものがあるとき，V_A は **ネーター加群（アルチン加群）** であるという．また V_A は

極大条件（極小条件）をみたすともいう．

定理 2.1　V_A について次の3条件は同値である．

（1）　V_A はネーター加群である．

（2）　（昇鎖律）　V の A-部分加群の任意の無限列

(2.1)　$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots\cdots \subset V_n \subset \cdots\cdots$$

に対して，ある m が存在して $V_m = V_{m+1} = \cdots\cdots$ となる．

（3）　V の任意の A-部分加群は A-有限生成である．

［**証明**］　(1)⇒(2)．(2.1) のような無限列に対し $\{V_n\}_{1\leq n}$ に極大なものがあり，それを V_m とすれば $V_m = V_{m+1} = \cdots\cdots$ となる．

(2)⇒(1)．V_A がネーター加群でないとすれば，V の部分加群の集合 $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で極大元がないものがある．$\mathcal{V} \ni V_{\lambda_1}$ を一つとれば，これは $\mathcal{V}$ の極大元でないから $V_{\lambda_1} \subsetneqq V_{\lambda_2}$ となる $V_{\lambda_2} \in \mathcal{V}$ がある．以下同様にして，V の A-部分加群の無限列 $V_{\lambda_1} \subsetneqq V_{\lambda_2} \subsetneqq \cdots\cdots \subsetneqq V_{\lambda_n} \subsetneqq \cdots\cdots$ がえられ昇鎖律が成り立たない．

(2)⇒(3)．W を V の任意の A-部分加群とし，$W \ni w_1$ を一つとって $W_1 = w_1A$ とおく．$W_1 \subsetneqq W$ ならば $W - W_1 \ni w_2$ をとって $W_2 = w_1A + w_2A$ とおく．これを続ければ A-部分加群の列 $W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \cdots\cdots$ がえられるが，昇鎖律よりこれが無限に続くことはない．よってある n に対し $W = W_n = w_1A + \cdots\cdots + w_nA$ となる．

(3)⇒(2)．(2.1) のような無限列に対し，$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ は A-有限生成であるから $W = w_1A + \cdots\cdots + w_rA$ と表される．このときすべての w_i を含む V_m があり，$V_m = V_{m+1} = \cdots\cdots = W$ となる．□

上の定理の (1) と (2) の同値性と全く同様にして次が示される．

問 2.2　V_A について次の2条件は同値である．

（1）　V_A はアルチン加群である．

（2）　（降鎖律）　V の A-部分加群の任意の無限列

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots\cdots V_n \supset \cdots\cdots$$

に対し，ある m が存在して $V_m = V_{m+1} = \cdots\cdots$ となる．

部分加群，剰余加群については次が成り立つ．

定理 2.3　W を V_A の A-部分加群とするとき，V がネーター（アルチン）

加群であるため必要十分な条件は，W, V/W がともにネーター（アルチン）加群であることである．

［**証明**］ 必要性は明らかである．十分性をみるため W, V/W はともにネーター加群とする．V の A-部分加群の任意の無限列 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots\cdots \subset V_n \subset \cdots\cdots$ に対し，W と V/W の部分加群の無限列

(2.2) $\quad V_1 \cap W \subset V_2 \cap W \subset \cdots\cdots \subset V_n \cap W \subset \cdots\cdots$

(2.3) $\quad (V_1 + W)/W \subset (V_2 + W)/W \subset \cdots\cdots \subset (V_n + W)/W \subset \cdots\cdots$

がえられるが，W, V/W がともに昇鎖律をみたすことにより，ある m に対し

$$V_m \cap W = V_{m+1} \cap W = \cdots\cdots,$$
$$V_m + W = V_{m+1} + W = \cdots\cdots$$

が成り立つ．このとき $V_m = V_{m+1} = \cdots\cdots$ となることが容易に示される．（アルチン加群についても同様に証明される．）□

問 2.4 V_A は有限個の A-部分加群 V_i $(1 \leq i \leq n)$ の和であるとする：$V = V_1 + \cdots\cdots + V_n$．このとき V がネーター（アルチン）加群であることと，各 V_i がネーター（アルチン）加群であることは同値である．（ヒント：n に関する帰納法を用いよ．）

環 A 自身を右 A-加群とみてネーター（アルチン）加群であるとき，A は**右ネーター（アルチン）環**であるという．左ネーター（アルチン）環も同様に定義されるが，A が可換なときは右，左の区別は不要である．以後

<u>右ネーター（アルチン）環を単にネーター（アルチン）環という</u>

ことにする．

定理 2.5 A がネーター（アルチン）環のとき，A-有限生成な V_A はネーター（アルチン）加群である．

特に可換環 R がネーター（アルチン）環のとき，R-多元環 A が R-有限生成ならば A は右かつ左ネーター（アルチン）環である．

［**証明**］ $V = v_1A + \cdots\cdots + v_nA$ とすれば，各 v_iA は A_A の準同型像でネーター加群であるから，問 2.4 より V_A はネーター加群である．

後半について，A_R はネーター加群であるが，A-部分加群は R-部分加群でもある

から，A_A も ${}_AA$ も極大条件をみたしネーター加群である．□

A-加群 $V \neq 0$ は，V 自身と 0 以外に A-部分加群をもたないとき **既約**（または**単純**）であるという．また V の A-部分加群の列

(2.4) $$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots\cdots \supset V_n = 0$$

において，各剰余加群 V_i/V_{i+1} が既約であるとき，この列を V の **組成列** といい，$\{V_{i-1}/V_i\}_{1\leq i\leq n}$ をその **組成剰余群列** という．

問 2.6　V_A が組成列をもつため必要十分な条件は，それがネーター加群かつアルチン加群であることである．

組成列をもつ加群に関し，次の定理は基本的である（永尾 [4]，定理 17.5）．

定 理 2.7　（Jordan - Hölder）　V_A が組成列をもつとき，その組成剰余群列は同型と順序を度外視すれば組成列のとり方によらない．

(2.4) が V_A の組成列であるとき，n を **組成列の長さ** といい，各 V_i/V_{i+1} を V の **既約成分** という．

§3. 根　基

環の根基の定義をのべる前に次の補題を示しておく．

補 題 3.1　A-加群 V の部分加群 $W(\neq V)$ に対し，$\bar{V} = V/W$ が A-有限生成ならば，W を含む V の極大な A-部分加群が存在する．

特に V_A が A-有限生成ならば，V の任意の A-部分加群 $W(\neq V)$ に対し，W を含む V の極大な A-部分加群が存在する．

［**証 明**］　$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i A$ とする．W を含む V_A の真部分加群の全体を $\mathscr{W}$ とすれば，これは包含関係に関して帰納的順序集合であることが次のようにして示される．$\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathscr{W}$ の空でない全順序部分集合とし，$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ とおく．ここで $U = V$ と仮定すれば各 v_i はある W_{λ_i} に含まれるが，$W_{\lambda_1}, \cdots, W_{\lambda_n}$ のうち最大なものを W_{λ_r} とすれば $W_{\lambda_r} \ni v_i$ $(\forall i)$，また $W_{\lambda_r} \supset W$ であるから $W_{\lambda_r} = V$ となり矛盾であ

る．よって $U \in \mathscr{W}$ となり，$\mathscr{W}$ は帰納的である．したがって Zorn の補題から前半の主張がえられる．また後半は明らかである．□

特に $V_A = A_A\ (= 1A)$ に上の補題を適用して次がえられる．

系 3.2　環 A の任意の右イデアル $I(\neq A)$ に対して，I を含む A の極大右イデアルが存在する．

環 A の極大右イデアル全体の共通集合を（Jacobson-）**根基**とよび，$J(A)$ と表す．

定理 3.3　環 A の根基について次のことが成り立つ．

(i)　$J(A)$ はすべての既約な A-加群の零化イデアルの共通集合に一致する．したがって $J(A)$ は A のイデアルである．

(ii)　$J(A) \ni a \Longleftrightarrow$ 任意の $x \in A$ に対し $1 - ax$ は右逆元をもつ．すなわち $(1-ax)b = 1$ となる元 $b \in A$ が存在する．

(iii)　$J(A)$ は次の性質（＊）をもつイデアル I のうち最大のものである：

（＊）　　$I \ni a \Longrightarrow 1 - a$ は正則元．

(iv)　$J(A)$ は A の極大左イデアル全体の共通集合に一致する．

［**証明**］　(i)　V_A が既約ならば $V \ni v \neq 0$ に対し $V = vA \simeq A/(0:v)$ となる．ここで $(0:v)$ は極大右イデアルであるから $J(A) \subset (0:v)$ となり，任意の $v \in V$ に対して $vJ(A) = 0$ が成り立つ．したがって $J(A) \subset (0:V)$ である．

一方 $a \in \cap_V(0:V)$（V_A：既約）とすれば，任意の極大右イデアル M に対して $(A/M)a = 0$．よって $a \in Aa \subset M$ となり，$a \in J(A)$ をえる．

(ii)　(⇒)　$J(A) \ni a$ とし，ある $x \in A$ に対し $1 - ax$ は右逆元をもたないとする．このとき $(1-ax)A \subsetneq A$ であるから，$(1-ax)A$ を含む極大右イデアル M が存在し $1 - ax \in M$ となる．一方 $ax \in J(A) \subset M$ であるから，$1 = (1-ax) + ax \in M$ となり矛盾である．

(⇐)　$a \notin J(A)$ とすれば，$a \notin M$ となる極大右イデアル M がある．このとき $M + aA = A$ となり，$b + ax = 1$ となる $b \in M$，$x \in A$ がある．よって $1 - ax = b \in M$ で，$1 - ax$ は右逆元をもたない．

(iii)　$J(A) \ni a$ とすれば，$(1-a)b = 1$ となる b がある．このとき $b = 1 + ab$

で，これはまた右逆元をもつから $bc = 1$ となる c がある．よって $c = ((1-a)b)c = (1-a)bc = 1-a$ となり，$b(1-a) = 1$．したがって $1-a$ は正則で，$J(A)$ は（$*$）をみたす．

逆にイデアル I は（$*$）をみたすとする．$I \not\subset J(A)$ と仮定すれば極大右イデアル M で $I \not\subset M$ となるものがあり，$I + M = A$ となる．よって $a + b = 1$ となる $a \in I$，$b \in M$ があり，$b = 1 - a \in M$ で，これは $1-a$ が正則元であることに反する．したがって $I \subset J(A)$ である．

(iv)　$J(A)$ の (iii) による特徴づけは右，左によらないから，極大左イデアル全体の共通集合についても同じ特徴づけがえられ，したがってそれは $J(A)$ に一致する．
□

$A \ni a$ に対し $a^n = 0$ となる n があるとき，a は **べき零** であるという．このとき $(1-a)(1+a+\cdots\cdots+a^{n-1}) = (1+a+\cdots\cdots+a^{n-1})(1-a) = 1$ となるから，$1-a$ は正則元である．

A の右（左）イデアル I の任意の元がべき零であるとき，I は **べき零元右（左）イデアル** であるという．また $I^n = 0$ となる $n \in N$ があるとき，I は **べき零右（左）イデアル** であるという．明らかにべき零右イデアルはべき零元右イデアルである．

定理 3.4　I が A のべき零元右イデアルならば $I \subset J(A)$ である．

［**証明**］　$a \in I$，$x \in A$ ならば $ax \in I$ であるから ax はべき零で，したがって $1 - ax$ は正則元である．よって定理 3.3 (ii) より $a \in J(A)$ となる．□

アルチン環の根基については次が成り立つ．

定理 3.5　A がアルチン環ならば $J(A)$ はべき零イデアルである．

［**証明**］　イデアルの列 $J(A) \supset J(A)^2 \supset \cdots\cdots$ を考えると，仮定より $J(A)^n = J(A)^{n+1} = \cdots\cdots$ となる n がある．$N = J(A)^n \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$N = N^2 \neq 0$ であるから，$IN \neq 0$ となる右イデアル I の全体は空集合ではない．そのうち極小なものを I_0 とすれば，$I_0N \neq 0$ であるから $aN \neq 0$ となる $a \in I_0$ がある．このとき $aN \subset I_0$，$(aN)N = aN \neq 0$ であるから，I_0 の極小性より $aN = I_0$ をえる．特に $ab = a$ となる $b \in N$ が存在し，$a(1-b) = 0$ となるが，定理 3.3 (iii) より $1-b$

は正則元であるから $a=0$ となる．これは $aN \neq 0$ に反する．□

根基に関する次の性質は基本的で，これを **東屋-中山の補題** とよぶ．

定理 3.6 (東屋-中山)

(i) W は V_A の A-部分加群で V/W は A-有限生成とする．このとき

$$V = W + VJ(A) \Longrightarrow V = W.$$

(ii) V_A が A-有限生成ならば次が成り立つ：

$$V = VJ(A) \Longrightarrow V = 0.$$

［**証明**］ (i) $W \subsetneq V$ とすれば，補題 3.1 より W を含む V の極大な A-部分加群 M がある．このとき V/M は既約であるから $(V/M)J(A)=0$，よって $VJ(A) \subset M$ となる．したがって $V = W + VJ(A) \subset M$ となって矛盾である．

(ii) (i) で $W=0$ とすればよい．□

環 A からえられるある種の環の根基について考察しよう．

定理 3.7 イデアル I が $J(A)$ に含まれるとき，$J(A/I) = J(A)/I$ となる．

［**証明**］ A の極大右イデアルはすべて I を含むから，$\{M/I\,;M$ は A の極大右イデアル$\}$ は A/I の極大右イデアルの全体に一致する．よって定理が成り立つ．□

環 A のイデアルが A 自身と 0 のみのとき A は **単純環** であるという．また $J(A)=0$ のとき A は **半単純** であるという．明らかに単純環は半単純である．また定理 3.7 により，一般に $A/J(A)$ は半単純である．

環 A の元 $e \neq 0$ に対し，$e^2 = e$ が成り立つとき e は **べき等元** であるという．このとき eAe は e を単位元にもつ環である．

問 3.8 A のべき等元 e は $J(A)$ に含まれない．(ヒント：$(1-e)e=0$.)

定理 3.9 A のべき等元 e に対し次が成り立つ：

$$J(eAe) = eJ(A)e = eAe \cap J(A).$$

［**証明**］ $eAe \cap J(A) = eJ(A)e$ は明らかである．

$J(A) \ni a$ とすれば，$eae \in J(A)$ であるから

$$(1-eae)b = 1, \quad b(1-eae) = 1$$

となる $b \in A$ がある．これらの両辺に右，左から e をかければ，$(e-eae)ebe = ebe(e-eae) = e$ となり，$e-eae$ は eAe の正則元である．$eJ(A)e$ は eAe のイデアルであるから，定理 3.3 (iii) より $eJ(A)e \subset J(eAe)$ をえる．

逆の包含関係を示すには，$J(eAe) \subset eAe$ より $J(eAe) \subset J(A)$ を示せばよい．そのため V_A を任意の既約加群とし，$VJ(eAe) = 0$ を示す．Ve は右 eAe-加群であるが，$Ve = 0$ ならば上のことは明らかである．よって $Ve \neq 0$ と仮定し，$W \neq 0$ を Ve の eAe-部分加群とすれば，V_A の既約性より $V = WA$ となる．したがって $Ve = WAe = WeAe = W$ となり，$(Ve)_{eAe}$ は既約である．よって $0 = VeJ(eAe) = VJ(eAe)$ となる．□

定理 3.10　体 K 上有限次元の多元環 A の中心の根基について次が成り立つ：

$$J(Z(A)) = J(A) \cap Z(A).$$

［証明］　$J(A) \cap Z(A)$ は $Z(A)$ のべき零イデアルであるから $J(Z(A))$ に含まれる．逆に $J(Z(A))A$ は A のべき零イデアルであるから $J(A)$ に含まれ，したがって $J(Z(A)) \subset J(A) \cap Z(A)$ をえる．□

環 A 上の全行列環 $M_n(A)$ において，成分がすべて A の部分集合 S に属する行列の全体を $M_n(S)$ と表すことにする．このとき次が成り立つ．

定理 3.11　$J(M_n(A)) = M_n(J(A))$.

［証明］　(i,j) 成分が 1 で他の成分はすべて 0 である行列を c_{ij} と表す．このとき $J_i = \bigoplus_{j=1}^{n} J(A)c_{ij}$ は $M_n(A)$ の右イデアルである．$J_i \ni a = \sum_j \alpha_{ij}c_{ij}$ $(\alpha_{ij} \in J(A))$ とすれば，$(1-\alpha_{ii})A = A$ より各 j に対し $\beta_{ij} \in A$ が存在して $(1-\alpha_{ii})\beta_{ij} = \alpha_{ij}$，すなわち $\beta_{ij} - \alpha_{ij} = \alpha_{ii}\beta_{ij}$ となる．このとき $b = \sum_j -\beta_{ij}c_{ij}$ とおけば $(1-a)(1-b) = 1$ となる．同様に任意の $x \in M_n(A)$ に対し $ax \in J_i$ であるから $1-ax$ は右逆元をもち，$J_i \subset J(M_n(A))$，よって $M_n(J(A)) = \bigoplus_i J_i \subset J(M_n(A))$ をえる．

逆に $J(M_n(A)) \ni a = \sum_{ij} \alpha_{ij}c_{ij}$ とすれば，任意の $\beta \in A$ に対し $c_{1p}a(\beta c_{q1}) = (\alpha_{pq}\beta)c_{11} \in J(M_n(A))$ となり，$c = \sum_{ij} \gamma_{ij}c_{ij}$ が存在して $(1-(\alpha_{pq}\beta)c_{11})(1-c) = 1$ となる．この両辺の c_{11} の係数を比較して $(1-\alpha_{pq}\beta)(1-\gamma_{11}) = 1$，したがって $1-\alpha_{pq}\beta$ は右逆元をもつ．よって $\alpha_{pq} \in J(A)$ となり，$a \in M_n(J(A))$ をえる．□

§4. べき等元

4.1 べき等元とイデアルの直和分解

環 A の二つのべき等元 e_1, e_2 は, $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ であるとき **直交する** という. また n 個のべき等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ のどの二つも直交するとき, これらは直交するという. このとき $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ はまたべき等元である.

例えば e が 1 と異なるべき等元であるとき, e と $1-e$ は直交するべき等元である.

べき等元 e が直交する二つのべき等元の和に表されないとき, e は **原始べき等元** であるという. またべき等元 e が直交するべき等元の和として

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

と表されているとき, これを e の **べき等元分解** といい, 各 e_i がすべて原始べき等元であるとき **原始べき等元分解** という.

例えば $e(\neq 1)$ が A のべき等元であるとき, $1 = e + (1-e)$ は 1 のべき等元分解である.

べき等元分解と右イデアルの直和分解とは, 次のように対応している.

定理 4.1 e は A のべき等元とする.

$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ をべき等元分解とすれば

$$eA = e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA. \tag{4.1}$$

逆に eA が右イデアルの直和として

$$eA = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \tag{4.2}$$

と表されていれば, べき等元分解 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ があって, $I_i = e_iA$ $(1 \leq i \leq n)$ となる.

このように e のべき等元分解と, $(eA)_A$ の直和分解とは 1 対 1 に対応する.

[**証明**] $e = e_1 + \cdots + e_n$ をべき等元分解とすれば, $ee_i = e_i$ であるから e_iA

$\subset eA$ となり，$A \ni a$ に対し $ea = \sum_{i=1}^{n} e_i a$ となるから $eA = \sum_{i=1}^{n} e_i A$ である．これが直和であることをみるため $ea = \sum_i e_i a_i$ と表されているとすれば，$e_i a = e_i ea = e_i a_i$ となり，この表示は一意的で (4.1) の直和分解が成り立つ．

次に (4.2) の直和分解において，$e = e_1 + \cdots + e_n$ ($e_i \in I_i$) とする．このとき任意の $a_i \in I_i$ に対し，$a_i \in eA$ より $a_i = ea_i = \sum_j e_j a_i$ となり，$e_j a_i \in I_j$ であるから両辺の I_j-成分を比較して $e_j a_i = \delta_{ji} a_i$ (δ_{ji}: Kronecker の δ) をえる．よって $e_i A = I_i$ で，特に $a_i = e_i$ とおけば $e_1, \cdots, e_n$ は直交するべき等元であることがわかる．□

上の定理から容易に次がえられる．

定理 4.2 A のべき等元 e について，次の 3 条件は同値である．

（1） e は A の原始べき等元である．

（2） $(eA)_A$ は直既約である．

（3） 環 eAe のべき等元は e のみである．

［**証明**］ (1) $\Leftrightarrow$ (2) は定理 4.1 より明らかである．

(1) $\Rightarrow$ (3)．$eAe \ni e'$ ($\neq e$) をべき等元とすれば，$e = e' + (e - e')$ は e のべき等元分解で，e は原始べき等元ではない．

(3) $\Rightarrow$ (1)．$e = e_1 + e_2$ をべき等元分解とすれば，$e_1 = ee_1 e \in eAe$ となり，e_1 は e と異なる eAe のべき等元である．□

定理 4.3 e, f は A のべき等元，V は A-加群とする．このとき

（i） $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \simeq Ve$．特に $\mathrm{Hom}_A(eA, fA) \simeq fAe$ である．

（ii） $\mathrm{End}_A(eA)$ は eAe に環同型である．

［**証明**］ $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \ni \varphi$ とすれば，$\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)e$ であるから $\varphi(e) \in Ve$ である．このとき φ に $\varphi(e)$ を対応させて (i) の同型がえられる．実際 $x \in A$ に対し $\varphi(ex) = \varphi(e)x$ であるから，φ は $\varphi(e)$ によって定まり，上の対応は単準同型である．また $v \in Ve$ に対し，$v = ve$ であるから写像 $\psi: eA \to V$ ($ex \mapsto vx$) は A-準同型で，$\psi(e) = v$ となる．したがって上の対応は全準同型でもある．

特に $V = eA$ のときは，$\mathrm{End}_A(eA) \ni \sigma$，$\tau$ に対し $\sigma(\tau e) = \sigma(e(\tau e)) = (\sigma e)(\tau e)$ となるから，上の対応は (ii) の環同型を与える．□

べき等元の生成する右イデアルの同型については次が成り立つ．

定理 4.4　e, f は環 A の二つのべき等元とする．このとき次の 3 条件は同値である．

（1）　$eA \simeq fA$　（A-同型）．

（2）　$Ae \simeq Af$　（A-同型）．

（3）　$fAe \ni a$ と $eAf \ni b$ で，$ab = f$，$ba = e$ をみたすものが存在する．

［**証明**］　(1) ⇒ (3)．$\varphi : eA \simeq fA$ は A-同型とする．このとき $\varphi(e) = a$，$\varphi^{-1}(f) = b$ とおけば，$a \in fA$ より $fa = a$，また $a = \varphi(ee) = \varphi(e)e = ae$ となるから $a = fae \in fAe$ である．同様に $b \in eAf$ が示される．また $f = \varphi(\varphi^{-1}(f)) = \varphi(b) = \varphi(eb) = \varphi(e)b = ab$．同様に $e = ba$ となる．

(3) ⇒ (1)．$a = fae$，$b = ebf$ より $\varphi_a : eA \to fA$（$ex \mapsto ax$），$\varphi_b : fA \to eA$（$fx \mapsto bx$）はともに A-準同型で，$\varphi_b \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{eA}$，$\varphi_a \circ \varphi_b = \mathrm{id}_{fA}$ となる．よって φ_a は A-同型である．

(2) ⇔ (3) も上と同様に示される．□

定理 4.5　I は $J(A)$ に含まれる A のイデアルとし，$\bar{A} = A/I$ とおく．このとき A の二つのべき等元 e, f に対して，$eA \simeq fA$（A-同型）であることと $\bar{e}\bar{A} \simeq \bar{f}\bar{A}$（$\bar{A}$-同型）であることは同値である．

［**証明**］　$eA \simeq fA \Rightarrow \bar{e}\bar{A} \simeq \bar{f}\bar{A}$ は明らかである．逆を示すには上の定理より $\bar{A} \ni \bar{a}$，$\bar{b}$ で次をみたすものがあるとしてよい：$\bar{f}\bar{a}\bar{e} = \bar{a}$，$\bar{e}\bar{b}\bar{f} = \bar{b}$，$\bar{a}\bar{b} = \bar{f}$，$\bar{b}\bar{a} = \bar{e}$．このとき必要ならば a, b の代りに fae, ebf をとって，$fae = a$，$ebf = b$ と仮定してよい．$ab = f - c$（$c \in I$）とすれば，$ab \in fAf$，$c \in fIf \subset fJ(A)f = J(fAf)$ より ab は fAf の正則元である（定理 3.3(iii)）．したがって A-準同型 $\varphi_a : eA \to fA$（$ex \mapsto ax$），$\varphi_b : fA \to eA$（$fx \mapsto bx$）に対し $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} : fA \to fA$（$fx \mapsto abx$）は A-同型である．よって φ_b は単準同型，φ_a は全準同型である．

同様に ba は eAe の正則元で，$\varphi_b \circ \varphi_a : eA \to eA$ は A-同型となるから φ_a は単準同型で，A-同型 $\varphi_a : eA \simeq fA$ がえられる．□

環 A の二つのべき等元 e, f に対し，$eA \simeq fA$ であるとき $e \simeq f$ とかき，e と f は **同値** であるという．また A の原始べき等元の全体を $\mathrm{pi}(A)$，その同値

類の全体を $\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ と表す．

一般にべき等元の原始べき等元分解は存在するとは限らないし，存在しても一意的であるとは限らない．しかし可換環については次が成り立つ．

定理 4.6 可換環 A において

(4.3) $$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

は 1 の原始べき等元分解とする．このとき

(i) $\mathrm{pi}(A) = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$．したがって (4.3) は，1 のただ一つの原始べき等元分解である．

(ii) A の任意のべき等元 e は，いくつかの e_i の和に等しい．

[**証明**] e を A のべき等元とすれば，$e = ee_1 + \cdots + ee_n$ で，$(ee_i)(ee_j) = ee_ie_j = \delta_{ij}(ee_i)$ となる．ここで $ee_i \neq 0$ とすれば $e_i = ee_i + (1-e)e_i$ となり，$(1-e)e_i \neq 0$ とすれば，これは e_i のべき等元分解で e_i の原始性に反する．よって $e_i = ee_i$ となり，$\{i_1, \cdots, i_r\} = \{i\,;\, ee_i \neq 0\}$ とすれば，$e = e_{i_1} + \cdots + e_{i_r}$ となる．特に e が原始べき等元ならば $r = 1$ で，e はある e_i に一致する．□

環 A の中心 $Z(A)$ のべき等元を A の **中心的べき等元** とよび，$Z(A)$ の原始べき等元を A の **中心的原始べき等元** という．べき等元分解に現れるべき等元がすべて中心的であるときは，これを **中心的べき等元分解** という．

定理 4.7 e は A の中心的べき等元とし，$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ を e の中心的べき等元分解とすれば，eA は (A, A)-両側加群として

$$eA = e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA$$

と直和分解される．逆に

(4.4) $$eA = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$$

を (A, A)-両側加群としての直和分解とすれば，中心的べき等元分解 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ があって，$I_i = e_iA$ となる．

このように e の中心的べき等元分解と，${}_A(eA)_A$ の直和分解とは 1 対 1 に対応する．

特に e が中心的原始べき等元であることと，eA が (A, A)-両側加群として

直既約であることは同値である．

［**証明**］ 最初の事柄は，eA, e_iA などがすべて A の両側イデアルであることより，定理 4.1 から明らかである．次に (A, A)-両側加群としての直和分解 (4.4) において，$e = e_1 + \cdots + e_n$ $(e_i \in I_i)$ とすれば，まず定理 4.1 より $I_i = e_iA$ である．また任意の $x \in A$ に対し $xe = ex$ であるから，$\sum_i xe_i = \sum_i e_ix$，$xe_i \in I_i$，$e_ix \in I_i$ となり，両辺の I_i-成分を比較して $xe_i = e_ix$，すなわち e_i は中心的べき等元になる．最後の事柄は上より明らかである．□

環 A がイデアルの直和として

(4.5)
$$A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$$

と分解されているとする．このとき $I_iI_j \subset I_i \cap I_j$ であるから，$i \neq j$ ならば $I_iI_j = 0$ である．したがって (4.5) において，A の 2 元 a, b が

$$a = \sum_{i=1}^n a_i, \qquad b = \sum_{i=1}^n b_i \qquad (a_i, b_i \in I_i)$$

と分解されているとすれば

(4.6)
$$a + b = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i), \qquad ab = \sum_{i=1}^n (a_ib_i)$$

となり A における加法，乗法は成分ごとに表される．ここで $1 = \sum_i e_i$ $(e_i \in I_i)$ とすれば，各 I_i は e_i を単位元とする環である．

一般に環 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が与えられたとき，これらの加群としての直和を

(4.7)
$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

とし，A における乗法を (4.6) のように成分ごとに定義すれば A は環になる．このとき A を**環** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **の直和**であるという．

問 4.8 環の直和 (4.7) において次が成り立つ．

(i) $Z(A) = Z(A_1) \oplus Z(A_2) \oplus \cdots \oplus Z(A_n)$.

(ii) $J(A) = J(A_1) \oplus J(A_2) \oplus \cdots \oplus J(A_n)$.

4.2 べき等元の持ち上げ

この節では以後

(4.8)　　<u>I は環 A のべき零イデアルである</u>

と仮定して，剰余環 $\bar{A} = A/I$ と A のべき等元の間の関係を考える．

定理4.9 $\bar{c}$ を $\bar{A}$ のべき等元とすれば，A のべき等元 e で次をみたすものがある．

(a) $\bar{e} = \bar{c}$.

(b) $\boldsymbol{Z}[x] \ni f(x)$ で $f(0) = 0$ となるものがあって，$e = f(c)$ と表される．

［**証明**］ $\bar{c} = \bar{a}$ ならば $a^2 - a \in I$ で，これはべき零であるから $(a^2 - a)^n = 0$ となる n がある．このような n の最小値を $n(a)$ で表し，$\bar{c} = \bar{a}$ でかつ $a = f(c)$ (ただし $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$，$f(0) = 0$) となる a のうち $n(a)$ が最小となるものを e とする．(上のような a としては例えば c がある．) このとき $n(e) = 1$ となることを示せばよい．そのため $n(e) > 1$ と仮定して，$t = e^2 - e \ (\in I)$，$e' = e - 2et + t$ とおけば $\bar{e}' = \bar{e} = \bar{c}$ で，また e' は定数項が 0 である c の多項式で表される．このとき $(e')^2 - e' = 4t^3 - 3t^2$ となり，$n(e') \leq (n(e) + 1)/2 < n(e)$ となって矛盾である．□

上の定理の (a) をみたすようなべき等元 e が存在するとき，$\bar{c}$ は A のべき等元に **持ち上げ可能** であるといい，e を $\bar{c}$ の A への **持ち上げ** とよぶ．

$\bar{A}$ におけるべき等元分解も，次の定理のように A におけるべき等元分解に持ち上げることができる．

定理4.10 $\bar{c}$ を $\bar{A}$ のべき等元とし

$$\bar{c} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \cdots + \bar{c}_n$$

を $\bar{A}$ におけるべき等元分解とする．また $e = f(c)$ ($f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$，$f(0) = 0$) を $\bar{c}$ の A への持ち上げとする．このとき A の直交するべき等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ で次をみたすものがある．

(a) $\bar{e}_i = \bar{c}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

(b) $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

(c) $x_0, x_1, \cdots, x_n$ に関する $\boldsymbol{Z}$ 上の (非可換) 多項式環の元 f_i $(1 \leq i \leq n)$ で，定数項が 0 であるものが存在して $e_i = f_i(c, c_1, \cdots, c_n)$ となる．

［**証明**］ $n = 1$ のときは明らかであるから，$n > 1$ と仮定して n に関する帰納法で示す．

$\overline{ec_1e} = \bar{c}_1$ は $\bar{A}$ のべき等元であるから，A のべき等元 e_1 で，$\bar{e}_1 = \bar{c}_1$ かつ $e_1 = f_1(ec_1e)$（ただし $f_1(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$，$f_1(0) = 0$）となるものがある．このとき $e_1 \in eAe$ であるから，$e' = e - e_1$ は e_1 と直交するべき等元である．また $\bar{e}' = \bar{c}_2 + \cdots + \bar{c}_n$ であるから，帰納法の仮定より A の直交するべき等元 $e_2, \cdots, e_n$ が存在して $\bar{e}_i = \bar{c}_i$，$e_i = g_i(e', c_2, \cdots, c_n)$ $(2 \leq i \leq n)$，$e' = e_2 + \cdots + e_n$ となる．ここで g_i は $\boldsymbol{Z}$ 上の多項式で $g_i(0, \cdots, 0) = 0$ であるが，e' の形から e_i は定理のような多項式の形に表されることがわかる．$2 \leq i \leq n$ のとき $e_i = e_ie' = e'e_i$ であるから，これは e_1 と直交し $e = e_1 + \cdots + e_n$ はべき等元分解である．□

上の定理から容易に次がえられる．

定理 4.11　A のべき等元 e が A の原始べき等元であることと，$\bar{e}$ が $\bar{A}$ の原始べき等元であることは同値である．

［**証明**］　$e = e_1 + e_2$ をべき等元分解とすれば，$\bar{e}_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ であるから $\bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ はべき等元分解である．よって $\bar{e} \in \mathrm{pi}(\bar{A})$ ならば $e \in \mathrm{pi}(A)$ である．

また $\bar{e} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$ をべき等元分解とすれば，定理 4.10 より e のべき等元分解 $e = e_1 + e_2$ が存在し，逆も成り立つ．□

また上の定理と定理 4.5 から次がえられる．

定理 4.12　A の原始べき等元 e を含む同値類 $\{e\}$ に $\bar{e}$ を含む同値類 $\{\bar{e}\}$ を対応させて，$\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ から $\widetilde{\mathrm{pi}}(\bar{A})$ への全単射がえられる．

§5. 自己準同型環

既約加群に関する次の定理は **Schur の補題** とよばれ基本的である．

定理 5.1　V, W は既約な A-加群とする．このとき

(i)　$\mathrm{Hom}_A(V, W) \ni \varphi \neq 0$ ならば，φ は A-同型である．特に V と W が A-同型でなければ，$\mathrm{Hom}_A(V, W) = 0$ である．

(ii)　$\mathrm{End}_A(V)$ は斜体である．

［**証明**］　(i)　$\mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$ で，W_A は既約であるから $\mathrm{Im}\,\varphi = W$ となる．また

$\mathrm{Ker}\,\varphi \subsetneqq V$ であるから $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$. よって φ は同型である.

(ii) $\mathrm{End}_A(V) \ni \varphi \neq 0$ ならば φ は同型で, 逆元 φ^{-1} をもつから $\mathrm{End}_A(V)$ は斜体である. □

同型な加群の直和の自己準同型環については, 次が成り立つ.

定理 5.2 A-加群 V が

(5.1) $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_n$$

と直和分解され, $V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n$ が互いに A-同型ならば, $\mathrm{End}_A(V)$ は $\mathrm{End}_A(V_1)$ 上 n 次の全行列環に環同型である.

[**証明**] (5.1) における V_i への射影を π_i とし, V_1 から V_i への A-同型 $\theta_i : V_1 \cong V_i$ を一つきめておく. $\mathrm{End}_A(V) \ni \sigma$ に対し $\varphi_{ij}(\sigma) = \theta_i^{-1}\pi_i\sigma\theta_j$ とおけば, これは $E_1 = \mathrm{End}_A(V_1)$ の元で, 写像 $\varphi : \mathrm{End}_A(V) \to M_n(E_1)$ $(\sigma \mapsto (\varphi_{ij}(\sigma))$ がえられる. φ が環準同型であることは容易に確かめられるから, これが同型であることを示す.

まず $\varphi(\sigma) = 0$ とすれば, 任意の i, j に対して $\pi_i\sigma\theta_j(V_1) = \pi_i\sigma(V_j) = 0$. よって $\sigma(V_j) = 0$ となり, $\sigma = 0$ をえる. したがって φ は単準同型である. 次に全射であることをみるため $(\sigma_{ij}) \in M_n(E_1)$ とし, また $\iota_i : V_i \to V$ を埋め込みとする. このとき $\sigma = \sum_{i,j} \iota_i\theta_i\sigma_{ij}\theta_j^{-1}\pi_j$ とおけば, $\sigma \in \mathrm{End}_A(V)$ で $\varphi(\sigma) = (\sigma_{ij})$ となる. □

上の定理の特別な場合として, Schur の補題から次がえられる.

系 5.3 定理 5.2 で $V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n$ がすべて互いに同型で既約ならば, $\mathrm{End}_A(V)$ は斜体 $\mathrm{End}_A(V_1)$ 上 n 次の全行列環に環同型である.

V_A の直和分解と $\mathrm{End}_A(V)$ におけるべき等元分解の間には密接な関係がある.

定理 5.4 V は A-加群とし, $E = \mathrm{End}_A(V)$ とおく.

(i) V_A の直和分解

(5.2) $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_n$$

における V_i への射影を ε_i とすれば

(5.3) $$\mathrm{id}_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n$$

は直交するべき等元の和である.

逆に id_V のべき等元分解 (5.3) が与えられたとき，$V_i = \varepsilon_i V$ とおけば V_A の直和分解 (5.2) がえられ，ε_i は V_i への射影になる．

さらにこのとき，E の右イデアルの直和分解

(5.4)　　$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots\cdots \oplus E_n \qquad (E_i = \varepsilon_i E)$$

がえられ，このようにして V_A の直和分解，id_V のべき等元分解，E の右イデアルの直和分解はそれぞれ 1 対 1 に対応する．

(ii)　$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を E のべき等元とすれば

$$\mathrm{Hom}_A(\varepsilon_1 V,\ \varepsilon_2 V) \simeq \varepsilon_2 E \varepsilon_1.$$

特に $\mathrm{End}_A(\varepsilon_1 V)$ は $\varepsilon_1 E \varepsilon_1$ に環同型である．

(iii)　$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は上と同様とするとき

$$\varepsilon_1 V \simeq \varepsilon_2 V\ (A\text{-同型}) \Longleftrightarrow \varepsilon_1 E \simeq \varepsilon_2 E\ (E\text{-同型}).$$

［**証明**］(i)　定理 4.1 と同様にして示される．

(ii)　$E \ni \sigma$ とすれば $\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1$ により A-準同型 $\varepsilon_1 V \to \varepsilon_2 V$ $(\varepsilon_1 v \mapsto \varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1 v)$ がえられる．これを $\varphi(\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1)$ と表せば準同型 $\varphi: \varepsilon_2 E \varepsilon_1 \to \mathrm{Hom}_A(\varepsilon_1 V,\ \varepsilon_2 V)$ がえられ，これは単準同型である．これが全射であることをみるため $\varepsilon_1' = \mathrm{id}_V - \varepsilon_1$ とおけば，$V = \varepsilon_1 V \oplus \varepsilon_1' V$ となる．A-準同型 $\sigma_1: \varepsilon_1 V \to \varepsilon_2 V$ に対し，$\varepsilon_1 V$ の元は σ_1 でうつし，$\varepsilon_i' V$ の元はすべて 0 にうつすような写像 $V \to V$ を σ とすれば，これは A-準同型で $\varphi(\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1) = \sigma_1$ となる．後半は明らかである．

(iii)　$\varepsilon_1 E \simeq \varepsilon_2 E$ となることは，定理 4.4 より $\sigma, \tau \in E$ で $(\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1)(\varepsilon_1 \tau \varepsilon_2) = \varepsilon_2$, $(\varepsilon_1 \tau \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1) = \varepsilon_1$ となるものが存在することと同値である．σ, τ に関するこの条件はまた $\varphi(\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_1): \varepsilon_1 V \to \varepsilon_2 V$ が同型で，$\varphi(\varepsilon_1 \tau \varepsilon_2): \varepsilon_2 V \to \varepsilon_1 V$ がその逆写像であることと同値で，したがって (iii) の主張がえられる．□

定理 5.4 (i) より直ちに次がえられる．

定理 5.5　A-加群 V が直既約であるため必要十分な条件は，id_V が $\mathrm{End}_A(V)$ のただ一つのべき等元であることである．

組成列をもつ加群の準同型については，次の **Fitting の補題** が成り立つ．

補題 5.6　(Fitting)　V_A が組成列をもつとき，任意の $\sigma \in \mathrm{End}_A(V)$ に対して次のような $n \geq 0$ が存在する:

$$V = \sigma^n V \oplus \mathrm{Ker}\,\sigma^n,$$

$$\sigma^n V = \sigma^{n+1} V = \cdots\cdots, \qquad \mathrm{Ker}\,\sigma^n = \mathrm{Ker}\,\sigma^{n+1} = \cdots\cdots.$$

［**証 明**］ V の A-部分加群の列

$$\sigma V \supset \sigma^2 V \supset \cdots\cdots; \qquad \mathrm{Ker}\,\sigma \subset \mathrm{Ker}\,\sigma^2 \subset \cdots\cdots$$

に対して $\sigma^n V = \sigma^{n+1} V = \cdots\cdots$, $\mathrm{Ker}\,\sigma^n = \mathrm{Ker}\,\sigma^{n+1} = \cdots\cdots$ となる n がある．このとき $\sigma^n V \cap \mathrm{Ker}\,\sigma^n = 0$ となる．実際 $\sigma^n V \cap \mathrm{Ker}\,\sigma^n \ni v$ とすれば $v = \sigma^n u$ となる $u \in V$ があり，$0 = \sigma^n v = \sigma^{2n} u$, したがって $u \in \mathrm{Ker}\,\sigma^{2n} = \mathrm{Ker}\,\sigma^n$ となって $v = \sigma^n u = 0$ をえる．

次に任意の $v \in V$ に対し，$\sigma^n v \in \sigma^n V = \sigma^{2n} V$ であるから $\sigma^n v = \sigma^{2n} w$ となる $w \in V$ がある．このとき $v - \sigma^n w \in \mathrm{Ker}\,\sigma^n$ となるから $v \in \sigma^n V + \mathrm{Ker}\,\sigma^n$, よって $V = \sigma^n V \oplus \mathrm{Ker}\,\sigma^n$ である．□

環 A の非正則元の全体が A のイデアルであるとき，A は**局所環**であるという．

定理 5.7 環 A について次の 3 条件は同値である．

(1) A は局所環である．

(2) A の非正則元の全体は根基 $J(A)$ に一致する．したがって $J(A)$ は A のただ一つの極大右（左）イデアルである．

(3) $A/J(A)$ は斜体である．

［**証 明**］ (1) $\Rightarrow$ (2). A の非正則元全体のつくるイデアルを M とする．$I\ (\neq A)$ を任意の右イデアルとすれば，I の元はすべて非正則元であるから $I \subset M$ となり，M はただ一つの極大右イデアルである．よって $M = J(A)$ となる．

(2) $\Rightarrow$ (3). $\bar{A} = A/J(A) \ni \bar{a} \neq 0$ とすれば，$a \notin J(A)$ より a は正則元で，したがって $\bar{a}$ も正則元である．よって $\bar{A}$ は斜体である．

(3) $\Rightarrow$ (1). $a \notin J(A)$ とすれば，$b \in A$, $c \in J(A)$ があって $ab = 1 - c$ となる．定理 3.3 (ii) よりこれは右逆元をもつから a も右逆元をもつ．同様に a は左逆元をもち正則元である．よって非正則元の全体は $J(A)$ に一致し，これは A のイデアルである．□

問 5.8 局所環 A において，$\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ならばある a_i は正則元である．

次は局所環の一つの特徴的な性質である．

定理 5.9 局所環 A のべき等元はその単位元のみである．

［**証明**］ 1と異なる A のべき等元 e が存在すると仮定すれば，$e(1-e)=0$ より $e, 1-e$ はともに非正則元で $J(A)$ の元である．このとき $1=e+(1-e)\in J(A)$ となり矛盾である．□

さて組成列をもつ加群の直既約性に関しては次が成り立つ．

定理 5.10 A-加群 V が組成列をもつとき次が成り立つ:

$$V_A \text{ は直既約} \iff \mathrm{End}_A(V) \text{ は局所環．}$$

［**証明**］ ($\Leftarrow$) は定理 5.9, 5.5 より導かれるから ($\Rightarrow$) を示す．$E=\mathrm{End}_A(V)\ni\sigma$ ならば，Fitting の補題と V の直既約性からある n に対して $V=\sigma^n V$，$\mathrm{Ker}\,\sigma^n=0$ となるか，または $V=\mathrm{Ker}\,\sigma^n$ となる．前者のときは σ は正則元，後者のとき σ はべき零元となるから，E の非正則元の全体を M とすれば，M はべき零元の全体に一致する．

$E\ni\sigma,\rho$ で σ はべき零とし，$\sigma^m=0$ となる最小の $m\in N$ をとる．このとき $\sigma^{m-1}(\sigma\rho)=0=(\rho\sigma)\sigma^{m-1}$，$\sigma^{m-1}\neq 0$ となるから $\sigma\rho, \rho\sigma$ は非正則元で M に属する．

また $M\ni\sigma,\rho$ とし，$\sigma+\rho=\tau$ は正則とすれば，$\tau^{-1}\sigma=1-\tau^{-1}\rho$ において $\tau^{-1}\rho$ はべき零であるから $\tau^{-1}\sigma$ は正則元である．これは上で示したことに反するから $\sigma+\rho\in M$ となり，M は E のイデアルである．□

§6. Krull-Schmidt-東屋の定理

次の定理は組成列をもつ加群についての Krull-Schmidt の定理を東屋[1]が拡張したもので，本書では重要である．以後この定理を引用するときは，略して **K-S-A 定理**とよぶことにする．

定理 6.1 (Krull-Schmidt-東屋) A-加群 V が

(6.1) $$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$$

と直既約分解され，しかも各 $\mathrm{End}_A(V_i)$ は局所環であると仮定する．

このとき V_A の他の直既約分解

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \tag{6.2}$$

に対し次が成り立つ．

(i)　$n = m$.

(ii)　$1, 2, \cdots, n$ の置換 $p = \begin{pmatrix} i \\ p(i) \end{pmatrix}$ が存在して，$V_i \simeq W_{p(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$.
かつ $1 \leq r < n$ なる任意の r に対して

$$V = W_{p(1)} \oplus \cdots \oplus W_{p(r)} \oplus (\oplus_{j=r+1}^{n} V_j) \tag{6.3}$$

となる．(すなわち (6.1) の右辺の最初の r 個の成分を $W_{p(1)}, \cdots, W_{p(r)}$ でおきかえることができる．)

［**証明**］ (6.1) において V_i への射影を $\pi_i : V \to V_i$ とする．まず $\mathrm{End}_A(V) \ni \sigma$ に対し $\pi_1 \circ \sigma|_{V_1} : V_1 \to V_1$ が同型ならば

$$V = \sigma V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad \sigma V_1 \simeq V_1$$

となることを示す．仮定から $\sigma|_{V_1}$ は同型 $V_1 \simeq \sigma V_1$ を与え，また $\pi_1|_{\sigma V_1} : \sigma V_1 \to V_1$ も同型である．よって $\sigma V_1 \cap \mathrm{Ker}\, \pi_1 = 0$. また任意の $v \in V$ に対し σV_1 の元 v_1' で $\pi_1 v = \pi_1 v_1'$ となるものがある．このとき $v - v_1' \in \mathrm{Ker}\, \pi_1$ であるから，$V = \sigma V_1 + \mathrm{Ker}\, \pi_1$ となり

$$V = \sigma V_1 \oplus \mathrm{Ker}\, \pi_1 = \sigma V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

をえる．

さて (6.2) において W_j への射影を $\sigma_j \in \mathrm{End}_A(V)$ とすれば，$\mathrm{id}_V = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j$. したがって $\mathrm{End}_A(V_1)$ において $\mathrm{id}_{V_1} = \sum_j \pi_1 \circ (\sigma_j|_{V_1})$ が成り立つ．ここで $\mathrm{End}_A(V_1)$ は局所環であるから，ある j に対し $\pi_1 \circ (\sigma_j|_{V_1}) : V_1 \to V_1$ は同型である．$j = p(1)$ とおけば，上で示したように

$$V = \sigma_{p(1)} V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad \sigma_{p(1)} V_1 \simeq V_1 \tag{6.4}$$

となる．ここで $\sigma_{p(1)} V_1 | V$，$\sigma_{p(1)} V_1 \subset W_{p(1)}$ より $\sigma_{p(1)} V_1 | W_{p(1)}$ となるが，$W_{p(1)}$ は直既約であるから $\sigma_{p(1)} V_1 = W_{p(1)}$ となる．

次に上の議論で (6.1) の代りに (6.4) をとり，V_1 の代りに V_2 をとれば，$p(2)$ $(\neq p(1))$ があって

$$V = W_{p(1)} \oplus W_{p(2)} \oplus V_3 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad W_{p(2)} \simeq V_2$$

となる．以下同様のことを続ければ，$V = W_{p(1)} \oplus \cdots \oplus W_{p(n)}$ となり $n \leq m$ をえる．

ここで $n < m$ と仮定すれば，(6.2) と比較して $W_{p(1)} \oplus \cdots \oplus W_{p(n)} \subsetneq V$ となり矛盾である．よって $n = m$ となり，$\begin{pmatrix} i \\ p(i) \end{pmatrix}$ は置換で (6.3) が成り立つ．□

特に極大あるいは極小条件をみたす加群については次が成り立つ．

定理 6.2　V は A-加群とするとき

(i)　V がネーター (アルチン) 加群ならば，V_A は有限個の直既約因子の直和に分解される．

(ii)　V_A が組成列をもてば，その二つの直既約分解について K-S-A 定理の結論が成り立つ．

[**証明**]　(i)　主張が成り立たないと仮定すると $V = V_1 \oplus W_1$ $(0 \neq V_1, W_1)$ と直和分解され，その直和因子の一つ，例えば W_1 について結論が成り立たない．このとき W_1 はまた $W_1 = V_2 \oplus W_2$ と直和分解され，W_2 について結論が成り立たないとしてよい．以下同様にして部分加群の次のような減少あるいは増大する無限列がえられる：

$$W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq W_3 \supsetneq \cdots\cdots,$$
$$V_1 \subsetneq V_1 \oplus V_2 \subsetneq V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \subsetneq \cdots\cdots.$$

これは (i) の仮定に反する．

(ii)　定理 5.10 と K-S-A 定理より明らかである．□

§7. 完全可約加群

A-加群 V が既約な A-部分加群の直和に分解されるとき，V は**完全可約**であるという．また $V = \oplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ で各 V_λ が既約なとき，これを V の**既約分解**とよぶ．このとき明らかに $VJ(A) = 0$ である．

定理 7.1　A-加群 V について，次の 3 条件は同値である．

(1)　V は完全可約である．

(2)　V はいくつかの既約な A-部分加群の和である．

(3)　V の任意の A-部分加群 W は V の直和因子である．

［証 明］ (1) ⇒ (2) は明らかである．

(2) ⇒ (3)．$V=\sum_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, V_λ はすべて既約とし，W は V の A-部分加群とする．また Λ の部分集合 S で $W\cap(\sum_{s\in S}V_s)=0$ となるものの全体を $\mathscr{S}$ とする．$\mathscr{S}=\phi$ ならば，任意の V_λ に対し $W\cap V_\lambda\neq 0$．したがって V_λ の既約性から $W\supset V_\lambda$ となって $W=V$ をえる．$\mathscr{S}\neq\phi$ のときは包含関係に関して $\mathscr{S}$ が帰納的順序集合になることが容易にわかる．したがって Zorn の補題より $\mathscr{S}$ に極大元 S_0 がある．$S_0\in\mathscr{S}$ より $W+(\sum_{s\in S_0}V_s)$ は直和である．$U=W\oplus(\sum_{s\in S_0}V_s)$ とおき，$U\cap V_\lambda=0$ となる λ があるとすると $\lambda\notin S_0$, $S_0\cup\{\lambda\}\in\mathscr{S}$ となり S_0 の極大性に反する．よって任意の $V_\lambda\subset U$ となり，$U=V$ をえる．

(3) ⇒ (1)．V は条件 (3) をみたすとして，まず V の任意の A-部分加群 $W\neq 0$ は既約な A-部分加群を含むことを示す．$W\ni w\neq 0$ とすれば，w を含まない W の A-部分加群の全体は包含関係に関して帰納的順序集合となり，そのうち極大なもの W_1 が存在する．このとき $W_1|V$ であるから $W_1|W$ となり，$W=W_1\oplus W_2$ と分解される．W_2 が自明でない A-部分加群 W_2' $(\neq 0, W_2)$ をもつと仮定すると，上と同様に $W_2=W_2'\oplus W_2''$ $(W_2', W_2''\neq 0)$ と分解されるが，W_1 の極大性より $(W_1\oplus W_2')\cap(W_1\oplus W_2'')\ni w$ となる．一方，$(W_1\oplus W_2')\cap(W_1\oplus W_2'')=W_1$ であるからこれは矛盾である．よって W_2 は既約である．

さて V の既約な部分加群の全体を $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とし，Λ の部分集合 T で $\sum_{t\in T}V_t$ が直和となるものの全体を $\mathscr{T}$ とする．このとき包含関係に関して $\mathscr{T}$ は帰納的順序集合で極大元 T_0 がある．$U=\bigoplus_{t\in T_0}V_t$ が V と異なると仮定すると，$V=U\oplus W$ $(W\neq 0)$ と直和分解される．このとき上で示したことより W はある V_λ を含み，$T_0\cup\{\lambda\}\in\mathscr{T}$ となって T_0 の極大性に反する．よって $U=V$ で (1) が成り立つ．□

問 7.2 W $(\neq 0)$ は V_A の A-部分加群とする．このとき V_A が完全可約ならば W_A, $(V/W)_A$ はいずれも完全可約である．

定理 7.3 A-加群 V は完全可約で

(7.1) $$V=\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_i}V_{i\lambda}\qquad (V_{i\lambda}\text{ は既約})$$

とし，$V_{i\lambda}$ と $V_{k\mu}$ は $i=k$ のとき，かつそのときに限り同型であるとする．このとき $U_i=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_i}V_{i\lambda}$ とおき，$V_{i\lambda}$ の一つを V_i とすれば次が成り立つ．

(i) $V=\bigoplus_{i\in I}U_i$.

(ii) V の任意の既約部分加群 W はある V_i に同型で，このとき $W \subset U_i$ となる．したがって U_i は，V_i に同型な V の既約部分加群全体の和である．

(iii) $\mathrm{End}_A(V)U_i = U_i$.

(iv) $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ が有限集合で，$|\Lambda_i| < \infty$ $(\forall i \in I)$ ならば

$$\mathrm{End}_A(V) \simeq \mathrm{End}_A(U_1) \oplus \cdots\cdots \oplus \mathrm{End}_A(U_m) \qquad (環の直和)$$

となり，各 $\mathrm{End}_A(U_i)$ は斜体 $\mathrm{End}_A(V_i)$ 上 $|\Lambda_i|$ 次の全行列環に同型である．

[証明] (i) は明らかである．

(ii) $\pi_{i\lambda}$ を (7.1) における $V_{i\lambda}$ への射影とすれば，$W \ni w$ に対し $w = \sum_{i,\lambda} \pi_{i\lambda}(w)$ (有限和) であるから $\pi_{i\lambda}W \neq 0$ となる i, λ がある．このとき $\pi_{i\lambda}|_W : W \to V_{i\lambda}$ は 0 と異なるから，Schur の補題により $W \simeq V_{i\lambda} \simeq V_i$ である．また $k \neq i$ ならば $W \neq V_{k\mu}$ であるから $\pi_{k\mu}W = 0$ となり，$W \subset U_i$ をえる．

(iii) $\mathrm{End}_A(V) \ni \sigma$ に対して $\sigma V_{i\lambda}$ は 0 か $V_{i\lambda}$ に同型であるから，(ii) より $\sigma V_{i\lambda} \subset U_i$ となり $\sigma U_i \subset U_i$ がえられる．

(iv) $\mathrm{End}_A(V) \ni \sigma$ の定義域と値域をともに U_i に制限すれば，準同型 $\sigma_i : U_i \to U_i$ がえられる．このとき $\sigma \mapsto (\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$ は定理の環同型を与える．□

上の定理で (i) の直和分解を V の **等質分解** とよび，各直和因子 U_i を V の **等質因子** という．V の等質分解は (ii) により，最初に与えた直和分解 (7.1) によらないで定まる．

§8. アルチン環

8.1 アルチン環の構造

まず半単純なアルチン環の構造について考察する．

定理 8.1 環 A について，次の 3 条件は同値である．

(1) A は半単純なアルチン環である．

(2) A_A は完全可約である．

(3) 任意の A-加群 V は完全可約である．

［**証明**］ (1) ⇒ (2)．A の極大右イデアルの全体を $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とし，有限個の M_λ の共通集合となる右イデアルの全体を考えると，極小条件よりその中に極小なもの $M_{\lambda_1} \cap \cdots \cap M_{\lambda_r}$ がある．いま $M_{\lambda_1} \cap \cdots \cap M_{\lambda_r} \neq 0$ とすれば，$J(A) = \bigcap_\lambda M_\lambda = 0$ より $M_{\lambda_1} \cap \cdots \cap M_{\lambda_r} \supsetneqq M_{\lambda_1} \cap \cdots \cap M_{\lambda_r} \cap M_\lambda$ となる M_λ がある．これは極小性に反するから $M_{\lambda_1} \cap \cdots \cap M_{\lambda_r} = 0$ である．このとき写像 $\varphi: A \to (A/M_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (A/M_{\lambda_r})$ ($a \mapsto (a + M_{\lambda_1}, \cdots, a + M_{\lambda_r})$) は単準同型で，各 $(A/M_{\lambda_i})_A$ は既約であるから，A_A は完全可約である．

(2) ⇒ (3)．$A = \sum_\lambda I_\lambda$, $(I_\lambda)_A$ は既約とすれば，$V = \sum_{v\in V} \sum_\lambda vI_\lambda$ となり，vI_λ は 0 か I_λ に同型であるから V_A は完全可約である．

(3) ⇒ (1)．特に A_A は完全可約であるから $0 = AJ(A) = J(A)$ となり，A は半単純である．また $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ を A_A の既約分解とし，$1 = \sum_\lambda e_\lambda$ ($e_\lambda \in I_\lambda$) とすれば，有限個の λ をのぞいて $e_\mu = 0$ となり，$I_\lambda = e_\lambda A$ であるから $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ ($(I_i)_A$ は既約) としてよい．このとき A_A は組成列 $A \supset I_1 \oplus \cdots \oplus I_{n-1} \supset \cdots \supset I_1 \supset 0$ をもち，A はアルチン環である．□

上の定理から次がえられる．

定理 8.2 A がアルチン環ならば次が成り立つ：

$$V_A \text{ が完全可約} \Longleftrightarrow VJ(A) = 0.$$

［**証明**］ (⇒) は明らかである．逆を示すため $VJ(A) = 0$ とし，$\bar{A} = A/J(A)$ とおけば V は自然に $\bar{A}$-加群と考えられる．$\bar{A}$ は半単純なアルチン環であるから $V_{\bar{A}}$ は完全可約，したがって V_A は完全可約である．□

上のようにアルチン環 A 上の完全可約加群 V_A は，実質的には半単純環 $\bar{A} = A/J(A)$ 上の加群と考えることができる．

環 A の右イデアル I ($\neq 0$) について，これが A-加群として既約であることは A の極小右イデアルであることに他ならない．

半単純なアルチン環 A は A-加群として完全可約であるから，極小右イデアルの直和として

$$A = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{\lambda=1}^{n_i} e_{i\lambda} A \tag{8.1}$$

と分解される．ただし $1 = \sum_{i,\lambda} e_{i\lambda}$ は 1 の原始べき等元分解で，$e_{i\lambda}A$ と $e_{j\mu}A$

は $i=j$ のとき，かつそのときに限り A-同型であるとする．ここで $A_i = \bigoplus_\lambda e_{i\lambda}A$ とおけば，A_A の等質分解

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k \tag{8.2}$$

がえられる．$\mathrm{End}_A(A_A)$ は A の元の左からの乗法による作用の全体と一致するから，定理 7.3 (iii) より各 A_i は A のイデアルで，(8.2) は環の直和である．また $A_i \simeq M_{n_i}(D_i)$，ただし $D_i = \mathrm{End}_A(e_{i1}A) \simeq e_{i1}Ae_{i1}$ でこれは斜体である．よって下の問から A_i は単純環である．各 A_i を A の **単純因子** とよぶ．

問 8.3　環 A のイデアル I に $M_n(I)$ を対応させて，A のイデアルと $M_n(A)$ のイデアルとは 1 対 1 に対応する．特に A が単純環であることと，$M_n(A)$ が単純環であることは同値である．（ヒント：$M_n(A)$ のイデアル L に対し，L に属する元の (1,1)-成分全体を I とすれば $L = M_n(I)$ である.）

以上の考察から次の二つの定理がえられる．

定理 8.4　(Wedderburn)　環 A について次の 3 条件は同値である．

（1）　A は単純なアルチン環である．

（2）　A は互いに A-同型な極小右イデアルの有限個の直和である．

（3）　$A \simeq M_n(D)$，D は斜体．

［**証 明**］　(1) ⇒ (2)．単純性より A_A の等質分解 (8.2) で $k=1$ である．

(2) ⇒ (3)．(8.2) で $k=1$ となるから明らかである．

(3) ⇒ (1)．問 8.3 より明らかである．□

定理 8.5　環 A について次の 3 条件は同値である．

（1）　A は半単純な（右）アルチン環である．

（2）　A は半単純な左アルチン環である．

（3）　$A \simeq M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k)$，各 D_i は斜体．

［**証 明**］　(1) ⇒ (3) は明らかである．

(3) ⇒ (1)．各 $M_{n_i}(D_i)$ は単純な右アルチン環であるから，A も右アルチン環で，問 4.8 (ii) より $J(A)=0$ である．

(2) ⇔ (3)．条件 (3) は右，左に無関係であるから，上と同様に示される．□

A は半単純なアルチン環とし，(8.1), (8.2) の記号を用いることにする．V_A は既約な A-加群とするとき，$V \ni v \neq 0$ に対し $V = vA = \sum_{i,\lambda} ve_{i\lambda}A$ であるから，ある i, λ に対し $V = ve_{i\lambda}A$ となり，このとき $V \simeq e_{i\lambda}A \simeq e_{i1}A$ である．またこのとき $VA_i = V$，$j \neq i$ ならば $VA_j = 0$ となり，V は実質的には A_i-加群と考えてよい．既約な A-加群 V は $VA_i \neq 0$ であるとき，A の単純因子 A_i に属する既約加群であるという．

上のことから次の定理がえられる．

定理 8.6　(8.1), (8.2) の記号のもとで，半単純なアルチン環 A 上の既約加群の A-同型類の個数は A の単純因子の個数 k に等しく，$\{e_{11}A, e_{21}A, \cdots, e_{k1}A\}$ はその完全代表系である．

単純なアルチン環 $A = M_n(D)$ (D は斜体) において，(i, j)-成分は 1 で他の成分はすべて 0 である行列を c_{ij} と表し，これを **行列単位** とよぶ．このとき，

$$dc_{ij} = c_{ij}d \quad (\forall d \in D), \qquad c_{ij}c_{kl} = \delta_{jk}c_{il},$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \quad (\text{べき等元分解}),$$

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{n} c_{ij}D = \bigoplus_{i=1}^{n} c_{ii}A$$

となる．ここで $\mathrm{End}_A(c_{ii}A) \simeq c_{ii}Ac_{ii} = c_{ii}D \simeq D$ (環同型) であるから，定理 5.5 より $c_{ii}A$ は直既約，したがってこの場合既約である．よって n は A_A の組成列の長さに等しく，D は既約な A-加群の自己準同型環に同型である．このようにして n と D (同型は度外視) は単純環 A によって一意的に定まり，次がえられる．

定理 8.7　D_1, D_2 を斜体とするとき次が成り立つ：

$$M_{n_1}(D_1) \simeq M_{n_2}(D_2) \Longleftrightarrow n_1 = n_2,\ D_1 \simeq D_2.$$

単純なアルチン環 A が $M_n(D)$ (D は斜体) に同型であるとき，D は **A に属する斜体** であるという．

問 8.8　(i)　完全可約加群 V_A については，これがアルチン加群であることとネ

ーター加群であることは同値である．

（ii）　アルチン環 A はネーター環である．

（ヒント：$J=J(A)$，$\bar{A}=A/J$ とおき，$A=J^0\supset J\supset J^2\supset\cdots\supset J^n=0$ なる列について，$(J^{i-1}/J^i)_{\bar{A}}$ に上の (i) を適用せよ．）

上の問の (ii) を用いて次の定理が示される．

定理 8.9　A はアルチン環で，V_A は A-有限生成とするとき次が成り立つ：

$$V_A \text{ は直既約} \Longleftrightarrow \mathrm{End}_A(V) \text{ は局所環．}$$

特に $\mathrm{pi}(A)\ni e$ ならば eAe は局所環である．

［**証明**］　定理 2.5 より V_A は組成列をもつから，定理 5.10 が適用できる．□

この節では以後

<u>環 A はアルチン環とし，$\bar{A}=A/J(A)$ とおく．</u>

このとき $\bar{A}$ は半単純なアルチン環であるから，(8.1) のように

$$\bar{A}=\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{\lambda=1}^{n_i}\bar{e}_{i\lambda}\bar{A} \tag{8.3}$$

と既約分解され，また

$$\bar{A}=\bigoplus_{i=1}^{k}\bar{A}_i \qquad \Bigl(\bar{A}_i=\bigoplus_{\lambda=1}^{n_i}\bar{e}_{i\lambda}\bar{A}\simeq M_{n_i}(D_i),\ D_i \text{ は斜体}\Bigr) \tag{8.4}$$

と単純環の直和に分解される．

ここで§4 でのべたことにより，$1=\sum_{i,\lambda}e_{i\lambda}$ は 1 の原始べき等元分解で，$i=j$ のときかつそのときに限って $e_{i\lambda}\simeq e_{j\mu}$ であるとしてよい．このとき

$$A=\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{\lambda=1}^{n_i}e_{i\lambda}A \qquad (\text{直既約分解}) \tag{8.5}$$

がえられ，$e_{i\lambda}A\simeq e_{j\mu}A\Longleftrightarrow i=j$ となる．

簡単のため e_{i1} を e_i と表すことにする．既約な A-加群は実質的には $\bar{A}$-加群と考えられるから，定理 8.6 とその前の考察から次の定理がえられる．

定理 8.10　上の記号のもとで次が成り立つ．

（i）　$\{\bar{e}_1\bar{A},\cdots,\bar{e}_k\bar{A}\}$ は既約な A-加群の同型類の完全代表系である．したがってその同型類の個数は $\bar{A}$ の単純因子の個数に等しい．

（ii）　既約な A-加群 V について

$$V \simeq \bar{e}_i\bar{A} \Longleftrightarrow Ve_i \neq 0.$$

また，このとき $A/(0:V) \simeq \bar{A}_i$ である．

［**証明**］（i）定理8.6より明らかである．

（ii）$\bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i \neq 0$ より（$\Rightarrow$）は明らかである．また $Ve_i \neq 0$ ならば，V は既約な $\bar{A}$-加群として $\bar{A}_i$ に属し，したがって $V \simeq \bar{e}_i\bar{A}$ となる．後半については $(0:V) \supset J(A)$ で，$(0:V)/J(A) = \bigoplus_{j \neq i} \bar{A}_j$ であることからわかる．□

A_A の直既約因子に同型な A-加群を A の **主直既約加群** とよぶ．$\mathrm{pi}(A) \ni e$ ならば eA は A の主直既約加群である．またK-S-A定理と(8.5)から，$\{e_1A, \cdots, e_kA\}$ は A の主直既約加群の同型類の完全代表系である．

アルチン環はネーター環でもある（問8.8(ii)）から，A-有限生成な V_A は定理2.5より組成列をもつ．$\mathrm{pi}(A) \ni e$ に対し，V_A の一つの組成剰余群列の中で $\bar{e}\bar{A}$ に同型なものの個数を，V_A における $\bar{e}\bar{A}$ の **重複度** とよぶ．この重複度に関しては次の定理が成り立つ．

定理8.11 $\mathrm{pi}(A) \ni e$ のとき，V_A における $\bar{e}\bar{A}$ の重複度は右 eAe-加群 Ve の組成列の長さに等しい．

［**証明**］ $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ を V_A の組成列とする．このとき定理8.10(ii)によって，$V_i/V_{i+1} \simeq \bar{e}\bar{A} \Longleftrightarrow (V_i/V_{i+1})e \neq 0$ である．ここで $(V_i/V_{i+1})e = (V_ie + V_{i+1})/V_{i+1} \simeq V_ie/V_ie \cap V_{i+1} = V_ie/V_{i+1}e$ であるから，Ve の eAe-部分加群の列

(8.6) $$Ve = V_0e \supset V_1e \supset \cdots \supset V_ne = 0$$

において，$V_ie \neq V_{i+1}e \Leftrightarrow V_i/V_{i+1} \simeq \bar{e}\bar{A}$ である．またこのとき $(V_i/V_{i+1})e \simeq \bar{e}\bar{A}\bar{e}$（$eAe$-同型）で，$\bar{e}\bar{A}\bar{e}$ は斜体であるからこれは右 eAe-加群として既約である．したがって(8.6)で重複するものを省けば $(Ve)_{eAe}$ の組成列がえられ，その長さは $\#\{i;\ V_i/V_{i+1} \simeq \bar{e}\bar{A}\}$ に等しい．□

特に e_iA における $\bar{e}_j\bar{A}$ の重複度を c_{ij} と表して，これを A の **Cartan 不変数** とよぶ．また k 次の正方行列 (c_{ij}) を A の **Cartan 行列** という．

上の定理から直ちに次がえられる．

定理 8.12 $c_{ij} \neq 0 \Longleftrightarrow e_iAe_j \neq 0$.

8.2 ブロック

アルチン環 A においては，極小条件より 1 は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m$$

と表されることがわかる．これに対応して，§4 でのべたように (A, A)-両側加群としての直既約分解

$$(8.7) \qquad A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots\cdots \oplus B_m \qquad (B_i = \varepsilon_i A = A\varepsilon_i)$$

がえられる．各 B_i を A の **ブロック** とよび，ε_i をその **ブロックべき等元** という．また (8.7) を A の **ブロック分解** とよび，A-加群 V は，$V\varepsilon_i = V$ であるとき **ブロック B_i に属する** という．

定理 8.13 V_A が直既約ならば，V はあるブロックに属する．

［**証明**］ $V\varepsilon_i$ は V の A-部分加群で，$V = V\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus V\varepsilon_n$ となる．よって直既約性により，ある i に対し $V = V\varepsilon_i$ となる．□

特に主直既約加群については次が成り立つ．

定理 8.14 $\mathrm{pi}(A) \ni e$ に対し，eA がブロック B_i に属することと $eA \subset B_i$ となることは同値である．

［**証明**］ $eA\varepsilon_i = eA$ ならば，$e = e\varepsilon_i \in B_i$ であるから $eA \subset B_i$ となる．逆に $eA \subset B_i = A\varepsilon_i$ ならば，明らかに $(eA)\varepsilon_i = eA$ である．□

$\mathrm{pi}(A) \ni e, f$ に対して，A の原始べき等元の列

$$e = e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots, e^{(r)} = f$$

が存在して，$0 \leq i \leq r-1$ に対し $e^{(i)}A$ と $e^{(i+1)}A$ が同型な既約成分を少なくとも一つもつとき，e と f は **連結** しているといって $e \sim f$ とかく．この関係は明らかに同値関係である．

定理 8.15 $\mathrm{pi}(A)$ を同値関係～で分けたときの同値類を $I_1, \cdots, I_n$ とおく．

このとき (8.7) の記号のもとで $n = m$ (=ブロックの個数) で，適当に番号をつければ

$$B_i = \sum_{e \in I_i} eA$$

となる．

特に $\mathrm{pi}(A) \ni e, f$ に対して，eA と fA が同じブロックに属することと $e \sim f$ であることは同値である．

［**証明**］ $D_i = \sum_{e \in I_i} eA$ とおく．$e \in I_i$，$f \in I_j$，$i \neq j$ とすれば，eA は $\bar{f}\bar{A}$ に同型な既約成分をもたないから，定理 8.12 より $eAf = 0$ である．したがって $i \neq j$ ならば $D_iD_j = 0$ となる．明らかに $A = \sum_{j=1}^{n} D_j$ であるから，$AD_i = (\sum_j D_j)D_i \subset D_iD_i \subset D_i$ となり，D_i は A のイデアルである．いま $1 = \sum_j e_j\,(e_j \in D_j)$ とすれば，$a_i \in D_i$ に対し $a_i = a_i(\sum_j e_j) = a_ie_i$．同様に $a_i = e_ia_i$ となるから，e_i は D_i の単位元である．また $\sum_j a_j = 0\,(a_j \in D_j)$ とすれば $0 = (\sum_j a_j)e_i = a_ie_i = a_i$ となり，A の直和分解

$$A = D_1 \oplus \cdots \oplus D_n$$

がえられる．

一方 eA と fA がともに $\bar{e}'\bar{A}\,(e' \in \mathrm{pi}(A))$ に同型な既約成分をもてば，$eAe' \neq 0$，$fAe' \neq 0$ となるから，$e'A \subset B_j$ とすれば eA，$fA \subset B_j$ となる．これより $e \sim f$ ならば eA と fA は同じブロック B_j に含まれることがわかる．よって各 D_i はある B_j に含まれ，$D_i \mid B_j$ となるが，${}_A(B_j)_A$ の直既約性より $D_i = B_j$ をえる．□

§8.1 の記号を用いて，$\{e_1, \cdots, e_k\}$ を $\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ の完全代表系とし，その番号を適当につけて，$e_1A, \cdots, e_kA$ が最初から順にまとまってブロック $B_1, \cdots, B_m$ に属するようにしておく．このとき e_iA と e_jA が異なるブロックに属すれば，$c_{ij} = 0$ であるから，各ブロック B_i に対応する Cartan 不変数の行列を C_i とすれば，A の Cartan 行列 C は次のように分解する：

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & C_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & C_m \end{pmatrix}.$$

また定理 8.15 から，各 C_i は e_j の番号をどんなにつけかえても，次の形

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

に分解することはない.

8.3 Loewy 列と台列

やはり環 A はアルチン環とし, $J=J(A)$, $\bar{A}=A/J$ とおく.

補題 8.16 V_A に対し VJ は, V/W が完全可約となる A-部分加群 W のうち最小のものである.

[**証明**] $(V/VJ)J=0$ であるから, 定理 8.2 より V/VJ は完全可約である. また V/W が完全可約ならば, $0=(V/W)J=(VJ+W)/W$ であるから, $VJ\subset W$ となる. □

$VJ(A)$ を V_A の **根基** とよぶ. また, 完全可約加群 $V/VJ(A)$ を V_A の **頭** といって $\mathrm{hd}(V)$ と表す.

V_A に対して $VJ^{m-1}\neq 0$, $VJ^m=0$ となる m があり, A-部分加群の列

$$V=VJ^0\supset VJ\supset VJ^2\supset\cdots\cdots\supset VJ^{m-1}\supset VJ^m=0$$

がえられる. このとき完全可約加群の列

(8.8) $\qquad V/VJ,\quad VJ/VJ^2,\quad \cdots\cdots,\quad VJ^{m-1}/VJ^m=VJ^{m-1}$

を V の **Loewy 列** とよび, m をその **長さ** という. また VJ^{i-1}/VJ^i を V の i **番目の頭** といい, これが

$$VJ^{i-1}/VJ^i=X_{i1}\oplus\cdots\cdots\oplus X_{ir_i}$$

と既約分解されているときには, V の Loewy 列を次のように表すことがある.

(8.9)
$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \cdots\cdots & X_{1r_1} \\ X_{21} & \cdots\cdots & X_{2r_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ X_{m1} & \cdots\cdots & X_{mr_m} \end{array}$$

例えば $e\in\mathrm{pi}(A)$ のとき, $(eA)J=eJ=eA\cap J$ であるから

$$\mathrm{hd}(eA)=eA/eA\cap J\simeq(eA+J)/J=\bar{e}\bar{A}$$

となる．したがって次の定理の (i) がえられる．

定理 8.17 $e \in \mathrm{pi}(A)$ とする．このとき

(i) $\mathrm{hd}(eA) \simeq \bar{e}\bar{A}$ で，これは既約である．したがって eA は唯一つの極大部分加群 eJ をもつ．

(ii) V_A は A-有限生成で $\mathrm{hd}(V) \simeq \bar{e}\bar{A}$ とすれば，V は eA の準同型像である．

［**証明**］ (ii) $\bar{V} = V/VJ$ の元 $\bar{v}$ が上の同型で $\bar{e}$ に対応するとする．このとき $\overline{ve} = \bar{v}$ となり，A-準同型 $\varphi: eA \to V$ $(ea \mapsto vea)$ がえられる．明らかに $veA + VJ = V$ であるから，東屋-中山の補題により $veA = V$ となり，φ は全準同型である．□

V_A の極小な A-部分加群全体の和を $\mathrm{soc}(V)$ と表し，これを V の**台**という．明らかに $\mathrm{soc}(V)$ は V の完全可約な部分加群のうち最大のものである．

いま $S_0(V) = 0$，$S_1(V) = \mathrm{soc}(V)$ とおき，一般に $S_i(V)$ を帰納的に

$$\mathrm{soc}(V/S_{i-1}(V)) = S_i(V)/S_{i-1}(V)$$

となるように定義する．このとき $S_i(V)/S_{i-1}(V)$ を V の **i 番目の台**という．

定理 8.18 $\mathrm{soc}(V) = \{v \in V\,;\, vJ = 0\}$.

また一般に次が成り立つ：

$$S_i(V) = \{v \in V\,;\, vJ^i = 0\}.$$

［**証明**］ 簡単のため $S_i = S_i(V)$，$T_i = \{v \in V\,;\, vJ^i = 0\}$ とおく．定理 8.2 より $S_1 = T_1$ となることは容易にわかる．i に関する帰納法で $S_i = T_i$ を示すため，$S_{i-1} = T_{i-1}$ と仮定する．このとき $S_iJ \subset S_{i-1}$ より $S_i \subset T_i$ となる．一方 $T_iJ \subset T_{i-1} = S_{i-1}$ であるから，$(T_i/S_{i-1})J = 0$．したがって T_i/S_{i-1} は完全可約で，$T_i \subset S_i$ がえられる．□

上の定理から $VJ^m = 0$ ならば $S_m(V) = V$ となる．したがって $S_{n-1}(V) \neq V$，$S_n(V) = V$ となる $n \leq m$ があり，完全可約加群の列

(8.10) $\quad S_1(V),\ S_2(V)/S_1(V),\ \cdots\cdots,\ S_n(V)/S_{n-1}(V)$

がえられる．これを V の**台列**とよび，n をその**長さ**という．これらの既約分解を下から順に並べて，(8.9) と同じように表すこともある．

定理 8.19 V_A の Loewy 列と台列の長さは等しい．これを m とすると次が成り立つ：

$$VJ^i \subset S_{m-i}(V) \qquad (i = 0, 1, \cdots, m-1).$$

［証明］ (8.8), (8.10) をそれぞれ V の Loewy 列，台列とし，$S_i = S_i(V)$ とおく．このとき定理のまえで示したように $n \leq m$ である．また i に関する帰納法で $VJ^i \subset S_{n-i}$ が示される．すなわち $VJ^{i-1} \subset S_{n-i+1}$ と仮定すれば，$VJ^i \subset S_{n-i+1}J \subset S_{n-i}$ となる．特に $VJ^n = S_0 = 0$ であるから，$m \leq n$ をえる．□

補題 8.20 W を V_A の A-部分加群とすれば，$S_i(W) = W \cap S_i(V)$ である．

［証明］ 定理 8.18 より明らかである．□

定理 8.21 $e \in \mathrm{pi}(A)$ とするとき，V_A について次の 2 条件は同値である．

(1) $\bar{e}\bar{A}$ は V の i 番目の台のある既約因子に同型である．

(2) V の A-部分加群 W で，$\mathrm{hd}(W) \simeq \bar{e}\bar{A}$, W の Loewy 列の長さは i となるものがある．

［証明］ 簡単のため $S_i = S_i(V)$ とおく．

(1) ⇒ (2)．仮定より $S_i - S_{i-1} \ni v$ で，$v \equiv ve \pmod{S_{i-1}}$ となるものがある．このとき $W = veA$ とおけば，$\mathrm{hd}(W) \simeq \bar{e}\bar{A}$で，$WJ^i = 0$, $veJ^{i-1} \neq 0$ であるから，W の Loewy 列の長さは i である．

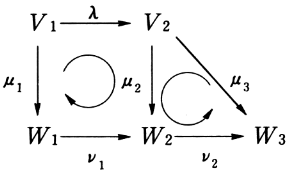
(2) ⇒ (1)．$WJ^i = 0$ より $W \subset S_i$．また $(W + S_{i-1})/S_{i-1} \simeq W/W \cap S_{i-1} = W/S_{i-1}(W) = \mathrm{hd}(W) \simeq \bar{e}\bar{A}$ であるから，$\bar{e}\bar{A}$ は S_i/S_{i-1} のある既約因子に同型である．□

V_A の Loewy 列に現れる完全可約加群がすべて既約なとき，V は **単列加群** であるという．

問 8.22 V_A が単列加群であることと，V_A がただ一つの組成列をもつことは同値である．またこのとき V の Loewy 列と台列は一致する．

§9. Hom と ⊗

A は環とする．例えば右の図で V_i, W_j は A-加群で，各矢印は A-準同型を表しているとき，これを A-加群のカテゴリーにおける図形，あるいは簡単に A-加群の図形とよぶ．またある図形において，一つの加群から他の加群に至る矢印の列があるとき，それらの合成写像が列のとり方によらずつねに一定であるとき，この図形は **可換** であるという．例えば上の図形が可換であるとは $\mu_2 \circ \lambda = \nu_1 \circ \mu_1$, $\nu_2 \circ \mu_2 = \mu_3$ が成り立つことに他ならない．このとき上の図のように↻または↺を書き入れて表すことにする．



9.1 $\mathrm{Hom}_A(V, W)$

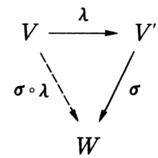
A-加群 V から W への A-準同型全体のつくる加群 $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ の性質についてのべる．まず次のことは明らかである．

定理 9.1 $V, W, \cdots$ 等はすべて A-加群とする．

(i) A-準同型 $\lambda: V \to V'$ に対し，準同型

$\lambda^*: \mathrm{Hom}_A(V', W) \to \mathrm{Hom}_A(V, W) \qquad (\sigma \mapsto \sigma \circ \lambda)$

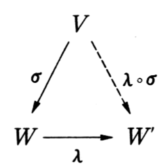
がえられる．また $\mu: V' \to V''$ が A-準同型ならば $(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*$ となる．



(ii) A-準同型 $\lambda: W \to W'$ に対し準同型

$\lambda_*: \mathrm{Hom}_A(V, W) \to \mathrm{Hom}_A(V, W') \qquad (\sigma \mapsto \lambda \circ \sigma)$

がえられる．また $\mu: W' \to W''$ が A-準同型ならば $(\mu \circ \lambda)_* = \mu_* \circ \lambda_*$ となる．



A-加群の系列

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\lambda_{i-2}} V_{i-1} \xrightarrow{\lambda_{i-1}} V_i \xrightarrow{\lambda_i} V_{i+1} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} \cdots\cdots$$

において $\mathrm{Im}\,\lambda_{i-1} = \mathrm{Ker}\,\lambda_i$ がすべての i について成り立っているとき，これ

は **完全系列** であるという．特に

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\mu} V'' \longrightarrow 0$$

が完全系列であるとき，これを **短完全系列** とよぶ．このとき λ は単準同型，μ は全準同型であるから

$$V' \simeq \lambda(V'), \qquad V/\lambda(V') \simeq V''$$

となる．

単準同型 $\lambda: V' \to V$ に対し，$\lambda(V')$ が V の直和因子であるとき λ は **分裂する** という．また全準同型 $\mu: V \to V''$ は $\operatorname{Ker}\mu$ が V の直和因子であるとき **分裂する** という．

補題 9.2　準同型 $\lambda: V \to W$ に対し，準同型 $\mu: W \to V$ で $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}_W$ となるものがあれば次が成り立つ：

$$V = \operatorname{Ker}\lambda \oplus \mu(W), \qquad \mu(W) \simeq W.$$

［**証明**］　$V \ni v$ に対し $\lambda(v - \mu(\lambda(v))) = \lambda(v) - \lambda\circ\mu\circ\lambda(v) = 0$ となるから，$v - \mu(\lambda(v)) \in \operatorname{Ker}\lambda$，よって $V = \operatorname{Ker}\lambda + \mu(W)$ である．また $\operatorname{Ker}\lambda \cap \mu(W) \ni v$ とすれば $v = \mu(w)$ となる $w \in W$ があり，$0 = \lambda(v) = \lambda\circ\mu(w) = w$，したがって $v = 0$ となる．よって $\operatorname{Ker}\lambda \cap \mu(W) = 0$ で補題の直和分解がえられる．μ は単射であるから $\mu(W) \simeq W$ は明らかである．□

定理 9.3　(i)　単準同型 $\lambda: V' \to V$ に対し次の 2 条件は同値である．

(1)　λ は分裂する．

(2)　準同型 $\lambda': V \to V'$ があって $\lambda'\circ\lambda = \mathrm{id}_{V'}$ となる．

(ii)　全準同型 $\mu: V \to V''$ に対し次の 2 条件は同値である．

(3)　μ は分裂する．

(4)　準同型 $\mu': V'' \to V$ があって $\mu\circ\mu' = \mathrm{id}_{V''}$ となる．

［**証明**］　(i)　(1) ⇒ (2)．$V = \lambda(V') \oplus W$ とするとき，$V \ni v$ に対し $v = \lambda(v') + w$ となる $v' \in V'$, $w \in W$ が一意的に定まる．このとき $\lambda'(v) = v'$ と λ' を定義すればよい．

(2) ⇒ (1)．補題 9.2 より明らかである．

(ii)　(3) ⇒ (4)．$V = \operatorname{Ker}\mu \oplus W$ とすれば $\mu|_W: W \to V''$ は同型であるから，μ'

$= (\mu|_W)^{-1}$ とおけばよい.

(4) ⇒ (3). 補題 9.2 より明らかである. □

完全系列

$$(9.1) \qquad 0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\mu} V'' \longrightarrow 0$$

においては, 定義から λ が分裂することと μ が分裂することは同値である. このとき完全系列 (9.1) は分裂するという.

次の性質は Hom_A の **左完全性** とよばれる.

定理 9.4 次の二つは A-加群の完全系列とする.

$$(9.2) \qquad V' \xrightarrow{\lambda_1} V \xrightarrow{\lambda_2} V'' \longrightarrow 0,$$

$$(9.3) \qquad 0 \longrightarrow W' \xrightarrow{\mu_1} W \xrightarrow{\mu_2} W''.$$

このとき次のそれぞれは完全系列である.

$$(9.4) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V'', W) \xrightarrow{\lambda_2^*} \mathrm{Hom}_A(V, W) \xrightarrow{\lambda_1^*} \mathrm{Hom}_A(V', W),$$

$$(9.5) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, W') \xrightarrow{(\mu_1)_*} \mathrm{Hom}_A(V, W) \xrightarrow{(\mu_2)_*} \mathrm{Hom}_A(V, W'').$$

[**証 明**] (9.4) の完全性を示す. $\mathrm{Hom}_A(V'', W) \ni \sigma$ に対し $\lambda_2^*(\sigma) = \sigma \circ \lambda_2 = 0$ とすれば, $\sigma(\lambda_2(V)) = \sigma(V'') = 0$ となるから $\sigma = 0$, したがって最初の三つの加群からなる系列は完全である. よって $\mathrm{Im}\, \lambda_2^* = \mathrm{Ker}\, \lambda_1^*$ を示せばよい. $\lambda_1^* \circ \lambda_2^* = (\lambda_2 \circ \lambda_1)^* = 0$ であるから $\mathrm{Im}\, \lambda_2^* \subset \mathrm{Ker}\, \lambda_1^*$ は明らかである. 次に $\mathrm{Ker}\, \lambda_1^* \ni \sigma : V \to W$ とすれば, $\sigma \circ \lambda_1 = 0$ より $\lambda_1(V') = \mathrm{Ker}\, \lambda_2 \subset \mathrm{Ker}\, \sigma$ である. よって $V'' \ni v''$ に対し $\lambda_2(v) = v''$ となる $v \in V$ をとれば, $\sigma(v)$ は v のとり方によらず v'' だけで定まる. このとき $\tau(v'') = \sigma(v)$ とおけば準同型 $\tau : V'' \to W$ がえられ, $\lambda_2^*(\tau) = \tau \circ \lambda_2 = \sigma$ となる. □

問 9.5 (i) (9.5) が完全系列であることを示せ.

(ii) (9.2) において λ_2 が分裂すれば, (9.4) で λ_2^* も分裂する.

(iii) (9.3) において μ_1 が分裂すれば, (9.5) で $(\mu_1)_*$ も分裂する.

定理 9.6 A-加群の直和, 直積と Hom_A について次が成り立つ.

(i) $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i \in I} V_i, W) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(V_i, W)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_A(V, \prod_{i \in I} W_i) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(V, W_i)$.

［**証明**］ (i) $\iota_i : V_i \to \bigoplus_i V_i$ を埋め込みとし，A-準同型 $\lambda : \bigoplus_i V_i \to W$ に対し $\lambda_i = \lambda \circ \iota_i$ とおけば，写像 $\lambda \mapsto (\lambda_i)_i$ は左辺から右辺への同型を与える．

(ii) $\pi_i : \prod_i W_i \to W_i$ を射影とし，A-準同型 $\mu : V \to \prod_i W_i$ に対し $\mu_i = \pi_i \circ \mu$ とおけば，写像 $\mu \mapsto (\mu_i)_i$ は同型を与える．□

注意 I が有限集合のときは，上の定理で $\prod_{i \in I}$ を普通 $\bigoplus_{i \in I}$ とおきかえる．

A, B を二つの環とするとき，$\mathrm{Hom}_A({}_B V_A, W_A)$ は右 B-加群である．実際 $\mathrm{Hom}_A({}_B V_A, W_A) \ni \sigma$，$B \ni b$ に対し σb を $\sigma b(v) = \sigma(bv)$ $(v \in V)$ と定義すればよい．同様に $\mathrm{Hom}_A(V_A, {}_B W_A)$ は $b\sigma$ を $b\sigma(v) = b(\sigma(v))$ と定義して左 B-加群になる．

例えば $\mathrm{Hom}_A(A_A, V_A)$ は（右）A-加群で，$\varphi : \mathrm{Hom}_A(A, V) \to V$ $(f \mapsto f(1_A))$ は A-同型である．

9.2 $V \otimes_A W$

$V_A, {}_A W$ が与えられているとし，直積集合 $V \times W = \{(v, w) ; v \in V, w \in W\}$ を基とする $\boldsymbol{Z}$-自由加群を F とする：$F = \bigoplus_{v \in V, w \in W} \boldsymbol{Z}(v, w)$．また F において次の形の元の全体で生成される部分加群を I とする：

$$(9.6)\qquad \begin{cases} (v + v', w) - (v, w) - (v', w), \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \\ (va, w) - (v, aw) \qquad (a \in A). \end{cases}$$

このとき剰余加群 F/I を V と W の A 上の**テンサー積**とよび $V \otimes_A W$ と表す．

自然な準同型 $\varphi_0 : F \to F/I = V \otimes_A W$ による (v, w) の像を $v \otimes w$ と表せば，次が成り立つことは定義から明らかである．

$$\begin{cases} (v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, \\ v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w', \\ (va) \otimes w = v \otimes (aw) \qquad (a \in A). \end{cases}$$

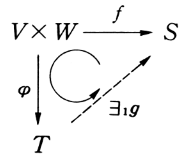
また $V \otimes_A W$ は $\{v \otimes w ; v \in V, w \in W\}$ で生成され，したがってその元 x

は $x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$ と表される．ただしこの表示は一般に一意的でない．

V_A, ${}_AW$ と ${}_{\mathbf{Z}}T$ に対し写像 $\varphi: V \times W \to T$ が次の 3 条件をみたすとき，φ は $(A\text{-})$ **双線形** であるという．

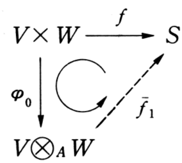
$$\begin{cases} \varphi(v+v', w) = \varphi(v, w) + \varphi(v', w), \\ \varphi(v, w+w') = \varphi(v, w) + \varphi(v, w'), \\ \varphi(va, w) = \varphi(v, aw) \qquad (a \in A). \end{cases}$$

またこのような (T, φ) が (V_A, ${}_AW$ に対して) **普遍性** をもつとは，次が成り立つことを意味するものとする：



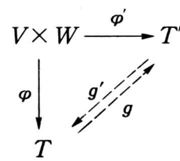
任意の ${}_{\mathbf{Z}}S$ と双線形写像 $f: V \times W \to S$ に対して，準同型 $g: T \to S$ で $g \circ \varphi = f$ となるものが唯一つ存在する．

定理 9.7　V_A, ${}_AW$ に対して $\varphi_0: V \times W \to V \otimes_A W$ を $\varphi_0(v, w) = v \otimes w$ と定義すれば，$(V \otimes_A W, \varphi_0)$ は普遍性をもつ．

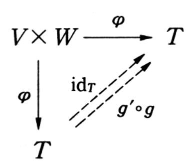


［**証 明**］　F, I は前と同じとし，$f: V \times W \to S$ を双線形写像とすれば，f は自然に準同型 $f_1: F \to S$ に拡張できる．このとき f の双線形性より $f_1(I) = 0$ となり，f_1 は準同型 $\bar{f}_1: F/I = V \otimes_A W \to S$ $(v \otimes w \mapsto f(v, w))$ を引き起して $\bar{f}_1 \circ \varphi_0 = f$ となる．一意性は $V \otimes_A W$ が $\varphi_0(V \times W) = \{v \otimes w\, ;\, v \in V,\ w \in W\}$ で生成されることより明らかである．□

定 理 9.8　V_A, ${}_AW$ に対して (T, φ), (T', φ') がともに普遍性をもてば，同型 $g: T \stackrel{\sim}{\to} T'$ で $g \circ \varphi = \varphi'$ となるものが唯一つ存在する．



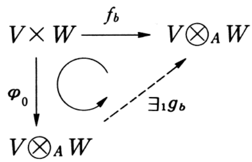
［**証 明**］　(T, φ) の普遍性より準同型 $g: T \to T'$ で $g \circ \varphi = \varphi'$ となるものが唯一つ存在する．同様に (T', φ') の普遍性より準同型 $g': T' \to T$ で $g' \circ \varphi' = \varphi$ となるものがある．



このとき $(g' \circ g) \circ \varphi = g' \circ \varphi' = \varphi$ となるが，一方

$\mathrm{id}_T \circ \varphi = \varphi$ であるから普遍性の定義における一意性より $g' \circ g = \mathrm{id}_T$ をえる．同様にして $g \circ g' = \mathrm{id}_{T'}$ となるから g は同型で $g' = g^{-1}$ となる．□

上の二つの定理により $V \otimes_A W$ はその普遍性で特徴づけられ，このことがテンサー積の性質を調べる上で有効である．



例えば，A, B を二つの環とするとき，V_A，${}_A W_B$ に対し $V \otimes_A W$ は次のようにして右 B-加群になる．すなわち $B \ni b$ に対して $f_b: V \times W \to V \otimes_A W$ $((v, w) \mapsto v \otimes (wb))$ は双線形写像であるから，準同型 $g_b: V \otimes_A W \to V \otimes_A W$ で $g_b(v \otimes w) = v \otimes (wb)$ となるものが存在し，これで b の作用を定義すれば $V \otimes_A W$ は右 B-加群になる．

同様に ${}_B V_A$, ${}_A W$ に対し $V \otimes_A W$ は左 B-加群である．

定理 9.9 V_A, ${}_A W$ に対し次の A-同型が成り立つ．

(i) $V \otimes_A A \simeq V \quad (v \otimes a \mapsto va)$.

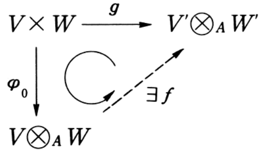
(ii) $A \otimes_A W \simeq W \quad (a \otimes w \mapsto aw)$.

［**証明**］ (i) $f: V \times A \to V$ $((v, a) \mapsto va)$ は双線形であるから，定理 9.7 より準同型 $g: V \otimes_A A \to V$ で $g(v \otimes a) = va$ となるものがあり，これは明らかに A-全準同型である．一方 $h: V \to V \otimes_A A$ $(v \mapsto v \otimes 1)$ も A-準同型で $h \circ g = \mathrm{id}_{V \otimes A}$, $g \circ h = \mathrm{id}_V$ となるから g は A-同型で $h = g^{-1}$ となる．

(ii) も上と同様に示される．□

定理 9.10 $\lambda: V_A \to V'_A$, $\mu: {}_A W \to {}_A W'$ がともに A-準同型であるとき，準同型 $f: V \otimes_A W \to V' \otimes_A W'$ で $f(v \otimes w) = \lambda(v) \otimes \mu(w)$ となるものが唯一つ存在する．

［**証明**］ 右の図で $\varphi_0(v, w) = v \otimes w$, $g(v, w) = \lambda(v) \otimes \mu(w)$ とすれば，g は双線形であるから，定理 9.7 より上の主張がえられる．□



上の定理の準同型 f を $\lambda \otimes \mu$ とかく．

問 9.11 A-加群の系列 $V_A \xrightarrow{\lambda} V'_A \xrightarrow{\lambda'} V''_A$ と ${}_AW \xrightarrow{\mu} {}_AW' \xrightarrow{\mu'} {}_AW''$ に対して次が成り立つ：

$$(\lambda' \otimes \mu') \circ (\lambda \otimes \mu) = (\lambda' \circ \lambda) \otimes (\mu' \circ \mu).$$

次の性質は普通 $\otimes_A$ の**右完全性**とよばれる．

定理 9.12 次の二つは A-加群の完全系列とする：

(9.7) $$V'_A \xrightarrow{\lambda_1} V_A \xrightarrow{\lambda_2} V''_A \longrightarrow 0,$$

(9.8) $${}_AW' \xrightarrow{\mu_1} {}_AW \xrightarrow{\mu_2} {}_AW'' \longrightarrow 0.$$

このとき次のそれぞれはまた完全系列である．

(9.9) $$V' \otimes_A W \xrightarrow{\lambda_1 \otimes \mathrm{id}_W} V \otimes_A W \xrightarrow{\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W} V'' \otimes_A W \longrightarrow 0,$$

(9.10) $$V \otimes_A W' \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mu_1} V \otimes_A W \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mu_2} V \otimes_A W'' \longrightarrow 0.$$

［**証 明**］ (9.9) の完全性を示す．まず λ_2 は全射であるから $\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W$ も全射である．また $(\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\lambda_1 \otimes \mathrm{id}_W) = (\lambda_2 \circ \lambda_1) \otimes \mathrm{id}_W = 0$ であるから $\mathrm{Im}\,(\lambda_1 \otimes \mathrm{id}_W) \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W)$ である．よって $\overline{V \otimes_A W} = V \otimes_A W / \mathrm{Im}\,(\lambda_1 \otimes \mathrm{id}_W)$ とおけば，準同型 $\overline{\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W} : \overline{V \otimes_A W} \to V'' \otimes_A W$ $(\overline{v \otimes w} \mapsto \lambda_2(v) \otimes w)$ が引き起されるが，これが単準同型であることを示せばよい．

そのため $f: V'' \times W \to \overline{V \otimes_A W}$ を次のように定義する．すなわち $v'' \in V''$ に対し $\lambda_2(v) = v''$ となる $v \in V$ をとり，$f(v'', w) = \overline{v \otimes w}$ と定める．これは v のとり方によらない．実際 $\lambda_2(v_1) = v''$ とすれば $\lambda_2(v_1 - v) = 0$ であるから，$v_1 - v = \lambda_1(v')$ となる $v' \in V'$ があり，$v_1 \otimes w - v \otimes w = \lambda_1(v') \otimes w \in \mathrm{Im}\,(\lambda_1 \otimes \mathrm{id}_W)$ となる．また f が双線形であることも容易に確かめられるから，準同型 $g: V'' \otimes_A W \to \overline{V \otimes_A W}$ で $g(v'' \otimes w) = f(v'', w) = \overline{v \otimes w}$ (ただし $\lambda_2(v) = v''$) となるものがある．このとき $g \circ \overline{\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W}\,\overline{(v \otimes w)} = g(\lambda_2(v) \otimes w) = \overline{v \otimes w}$ となるから $\overline{\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W}$ は単準同型である．

(9.10) の完全性も同様に示される．□

問 9.13 (9.7) において λ_2 が分裂すれば，(9.9) で $\lambda_2 \otimes \mathrm{id}_W$ も分裂する．また μ_2 と $\mathrm{id}_V \otimes \mu_2$ についても同様である．

定理 9.14 V_A と ${}_AW_i$ $(i \in I)$ に対し次が成り立つ：

$$V \otimes_A \left(\bigoplus_{i \in I} W_i\right) \simeq \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_A W_i).$$

［証明］　$\varphi: V\times(\oplus_i W_i)\to\oplus_i(V\otimes_A W_i)$ $((v,\sum_i w_i)\mapsto\sum_i v\otimes w_i)$ は双線形であるから，準同型 $\tilde{\varphi}: V\otimes_A(\oplus_i W_i)\to\oplus_i(V\otimes_A W_i)$ で $\tilde{\varphi}(v\otimes(\sum_i w_i))=\sum_i v\otimes w_i$ となるものがある．一方 $\iota_j: W_j\to\oplus_i W_i$ を埋め込みとすれば，$\psi=\oplus_i(\mathrm{id}_V\otimes\iota_i):\oplus_i(V\otimes_A W_i)\to V\otimes_A(\oplus_i W_i)$ は $\tilde{\varphi}$ の逆写像となり，したがって $\tilde{\varphi}$ は同型である．□

上で V_A が直和に分解されているときも同様の定理が成り立つ．

上の定理の応用として次がえられる．

定理 9.15　(i)　$W=\oplus_{i\in I}Aw_i$ は左 A-自由加群とする．このとき V_A に対し，$V\otimes_A W$ の元 u は $u=\sum_i v_i\otimes w_i$ $(v_i\in V)$ と一意的に表される．すなわち $\{v\otimes w_i\,|\,v\in V\}=V\otimes w_i$ とおけば，次が成り立つ：

$$V\otimes_A W=\bigoplus_{i\in I}V\otimes w_i.$$

(ii)　R は可換環とし，$V=\oplus_{i\in I}Rv_i$，$W=\oplus_{j\in J}Rw_j$ はともに R-自由加群とすれば

$$V\otimes_R W=\bigoplus_{i,j}R(v_i\otimes w_j)$$

となり，これも R-自由加群である．

［証明］　(i)　$V\otimes_A W=\oplus_i(V\otimes_A Aw_i)$．ここで $V\otimes_A Aw_i=V\otimes w_i$ であるが，${}_AA\simeq{}_A(Aw_i)$ であるから $\varphi_i: V=V\otimes_A A\to V\otimes w_i$ $(v\mapsto v\otimes w_i)$ は同型で (i) の主張が成り立つ．

(ii)　$V\otimes_R W=\oplus_{i,j}(Rv_i)\otimes_R(Rw_j)=\oplus_{i,j}(Rv_i)\otimes w_j$．ここで $(Rv_i)\otimes w_j=R(v_i\otimes w_j)$ で，これは R に R-同型である．□

三つ以上の加群のテンサー積も二つの場合と同様に定義される．例えば A, B は環とし，$U_A, {}_AV_B, {}_BW$ が与えられたとき，$U\times V\times W$ を基とする $\boldsymbol{Z}$-自由加群を F とする．また F において次の形の元：$(u+u',v,w)-(u,v,w)-(u',v,w)$，$(u,v+v',w)-(u,v,w)-(u,v',w)$，$(u,v,w+w')-(u,v,w)-(u,v,w')$，$(ua,v,w)-(u,av,w)$ $(a\in A)$，$(u,vb,w)-(u,v,bw)$ $(b\in B)$ で生成される部分加群を I とするとき，F/I を $U\otimes_A V\otimes_B W$ とかき，これをU, V, W のテンサー積とよぶ．また (u,v,w) を含む I の剰余類を $u\otimes v\otimes w$ とかく．

二つの加群の場合と同様にテンサー積 $U\otimes_A V\otimes_B W$ はその普遍性で特徴づけられる.

問 9.16 (i) $U\otimes_A V\otimes_B W$ の普遍性をのべよ.

(ii) $(U\otimes_A V)\otimes_B W\simeq U\otimes_A(V\otimes_B W)\simeq U\otimes_A V\otimes_B W$ を示せ.

I は環 A のイデアルとし, $\bar{A}=A/I$ とおく. また V_A に対し $\bar{V}=V/VI$ とおくとき次が成り立つ.

定理 9.17 (i) V_A に対し次の A-同型が成り立つ:

$$V\otimes_A A/I\cong V/VI \qquad (v\otimes\bar{a}\mapsto\overline{va}).$$

(ii) $V_A, {}_AW$ に対し $VI=0$, $IW=0$ ならば, V, W はそれぞれ右, 左 $\bar{A}$-加群とみることができて, 次の同型が成り立つ:

$$V\otimes_A W\cong V\otimes_{\bar{A}} W \qquad (v\otimes w\mapsto v\otimes w).$$

[**証明**] (i) $V\ni v$, $\bar{A}\ni\bar{a}$ に対し $\overline{va}$ は剰余類 $\bar{a}$ の代表元 a のとり方によらず定まり, 写像 $\varphi: V\times\bar{A}\to\bar{V}$ $((v,\bar{a})\mapsto\overline{va})$ が定義される. これは双線形であるから準同型 $\tilde{\varphi}: V\otimes_A\bar{A}\to\bar{V}$ で $\tilde{\varphi}(v\otimes\bar{a})=\overline{va}$ となるものがあり, これは A-準同型である.

一方, 準同型 $\psi: \bar{V}\to V\otimes_A\bar{A}$ が $\psi(\bar{v})=v\otimes\bar{1}$ とおいて定義できる. 実際 $\bar{v}=\bar{v'}$ とすれば, $v'=v+\sum_i v_ix_i$ $(v_i\in V,\ x_i\in I)$ となり, $v'\otimes\bar{1}=v\otimes\bar{1}+\sum_i v_i\otimes\bar{x}_i=v\otimes\bar{1}$ となるから $\psi(\bar{v})$ は $\bar{v}$ の代表元のとり方によらず定まる.

このとき明らかに ψ は $\tilde{\varphi}$ の逆写像であるから $\tilde{\varphi}$ は A-同型である.

(ii) $V\ni v$, $\bar{A}\ni\bar{a}$ に対し $v\bar{a}=va$ と $\bar{a}$ の作用を定義すれば, これは $\bar{a}$ の代表元のとり方によらず定まり, この作用で V は右 $\bar{A}$-加群になる. W についても同様である. また

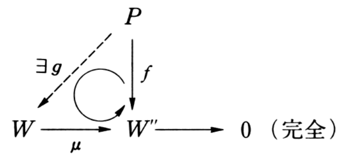
$$V\otimes_A W\simeq V\otimes_A(\bar{A}\otimes_{\bar{A}} W)\doteqdot(V\otimes_A\bar{A})\otimes_{\bar{A}} W$$

であるが, (i) より $V\otimes_A\bar{A}\simeq V/VI=V$ であるから (ii) が成り立つ. □

§10. 射影加群と入射加群

10.1 定義とSchanuelの補題

P は A-加群とする．いま右の図のように A-加群の完全系列 $W \xrightarrow{\mu} W''\longrightarrow 0$ と A-準同型 $f: P \to W''$ が任意に与えられたとき，A-準同型 $g: P\to W$ で $\mu\circ g = f$ となるものがつねに存在するならば P_A は**射影加群**，あるいは**射影的**であるという．



このことは A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{\lambda} W \xrightarrow{\mu} W'' \longrightarrow 0$$

に対し，次の系列がつねに完全系列であることに他ならない：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, W') \xrightarrow{\lambda_*} \mathrm{Hom}_A(P, W) \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_A(P, W'') \longrightarrow 0$$

例えば A-自由加群は射影的である．実際 $P = \bigoplus_{i\in I} x_iA$ が A-自由のとき，上の図形で $\mu^{-1}(f(x_i)) \ni w_i$ をとれば $g(x_i) = w_i$ となる A-準同型 $g: P\to W$ があり，$\mu\circ g = f$ となる．

このことより任意の A-加群 V はある射影加群 P の準同型像であることがわかる．またここで V_A が有限生成ならば P_Aも有限生成としてよい．

問 10.1 A-加群の直和 $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ について次が成り立つ．

$$P \text{ が射影的} \iff P_i\ (\forall i \in I) \text{ が射影的．}$$

定理 10.2 A-加群 P について次の 3 条件は同値である．

（1） P_A は射影的である．

（2） A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\mu} P \longrightarrow 0$$

はつねに分裂する．

（3） P_A はある A-自由加群の直和因子に同型である．

［**証明**］ (1) ⇒(2)．次ページの実線の図形において，A-準同型 $\mu': P\to V$ で $\mu\circ$

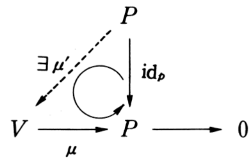
$\mu' = \mathrm{id}_P$ となるものがあり，したがって(2)の完全系列は分裂する．

(2)⇒(3)．P に対し A-自由加群 F と A-全準同型 $f: F \to P$ がある．このとき完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

は分裂するから，P は F の直和因子に同型である．

(3)⇒(1)．問 10.1 より明らかである．□



定理 10.3 P_A が射影的ならば左 A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow {}_AW' \xrightarrow{\lambda} {}_AW \xrightarrow{\mu} {}_AW'' \longrightarrow 0$$

に対し，次の系列も完全系列である：

$$0 \longrightarrow P \otimes_A W' \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes \lambda} P \otimes_A W \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes \mu} P \otimes_A W'' \longrightarrow 0$$

［**証明**］ $0 \to P \otimes_A W' \to P \otimes_A W$ の完全性を示せばよい．まず P は A-自由で $P = \bigoplus_{i \in I} x_i A$ とする．このとき $\mathrm{id}_P \otimes \lambda : P \otimes_A W' = \bigoplus_i x_i \otimes W' \to P \otimes_A W = \bigoplus_i x_i \otimes W$ は $\sum_i x_i \otimes w_i' \mapsto \sum_i x_i \otimes \lambda(w_i')$ なる写像であるから，定理 9.15 よりこれは単射である．

一般の射影加群 P については A-自由加群 F を適当にとって $F = P \oplus P'$ としてよい．このとき $F \otimes_A W' = (P \otimes_A W') \oplus (P' \otimes_A W')$ で $F \otimes_A W' \to F \otimes_A W$ は単射であるから $P \otimes_A W' \to P \otimes_A W$ も単射である．□

半単純なアルチン環は次のようにも特徴づけられる．

定理 10.4 環 A について次の 2 条件は同値である．

（1） A は半単純なアルチン環である．

（2） 任意の A-加群 V は射影的である．

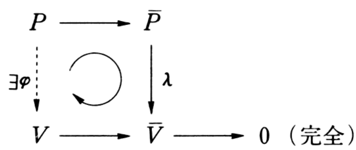
［**証明**］ (1) ⇒ (2)．既約な A-加群は A_A の直和因子で射影的である（定理 8.6）．また任意の V_A は完全可約であるから射影的である．

(2) ⇒ (1)．任意の V_A とその A-部分加群 W に対し，V/W は射影的であるから W_A は V_A の直和因子である．したがって，定理 7.1 より V_A は完全可約で，よって A は半単純なアルチン環である（定理 8.1）．□

I は環 A のイデアルとし，$\bar{A} = A/I$ とおく．このとき A-加群 V に対し $\bar{V} = V/VI$ は $\bar{A}$-加群である．また A-準同型 $\varphi : V \to W$ に対し $\bar{A}$-準同型 $\bar{\varphi}$:

$\bar{V} \to \bar{W}$ $(\bar{v} \mapsto \overline{\varphi(v)})$　が自然に定義される．

問 10.5　P は射影的な A-加群とする．このとき上の記号のもとで $\lambda : \bar{P} \to \bar{V}$ を $\bar{A}$-準同型とすれば，A-準同型 $\varphi : P \to V$ で $\bar{\varphi} = \lambda$ となるものが存在する．

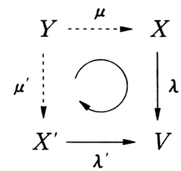


（ヒント：P の射影性より右の図形を可換にする φ がある．）

さて右の図のように A-加群 V, X, X' と A-準同型 λ, λ' が与えられたとき，$X \oplus X'$ において

$$Y = \{(x, x'); \lambda(x) = \lambda'(x')\}$$

は A-部分加群である．また A-準同型



$$\mu : Y \to X \quad ((x, x') \mapsto x),$$

$$\mu' : Y \to X' \quad ((x, x') \mapsto x')$$

を考えれば上の可換図形がえられる．この Y を (λ, λ') の**引き戻し**（pull-back）とよぶ．ここで λ, λ' がともに全準同型ならば μ, μ' も全準同型である．

次の定理は **Schanuel の補題** とよばれる．

定理 10.6　A-加群 V に対し，射影加群 P, P' と次のような二つの（A-加群の）完全系列

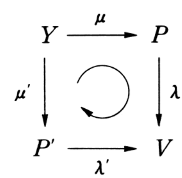
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\lambda} V \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \xrightarrow{\lambda'} V \longrightarrow 0$$

が与えられているとき，次の同型が成り立つ：

$$K' \oplus P \simeq K \oplus P'.$$

［**証明**］　$Y = \{(p, p') \in P \oplus P' ; \lambda(p) = \lambda'(p')\}$ を (λ, λ') の引き戻しとすれば右のような可換図形がえられ，μ，μ' はともに全準同型である．ここで



$$\mathrm{Ker}\,\mu = \{(0, p') ; \lambda'(p') = 0\} \simeq K',$$

$$\mathrm{Ker}\,\mu' = \{(p, 0) ; \lambda(p) = 0\} \simeq K$$

であるから，次のような二つの完全系列がえられる：

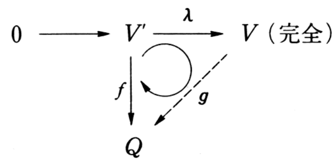
$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Y \xrightarrow{\mu} P \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Y \xrightarrow{\mu'} P' \longrightarrow 0.$$

このとき P, P' の射影性よりこれらはともに分裂し，次の同型が成り立つ：

$$K' \oplus P \simeq Y \simeq K \oplus P'. \ \Box$$

射影加群に（図形の矢印の向きを逆にするという意味で）双対な概念として入射加群がある．これについて定義と簡単な性質をのべておく．

A-加群 Q に対し，右の図の実線で示されるようなA-加群の図形があれば，A-準同型 $g: V \to Q$ で $g \circ \lambda = f$ をみたすものがつねに存在するとき，Q_A は **入射加群**，あるいは **入射的** であるという．このことは A-加群の短完全系列



$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

に対し，次の系列がつねに完全系列であることに他ならない：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V'', Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V', Q) \longrightarrow 0.$$

問 10.7　Q_A が入射的であるため必要十分な条件は，A-加群の完全系列　$0 \longrightarrow Q \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$　がつねに分裂することである．

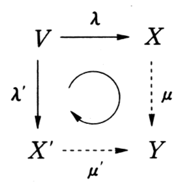
問 10.8　A-加群の直積 $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ について次が成り立つ．

$$Q \text{ が入射的} \Longleftrightarrow Q_i(\forall i \in I) \text{ が入射的.}$$

右の図のように A-加群 V, X, X' と A-準同型 λ, λ' が与えられたとき

$$Y = X \oplus X' / \{(\lambda(v), -\lambda'(v))\,;\, v \in V\}$$

とおく．このとき$X \oplus X' \ni (x, x')$ を含む剰余類を $\overline{(x, x')}$ $(\in Y)$ と表すことにすれば $\overline{(\lambda(v), 0)} = \overline{(0, \lambda'(v))}$ が成り立つ．したがって次の A-準同型



$$\mu : X \to Y\ (x \mapsto \overline{(x,0)}), \qquad \mu' : X' \to Y\ (x' \mapsto \overline{(0,x')})$$

を考えれば前ページのような可換図形がえられる．この Y を (λ, λ') の **押し出し** (push-out) とよぶ．ここで λ, λ' がともに単準同型ならば μ, μ' も単準同型である．

次は Schanuel の補題に双対な命題である．

問 10.9 A-加群 V に対し，入射加群 Q, Q' と次のような二つの（A-加群の）完全系列

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\lambda} Q \longrightarrow L \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\lambda'} Q' \longrightarrow L' \longrightarrow 0$$

が与えられているとき，次の同型が成り立つ：

$$Q \oplus L' \simeq Q' \oplus L.$$

10.2 射影被覆と入射包絡

問 10.10 A-加群と A-準同型について次が成り立つ．

(i) $f : U \to V$ が全準同型のとき，次の 2 条件は同値である．

(1) $X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} V$ で $f \circ g$ が全準同型ならば，つねに g も全準同型である．

(2) $W \subsetneqq U \Longrightarrow f(W) \subsetneqq V$.

(ii) $h : U \to V$ が単準同型のとき，次の 2 条件は同値である．

(1) $U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{k} Y$ で $k \circ h$ が単準同型ならば，つねに k も単準同型である．

(2) $0 \neq W \subset V \Longrightarrow h(U) \cap W \neq 0$.

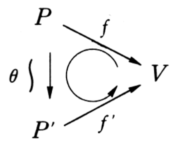
上の問の(i)あるいは(ii)の条件をみたす全準同型 f あるいは単準同型 h は **本質的** であるという．

A-加群 V に対して射影加群 P と本質的な全準同型 $f : P \to V$ が存在するとき，P あるいは $P \xrightarrow{f} V$ は V の **射影被覆** であるという．

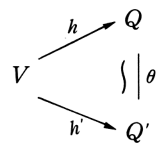
また V_A に対して入射加群 Q と本質的な単準同型 $g : V \to Q$ が存在するとき，Q あるいは $V \xrightarrow{g} Q$ は V の **入射包絡** であるという．

まず射影被覆の一意性を示そう．

定理 10.11　V_A の射影被覆が存在すれば，それは次の意味で一意的に定まる．すなわち $P \xrightarrow{f} V, P' \xrightarrow{f'} V$ がともに V の射影被覆ならば同型 $\theta: P \simeq P'$ で $f' \circ \theta = f$ となるものがある．



［**証明**］　P の射影性より準同型 $\theta: P \to P'$ で $f' \circ \theta = f$ となるものがあるが，f' は本質的であるからこのとき θ は全準同型である．また P' の射影性より $\varphi: P' \to P$ で $\theta \circ \varphi = \mathrm{id}_{P'}$ となるものがある．このとき $f \circ \varphi = f' \circ \theta \circ \varphi = f'$ となる．これは全準同型で f は本質的であるから φ は全準同型である．よって $\theta \circ \varphi = \mathrm{id}_{P'}$ より θ は単準同型である．□



問 10.12　V_A の二つの入射包絡 $V \xrightarrow{h} Q, V \xrightarrow{h'} Q'$ に対して，同型 $\theta: Q \simeq Q'$ で $\theta \circ h = h'$ となるものが存在する．

A-加群 V の射影被覆，入射包絡をそれぞれ $P(V)$，$I(V)$ と表すことにする．

次は東屋-中山の補題から容易に示される．

補題 10.13　全準同型 $f: U_A \to V_A$ において，U は A-有限生成で $\mathrm{Ker}\, f \subset UJ(A)$ ならば f は本質的である．

［**証明**］　$W \subset U$，$f(W) = V$ とすれば，$U = \mathrm{Ker}\, f + W = UJ(A) + W$　であるから $U = W$ をえる．□

上の補題から直ちに次がえられる．

定理 10.14　I は $J(A)$ に含まれる A のイデアルとし，P は A-有限生成な射影加群とする．このとき P は P/PI の射影被覆である．特に e が A のべき等元ならば，eA は eA/eI の射影被覆である．

環 A が次の 2 条件をみたすとき，A は**半完全環**であるという：

(10.1)　$\bar{A} = A/J(A)$ はアルチン環である．

(10.2)　$\bar{A}$の任意のべき等元は A のべき等元に持ち上げ可能である．

例えばアルチン環は半完全環である．

後で示すように加群の入射包絡はつねに存在する．一方，射影被覆は一般に存在するとは限らないが，半完全環については次が成り立つ．

定理 10.15　A は半完全環とし，$J = J(A)$，$\bar{A} = A/J$ とおく．このとき

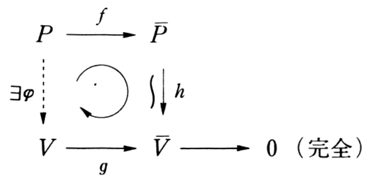
(i)　有限生成な A-加群 V はつねに A-有限生成な射影被覆 $P \to V$ をもち，$P/PJ \simeq V/VJ$ となる．

(ii)　$f: U \to V$ が全準同型で U が A-有限生成かつ射影的であるとき

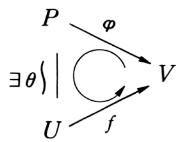
$$f \text{ が本質的} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f \subset UJ.$$

(iii)　有限生成な A-加群 V の射影被覆 $P(V)$ は $\bar{V} = V/VJ$ の射影被覆でもある．

[**証明**]　(i)　$\bar{V} = V/VJ$ は半単純なアルチン環 $\bar{A}$ 上の加群であるから完全可約で，$\{\bar{e}_i\bar{A}\}_{1 \le i \le k}$ を既約な $\bar{A}$-加群の同型類の完全代表系とするとき $\bar{V} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \bar{e}_i\bar{A}$ $(m_i \ge 0)$ となる．ここで (10.2) より $e_i \in \mathrm{pi}(A)$ としてよい．このとき $P = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i e_i A$ とおけば，これは有限生成な射影加群で $\bar{P} = P/PJ \simeq \bar{V}$ となる．右の図で f, g を自然な準同型とすれば，P の射影性より $\varphi: P \to V$ が存在して $g \circ \varphi = h \circ f$ となる．このとき　$g(\varphi(P)) = h(f(P)) = h(\bar{P}) = \bar{V}$　であるから，$V = \varphi(P) + \mathrm{Ker}\, g = \varphi(P) + VJ$，したがって東屋-中山の補題により $V = \varphi(P)$ となって φ は全準同型である．また　$\mathrm{Ker}\, \varphi \subset \mathrm{Ker}\, f = PJ$　であるから補題 10.13 より φ は本質的で，P は V の射影被覆である．



(ii)　(⇐) はすでに示したから，(⇒) を示すため $P \xrightarrow{\varphi} V$ を (i) のような V の射影被覆とする．f が本質的ならば U は V の射影被覆で，したがって同型 $\theta: P \simeq U$ が存在して $f \circ \theta = \varphi$ となる．このとき　$\mathrm{Ker}\, f = \theta(\mathrm{Ker}\, \varphi) \subset \theta(PJ) = UJ$　となる．



(iii)　$V, \bar{V}$ それぞれについて (i) で構成した射影被覆は一致する．□

補題 10.16 A-加群 $V_i\ (1 \leq i \leq n)$ に対し次が成り立つ．

(i) $P_i \xrightarrow{f_i} V_i$ が V_i の射影被覆ならば，$\bigoplus_{i=1}^n P_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n V_i$ の射影被覆である．

(ii) $V_i \xrightarrow{g_i} Q_i$ が V_i の入射包絡ならば，$\bigoplus_{i=1}^n Q_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n V_i$ の入射包絡である．

［**証明**］ $n = 2$ としてよい．$V = V_1 \oplus V_2$ とする．

(i) $f = (f_1, f_2) : P = P_1 \oplus P_2 \longrightarrow V$ が本質的であることを示せばよい．そのため $P \supset W$ に対し，$f(W) = V$ と仮定する．このとき $L_i = \mathrm{Ker}\, f_i$ とすれば $P = L_1 + L_2 + W$ である．これより $P_1 = L_1 + ((L_2 + W) \cap P_1)$ となるが，f_1 が本質的であることから $P_1 \subset L_2 + W$ となる．よって $P = L_2 + W$ をえる．したがって $P_2 = L_2 + (W \cap P_2)$ となるが，f_2 は本質的であるから，$P_2 \subset W$ をえる．すなわち $P = W$ である．

(ii) g_1, g_2 はともに埋め込みとしてよい．したがって任意の $v\,(\neq 0) \in Q_1 \oplus Q_2$ に対し，$vA \cap V \neq 0$ を示せばよい．$v = v_1 + v_2\ (v_i \in Q_i)$ と表すとき，$v_1 \neq 0$ ならば $v_1 a\,(\neq 0) \in V_1$ となる $a \in A$ がある．もし $v_2 a \in V_2$ ならば $va \in V$ である．$v_2 a \notin V_2$ ならば，$v_2 ab\,(\neq 0) \in V_2$ となる $b \in A$ がある．このとき $vab = v_1 ab + v_2 ab \in V$ である．□

10.3 Heller 作用素

A-加群 V の射影被覆 $P(V) \xrightarrow{f} V$ に対し $\mathrm{Ker}\, f$ を $\Omega(V)$ と表し，また V の入射包絡 $V \xrightarrow{g} I(V)$ に対し $\mathrm{Coker}\, g = I(V)/g(V)$ を $\Omega^{-1}(V)$ と表す．このとき二つの完全系列

$$0 \longrightarrow \Omega(V) \longrightarrow P(V) \longrightarrow V \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow I(V) \longrightarrow \Omega^{-1}(V) \longrightarrow 0$$

がえられ，$\Omega(V), \Omega^{-1}(V)$ は V によって（同型を度外視して）一意的に定まる．Ω, Ω^{-1} を **Heller 作用素** とよぶ．また $\Omega^0(V) = V$ とし，一般に $n > 0$ に対し Ω^n，Ω^{-n} を帰納的に

$$\Omega^n(V) = \Omega(\Omega^{n-1}(V)), \qquad \Omega^{-n}(V) = \Omega^{-1}(\Omega^{-(n-1)}(V))$$

と定義する．

注意 P_A が射影的ならば $P \xrightarrow{\mathrm{id}_P} P$ は P の射影被覆で，したがって $\Omega(P)=0$ である．同様に Q_A が入射的ならば $\Omega^{-1}(Q)=0$ である．

補題 10.16 より次がえられる．

定理 10.17 (i) $\Omega(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega(V_i)$

(ii) $\Omega^{-1}(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^{-1}(V_i)$.

定理 10.18 $P(V) \xrightarrow{f} V$ は A-加群 V の射影被覆とし，また A-加群 P は射影的で $g: P \to V$ は全準同型とする．このとき次をみたす A-加群 P' が存在する：

$$P \simeq P(V) \oplus P', \qquad \mathrm{Ker}\, g \simeq \Omega(V) \oplus P'.$$

［**証明**］ $K=\mathrm{Ker}\, g$ とおけば下の二つの完全系列がえられる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g} & V & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \vdots\,\lambda & & \wr\!\big\downarrow \mathrm{id}_V & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega(V) & \longrightarrow & P(V) & \xrightarrow[f]{} & V & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ここで P の射影性より $\lambda: P \to P(V)$ で $f \circ \lambda = g$ となるものがあり，f は本質的であるから λ は全準同型である．したがって $P(V)$ の射影性より $\mu: P(V) \to P$ で $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}_{P(V)}$ となるものがあり，$P=\mathrm{Ker}\,\lambda \oplus \mu(P(V))$, $\mu(P(V)) \simeq P(V)$ となる．よって $P'=\mathrm{Ker}\,\lambda$ とおけば $P \simeq P' \oplus P(V)$ である．また明らかに $P'=\mathrm{Ker}\,\lambda \subset K=\mathrm{Ker}\, g$ であるから $K=P' \oplus (K \cap \mu(P(V)))$ となり，$\Omega(V) \simeq K \cap \mu(P(V))$ を示せばよい．$P(V) \ni x$ に対し

$$\mu(x) \in K \Longleftrightarrow g \circ \mu(x)=0 \Longleftrightarrow f \circ \lambda \circ \mu(x)=f(x)=0 \Longleftrightarrow x \in \Omega(V)$$

で，μ は単準同型であるから $\Omega(V) \simeq K \cap \mu(P(V))$ をえる．□

注意 上の証明において Schanuel の補題から $P(V) \oplus K \simeq P \oplus \Omega(V) \simeq P(V) \oplus P' \oplus \Omega(V)$ となるから，ここに現れる加群について K-S-A 定理が成り立つ場合には，これから直ちに $K \simeq P' \oplus \Omega(V)$ が導かれる．

次は定理 10.18 に双対な命題である．

定理 10.19 $V \xrightarrow{f} I(V)$ は A-加群 V の入射包絡とし，また A-加群 Q は入射的で $g: V \to Q$ は単準同型とする．このとき次をみたす A-加群 Q' が

存在する：

$$Q \simeq I(V) \oplus Q', \qquad \mathrm{Coker}\, g \simeq \Omega^{-1}(V) \oplus Q'.$$

［証 明］ $L = \mathrm{Coker}\, g$ とおけば下の二つの完全系列がえられる．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f} & I(V) & \longrightarrow & \Omega^{-1}(V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\big\downarrow \mathrm{id}_V & & \vdots\,\lambda & & & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow[g]{} & Q & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ここで Q の入射性より $\lambda: I(V) \to Q$ で $\lambda \circ f = g$ となるものがあり，f は本質的であるから λ は単準同型である．したがって $I(V)$ の入射性より $\mu: Q \to I(V)$ で $\mu \circ \lambda = \mathrm{id}_{I(V)}$ となるものがあり，$Q = \mathrm{Ker}\,\mu \oplus \lambda(I(V))$, $\lambda(I(V)) \simeq I(V)$ となる．よって $\mathrm{Ker}\,\mu = Q'$ とおけば $Q \simeq I(V) \oplus Q'$ である．また $g(V) = \lambda(f(V)) \subset \lambda(I(V))$ であるから $L = Q/g(V) \simeq Q' \oplus (\lambda(I(V))/g(V))$ となるが，$\lambda: I(V) \xrightarrow{\sim} \lambda(I(V))$ において $f(V)$ には $g(V)$ が対応するから $\Omega^{-1}(V) = I(V)/f(V) \simeq \lambda(I(V))/g(V)$ となり $L \simeq Q' \oplus \Omega^{-1}(V)$ をえる．□

§11. 作用環の変更

11.1 Hom と ⊗ の結合関係

まず次の定理を示す．

定理 11.1 A, B は環とするとき $X_B, {}_BY_A, Z_A$ に対し次の同型が成り立つ：

(11.1) $$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_B Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A(Y, Z)).$$

［証 明］ A-準同型 $f: X \otimes_B Y \to Z$ と $x \in X$ に対し写像 $f_x: Y \to Z$ $(y \mapsto f(x \otimes y))$ が定まるが，これは A-準同型である．したがって写像 $\varphi(f): X \to \mathrm{Hom}_A(Y, Z)$ $(x \mapsto f_x)$ が定まり，これが B-準同型になることも容易にわかる．明らかに $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$ となるから，φ は (11.1) の左辺から右辺への準同型を与える．

次に $g: X \to \mathrm{Hom}_A(Y, Z)$ は B-準同型とする．このとき写像 $g': X \times Y \to Z$ $((x, y) \mapsto g(x)(y))$ が定義できるが，これは B-双線形である．したがって準同型 $\psi(g): X \otimes_B Y \to Z$ で $\psi(g)(x \otimes y) = g'(x, y) = g(x)(y)$ となるものが定まる．ここで $g(x)$ は A-準同型であるから $\psi(g)$ も A-準同型である．このようにして (11.1) の右辺から左辺への写像 ψ がきまるが，これが準同型であることは明らかである．

また $\psi\circ\varphi$, $\varphi\circ\psi$ はそれぞれ (11.1) の左辺, 右辺の上の恒等写像であるから, φ は同型で $\psi=\varphi^{-1}$ となる. □

次の系は次節で入射包絡の存在を示すとき必要である.

系 11.2 ${}_BX_A$ と Y_A に対し, ${}_BX$ が射影的で Y_A が入射的ならば (右) B-加群 $\mathrm{Hom}_A({}_BX_A, Y_A)$ は入射的である.

[**証明**] 完全系列 $0\longrightarrow V_B'\xrightarrow{\lambda}V_B$ が与えられたとき, ${}_BX$ の射影性から $0\longrightarrow V'\otimes_B X\xrightarrow{\mu}V\otimes_B X$ は完全系列で, 上の定理から次の可換図形がえられる:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_A(V\otimes_B X, Y) & \xrightarrow{\mu^*} & \mathrm{Hom}_A(V'\otimes_B X, Y) & \longrightarrow & 0\\
\wr\!\!\downarrow & & \wr\!\!\downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_B(V, \mathrm{Hom}_A(X, Y)) & \xrightarrow{\lambda^*} & \mathrm{Hom}_B(V', \mathrm{Hom}_A(X, Y)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ここで, Y_A の入射性から上段は完全系列で, したがって下段も完全系列となって $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ は B-入射的である. □

環準同型 $\varkappa: B\to A$ が与えられているとする. このとき A-加群 V_A に対し B の元 b の作用を $vb=v\varkappa(b)$ とおいて定義すれば, V は B-加群になる. 特に A 自身は A_B とも ${}_BA$ とも考えることができ, $B\ni b$ の作用はそれぞれ $ab=a\varkappa(b)$, $ba=\varkappa(b)a$ と定義される.

例えば B が A と単位元を共有する A の部分環であるとき, $\varkappa: B\to A$ を埋め込みとすれば, V_A に対して上で定義した V_B は作用域 A を B に制限したものに他ならない.

定理 11.1 から次の定理が導かれる.

定理 11.3 環準同型 $\varkappa: B\to A$ と V_A, W_B が与えられているとき次の同型が成り立つ.

(i) $\mathrm{Hom}_B(W, V_B)\simeq\mathrm{Hom}_A(W\otimes_B A, V)$

(ii) $\mathrm{Hom}_B(V_B, W)\simeq\mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_B(A_B, W))$.

[**証明**] (i) (11.1) において $X_B=W_B$, ${}_BY_A={}_BA_A$, $Z_A=V_A$ とおけば, $\mathrm{Hom}_A(A, V)\simeq V$ (B-同型) より (i) の同型がえられる.

(ii) (11.1) で A と B を入れかえて, $X_A = V_A$, ${}_AY_B = {}_AA_B$, $Z_B = W_B$ とおけば

$$\mathrm{Hom}_B(V \otimes_A A, W) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_B(A, W)).$$

ここで $V \otimes_A A \simeq V$ (B-同型) であるから (ii) が成り立つ. □

11.2 多元環のテンソル積と係数環の変更

R は可換環とする. R-多元環 A と A-加群 V に対し $R \ni r$ の V への作用を $rv = v(r1_A)$ と定義すれば, V は (R, A)-両側加群になる.

また $V_A, {}_AW$ に対し, $V \otimes_A W$ は V を ${}_RV_A$ とみて R-加群となり, r の作用は $r(v \otimes w) = (rv) \otimes w$ となる. これはまた $v \otimes (wr)$ に等しいから W を ${}_AW_R$ とみて $V \otimes_A W$ を R-加群と考えても同じである. 同様に V_A, W_A に対し $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は ${}_RV_A$ とみても ${}_RW_A$ とみても同じ R-加群としての作用が定義できて, $\mathrm{Hom}_A(V, W) \ni f$ に対し $(rf)(v) = f(rv) = rf(v)$ となる.

さて二つの R-多元環 A, B に対し, $A \otimes_R B$ は次のようにしてまた R-多元環になる. $A \otimes_R B$ は定義により $\boldsymbol{Z}$-自由加群 $F = \bigoplus_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \boldsymbol{Z}(a, b)$ を, 次の形の元 $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$, $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$, $(ra, b) - (a, rb)$ で生成される部分加群 I で分けた剰余加群 F/I であった. ここで F の基の元の積を $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ と定義し, これを線形に拡張することによって F は環になる. このとき I は F のイデアルで $F/I = A \otimes_R B$ は環になり, $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$ が成り立つ. $1_A \otimes 1_B$ はその単位元で, $A \otimes_R B$ は R-加群でもあるからこれは R-多元環である. $A \otimes_R B$ を二つの **R-多元環のテンソル積** とよぶ.

また V_A, W_B に対し $V \otimes_R W$ は次のようにして $A \otimes_R B$-加群になる. $A \times B \ni (a, b)$ に対し写像 $f(a, b): V \times W \to V \otimes_R W$ $((v, w) \mapsto (va) \otimes (wb))$ は R-双線形であるから準同型 $g(a, b): V \otimes_R W \to V \otimes_R W$ で $v \otimes w \mapsto (va) \otimes (wb)$ となるものがある. したがって写像 $g: A \times B \to \mathrm{End}(V \otimes_R W)$ が定義されるが, これはまた R-双線形であるから加群としての準同型 $h: A \otimes_R B \to \mathrm{End}(V \otimes_R W)$ で $h(a \otimes b): v \otimes w \to (va) \otimes (wb)$ となるものがある. h により $A \otimes_R B$ の $V \otimes_R W$ への作用を定義すれば $(v \otimes w)(a \otimes b) = (va) \otimes (wb)$

となり，この作用で $V\otimes_R W$ は $A\otimes_R B$-加群になる．

補題 11.4 R-多元環 A,B に対し次の（多元環としての）同型が成り立つ．

(i) $M_n(A)\otimes_R B\simeq M_n(A\otimes_R B)$.

(ii) $M_n(A)\otimes_R M_m(B)\simeq M_{nm}(A\otimes_R B)$.

[**証明**] (i) c_{ij} $(1\le i,\ j\le n)$ を $M_n(A)$ の行列単位とすれば $M_n(A)\otimes_R B\simeq\bigoplus_{i,j}(c_{ij}\otimes 1_B)(A\otimes_R B)$ となり，この右辺は $\{c_{ij}\otimes 1_B\}$ を行列単位とする $A\otimes_R B$ 上の全行列環とみなすことができる．

(ii) 左辺 $\simeq M_n(A\otimes_R M_m(B))\simeq M_n(M_m(A\otimes_R B))\simeq M_{nm}(A\otimes_R B)$. □

A,B は R-多元環とし，V,W はともに A-加群とする．このとき $B\times\mathrm{Hom}_A(V,W)\ni(b,f)$ に対し R-準同型

$$\alpha'(b,f):B\otimes_R V\to B\otimes_R W$$

で $c\otimes v\mapsto bc\otimes f(v)$ となるものが定まるが，これが $B\otimes_R A$-準同型であることは容易に確かめられる．ここで

$$\alpha':B\times\mathrm{Hom}_A(V,W)\to\mathrm{Hom}_{B\otimes_R A}(B\otimes_R V,\ B\otimes_R W)$$

は R-双線形であるから R-準同型

$$(11.2)\quad \alpha:B\otimes_R\mathrm{Hom}_A(V,W)\to\mathrm{Hom}_{B\otimes_R A}(B\otimes_R V,B\otimes_R W)$$

で $\alpha(b\otimes f)(c\otimes v)=bc\otimes f(v)$ となるものがある．この α がある条件のもとで同型であることを示すため少し準備をしておく．

A-加群 V に対し A-有限生成な A-自由加群 F_0,F_1 と完全系列

$$F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow V\longrightarrow 0$$

が存在するとき，V は A-**有限表示的**であるという．

問 11.5 A がネーター環のとき，A-有限生成な V_A は A-有限表示的である．

A-加群 V は左 A-加群の任意の完全系列

$$0\longrightarrow W'\xrightarrow{\lambda}W$$

に対し，次の系列

$$0\longrightarrow V\otimes_A W'\xrightarrow{\mathrm{id}_V\otimes\lambda}V\otimes_A W$$

がまた完全系列となるとき A-**平坦**であるという．

例えば V_A が射影的ならば A-平坦である（定理 10.3）.

問 11.6 加群に関する次の可換図形

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X'' & \quad (\text{完全}) \\ & \alpha\downarrow & & \alpha'\downarrow & & \alpha''\downarrow & \\ 0 \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y'' & \quad (\text{完全}) \end{array}$$

において

（i） α' が単準同型ならば α も単準同型である.

（ii） α', α'' がともに同型ならば α も同型である.

さて次が示したい定理である.

定理 11.7 A, B は R-多元環とし，V, W はともに A-加群とする．このとき B が R-平担で V が A-有限表示的ならば (11.2) の α は R-同型である：

$$\alpha : B \otimes \mathrm{Hom}_A(V, W) \simeq \mathrm{Hom}_{B\otimes A}(B \otimes V, B \otimes W).$$

（ただし $\otimes$ は $\otimes_R$ を略記したものである.）

［**証明**］ $V = A$ のときは上の両辺とも $B \otimes W$ に同型になって α が同型であることは容易にわかる．よって V が A-有限生成な A-自由加群ならば α は同型である.

仮定により A-有限生成な A-自由加群 F_0, F_1 と完全系列

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

がある．したがって完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F_0, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F_1, W)$$

がえられる．いま A-加群 X に対し $B \otimes X$ を X' と略記することにすれば，上の注意により次の同型

$$\alpha_i : B \otimes \mathrm{Hom}_A(F_i, W) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(F_i', W') \quad (i = 0, 1)$$

がえられ，B は R-平坦であるから次の可換図形

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & B \otimes \mathrm{Hom}_A(V, W) & \to & B \otimes \mathrm{Hom}_A(F_0, W) & \to & B \otimes \mathrm{Hom}_A(F_1, W) & \quad (\text{完全}) \\ & \alpha\downarrow & & \alpha_0\downarrow & & \alpha_1\downarrow & \\ 0 \to & \mathrm{Hom}_{A'}(V', W') & \to & \mathrm{Hom}_{A'}(F_0', W') & \to & \mathrm{Hom}_{A'}(F_1', W') & \quad (\text{完全}) \end{array}$$

がえられる．よって問 11.6 より α は同型である．□

われわれが必要なのは定理 11.7 において，R が単項イデアル整域で B が可換な R-多元環のときである．それについてのべるため準備をしておく．

まず単項イデアル整域上の加群と行列について，本書で必要な事柄をここでまとめておく．

一般に整域 R 上の加群 V の元 v に対し，$R \ni r \neq 0$ で $rv = 0$ となるものが存在するとき v は**トーション元**であるという．V のトーション元の全体を $T(V)$ と表せばこれは V の R-部分加群で，特に $T(V) = 0$ であるとき V は**トーションのない R-加群**であるという．

次の二つの定理の証明については永尾 [4] § 30 を参照されたい．

定理 11.8　R は単項イデアル整域とする．

(i)　F は階数 n の R-自由加群，$W \neq 0$ は F の R-部分加群とすれば，W は R-自由加群で $\mathrm{rank}_R\, W = r \leq n$ である．実際 F の基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を適当にとって $\{e_1v_1, \cdots, e_rv_r\}$ が W の基となるようにできる．ただし $e_i \in R$ で $(e_i) \supset (e_{i+1})$ をみたす $(1 \leq i \leq r-1)$．

特に $R = \boldsymbol{Z}$ のときは，$\mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}}\, W = n$ となることと $|F/W| < \infty$ となることは同値である．

(ii)　V_R が R-有限生成ならば V は有限個の R-巡回加群の直和に分解される：$V = Rv_1 \oplus Rv_2 \oplus \cdots \oplus Rv_n$.

(iii)　R-有限生成な V_R について次の 2 条件は同値である．

(1)　V は R-自由加群である．

(2)　V はトーションのない R-加群である．

定理 11.9　$C = (c_{ij})$ を単項イデアル整域 R 上の $m \times n$ 行列とするとき，$P \in GL_m(R)$，$Q \in GL_n(R)$ を適当にとれば

$$PCQ = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & e_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right), \qquad (e_i) \supset (e_{i+1}) \qquad (1 \leq i \leq r-1)$$

と変形できる．またこのとき R のイデアル $(e_1), \cdots, (e_r)$ は一意的に定まる．

上の定理のような $e_1, \cdots, e_r$ を行列 C の **単因子** という．

また次の定理が必要である．

定理 11.10 R は単項イデアル整域とするとき，トーションのない R-加群 V は R-平坦である．

実際 W を V の R-有限生成な部分加群とすれば，定理 11.8 (iii) より W は R-自由加群で，したがって R-平担である．よって次の補題から上の定理 11.10 は導かれる．

補題 11.11 A は環とし V は A-加群とする．このとき V の任意の A-有限生成な部分加群が A-平坦ならば V 自身 A-平坦である．

［**証明**］ $0 \longrightarrow {}_AW' \xrightarrow{\lambda} {}_AW$ を左 A-加群の完全系列とするとき， $0 \longrightarrow V \otimes_A W' \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \lambda} V \otimes_A W$ がまた完全系列になることを示せばよい．そのため $V \otimes_A W$ の定義にもどって $V \times W$ を基とする $\boldsymbol{Z}$-自由加群を $F(V)$ とし，$F(V)$ において (9.6) の形の元で生成される部分加群を $I(V)$ とすれば $V \otimes_A W = F(V)/I(V)$ である．

さて $V \otimes_A W' \ni u = \sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i'$ に対し $(\mathrm{id}_V \otimes \lambda)(u) = 0$ とすれば，$F(V)$ において $u_0 = \sum_{i=1}^r (v_i, \lambda(w_i')) \in I(V)$ であるから u_0 は (9.6) の形の有限個の元の和で表される．その表示に現れる V の元に $\{v_i\}_{1 \le i \le r}$ を加えた集合で生成される V の A-部分加群を V' とすれば，V' は A-有限生成である．$V' \otimes_A W$ において $u' = \sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i'$ とおけば，$F(V')$ において $\sum_{i=1}^r (v_i, \lambda(w_i')) \in I(V')$ となるから $(\mathrm{id}_{V'} \otimes \lambda)(u') = 0$ となり，仮定により $u' = 0$ をえる．一方 $\iota : V' \to V$ を埋め込みとすれば，準同型 $\iota \otimes \mathrm{id}_W : V' \otimes_A W \to V \otimes_A W$ による u' の像が u であるから $u = 0$ をえる．よって $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}_V \otimes \lambda) = 0$ である． □

さて一般に S が可換な R-多元環であるとき，R-多元環 A に対し $S \otimes_R A$ は (S を ${}_SS_R$ とみて) S-加群で，したがってこれは S 上の多元環である．これを A^S と表す．

特に R が S と単位元を共有する S の部分環であるとき，A^S は係数環 R を

S に拡張した多元環であるという．例えば A が R-自由で $A = \bigoplus_{i\in I} Rx_i$ とすれば，$A^S = \bigoplus_{i\in I} S(1_S \otimes x_i)$ となり，これは S-自由である．$1_S \otimes x_i$ を x_i と同一視すれば，$\{x_i\}_{i\in I}$ は A^S の S-基で $A \subset A^S$ と考えてよい．

以上の準備のもとで定理 11.7, 11.10 からⅣ章，§7 で必要な次の定理が導かれる．

定理 11.12 R は単項イデアル整域とし，S は可換なトーションのない R-多元環とする．このとき R-有限生成な R-多元環 A と A-加群 V, W に対し，V が A-有限生成ならば次の同型が成り立つ：

$$\alpha : S \otimes_R \mathrm{Hom}_A(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{A^S}(V^S, W^S).$$

(ただし $\alpha(s\otimes f)(t\otimes v) = st \otimes f(v)$.)

特に $V = W$ のときは S-多元環としての次の同型が成り立つ：

$$\mathrm{End}_A(V)^S \simeq \mathrm{End}_{A^S}(V^S).$$

注意 問 11.5 より V は A-有限表示的である．

§12. 入射包絡の存在

入射包絡の存在を示すため少し準備をしておく．

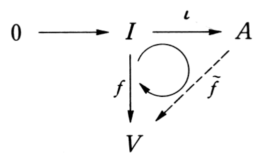
補題 12.1 環 A の右イデアル I から A-加群 V への A-準同型 $f : I \to V$ が A-準同型 $\tilde{f} : A \to V$ に拡張できるため必要十分な条件は，$V \ni v$ が存在して $f(x) = vx$ $(\forall x \in I)$ となることである．

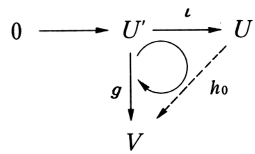
［**証明**］ f の拡張 $\tilde{f}$ が存在すれば $v = \tilde{f}(1)$ とおけばよい．逆に補題のような v があれば $\tilde{f}(a) = va$ $(\forall a \in A)$ とおいて $\tilde{f} : A \to V$ を定義すればよい． □

定理 12.2 (Baer) A-加群 V が入射的であるため必要十分な条件は，A の右イデアル I から V への A-準同型 $f : I \to V$ がつねに A-準同型 $\tilde{f} : A \to V$ に拡張できることである．

［**証明**］ 必要条件であることは次ページの上の図から明らかである．

十分条件であることをみるため，A-加群の完全系列 $0 \to U' \xrightarrow{i} U$ と A-準同型 g:





$U' \to V$ が与えられているとする．ここで簡単のため U' は U の A-部分加群で，ι は埋め込みであるとしてよい．このとき U' を含む U の A-部分加群 W と A-準同型 $h: W \to V$ で g の拡張になっているものの組 (W, h) の全体を Λ とする．明らかに $(U', g) \in \Lambda$ であるから $\Lambda \neq \phi$ である．また Λ における順序を

$$(W_1, h_1) \leq (W_2, h_2)$$
$$\Longleftrightarrow W_1 \subset W_2 \text{ かつ } h_2|_{W_1} = h_1$$

と定義すれば，Λ は帰納的な順序集合になる．よって Zorn の補題から Λ に極大元 (W_0, h_0) が存在する．$W_0 = U$ を示せばよい．よって $W_0 \subsetneqq U$ と仮定して矛盾を導く．そのため $U - W_0 \ni u$ を一つとり $W_1 = W_0 + uA$ とおく．$I = \{a \in A\,;\, ua \in W_0\}$ は A の右イデアルで，$f: I \to V$ $(x \mapsto h_0(ux))$ は A-準同型である．したがって仮定により $V \ni v$ が存在して $f(x) = h_0(ux) = vx$ $(\forall x \in I)$ となる．そこで $h_1: W_1 \to V$ を $W_1 \ni w_1 = w_0 + ua$ $(w_0 \in W_0, a \in A)$ に対し $h_1(w_1) = h_0(w_0) + va$ とおいて定義すれば，$h_1(w_1)$ は w_1 の表示の仕方によらず定まって h_1 は A-準同型になり，明らかに $h_1|_{W_0} = h_0$ である．よって $(W_0, h_0) \lneqq (W_1, h_1)$ となり (W_0, h_0) の極大性に反する．□

V は整域 R 上の加群とする．任意の $v \in V$ と $r(\neq 0) \in R$ に対し $ru = v$ となる $u \in V$ が存在するとき，すなわち $rV = V$ $(\forall r(\neq 0) \in R)$ がつねに成り立つとき，R-加群 V は **可除** であるという．

補題 12.3　整域 R 上の加群 V が入射的ならば V は可除である．また V がトーションのない R-加群のときはこの逆も成り立つ．

[**証明**]　V_R は入射的とする．このとき任意の $v \in V$ と $r(\neq 0) \in R$ に対し $f: rR \to V$ $(ra \mapsto va)$ は R-準同型で，したがって定理 12.2 により $u \in V$ が存在して $va = f(ra) = u(ra)$ $(\forall a \in R)$ となる．ここで $a = 1$ とおけば $v = ru$ となり V は可除である．

逆に V はトーションのない R-加群で可除であるとする．いま I は R のイデアルで $f: I \to V$ は R-準同型とするとき，可除性より $I \ni r \neq 0$ に対し $f(r) = v_r r$ とな

る $v_r \in V$ が存在し，V はトーションのない加群であるからこのような v_r は一意的に定まる．また I の 0 と異なる 2 元 r，s に対して $f(rs) = f(r)s = v_r rs$．一方 $f(rs) = f(sr) = f(s)r = v_s rs$ となり $v_r = v_s$ をえる．これを v とおけば $f(r) = vr$ $(\forall r \in I)$ となり，定理 12.2 より V_R は入射的である．□

定理 12.4 単項イデアル整域 R 上の加群 V が入射的であることと可除であることは同値である．

［証明］ V は可除であると仮定して入射的であることを示せばよい．そのため $I = aR$ は R のイデアル，$f: I \to V$ は R-準同型とする．このとき可除性より $f(a) = va$ となる $v \in V$ が存在し，$f(ar) = f(a)r = v(ar)$ となるから定理 12.2 より V_R は入射的である．□

補題 12.5 整域 R 上の加群 V に対し，V を含む可除な R-加群が存在する．

［証明］ R-自由加群 F とその R-部分加群 W を適当にとって $V \simeq F/W$ としてよい．K を R の商体とするとき，F は R-射影的であるから完全系列 $0 \to R \to K$ から $0 \to R \otimes_R F = F \to K \otimes_R F = F^K$ (完全) がえられ，$F \subset F^K$ と考えてよい．ここで F^K は R-加群として明らかに可除で，したがって F^K/W も可除となり，$V \simeq F/W \subset F^K/W$ であるから補題が成り立つ．□

以上の準備のもとで，まず任意の A-加群がある射影加群の準同型像になるという事柄に双対な次の定理が示される．

定理 12.6 任意の A-加群 V に対し，V を含む入射的 A-加群が存在する．

［証明］ 補題 12.5 より V を $\boldsymbol{Z}$-加群とみてこれを含む可除な $\boldsymbol{Z}$-加群 X があり，このとき X は $\boldsymbol{Z}$-入射的である．したがって ${}_AA$ の射影性と系 11.2 より $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}({}_AA, X)$ は入射的な A-加群である．完全系列 $0 \to V \to X$ から $0 \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, V) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, X)$ (完全) がえられ，$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, V) \subset \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, X)$ と考えてよい．また $V \simeq \mathrm{Hom}_A({}_AA, V) \subset \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, V)$ であるから V は $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, X)$ に同型な A-入射加群に含まれる．□

A-加群 V の A-部分加群 U は，V の任意の A-部分加群 $W \neq 0$ に対し $U \cap W \neq 0$ となるとき **本質的部分加群** であるといい，簡単のため $U \subset_e V$ と

表す．このことは埋め込み $U \to V$ が本質的であることに他ならない．またこのとき V は U の **本質的拡大** であるともいう．

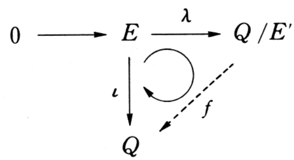
問 12.7 $U_1 \subset_e U_2 \subset_e V \Longrightarrow U_1 \subset_e V$.

さて次が目標とした定理である．

定理 12.8 (Eckman-Schopf) 任意の A-加群 V は入射包絡をもつ．

［**証明**］ V を含む入射的 A-加群を Q とする．このとき Q の A-部分加群で V の本質的拡大であるものの全体は包含関係に関して帰納的順序集合となり，Zorn の補題により極大なものがある．これを E とし，E が入射的であることを示せばよい．そのため E が Q の直和因子であることを示す．

Q の A-部分加群 W で $E \cap W = 0$ となるものの全体はやはり包含関係に関して帰納的で，Zorn の補題より極大なものがある．これを E' とするとき $Q = E \oplus E'$ となることが次のようにして示される．自然な同型 $E \cong E \oplus E'/E'$ からえられる単準同型を $\lambda: E \to Q/E'$ とすれば，Q の入射性より右の図形が可換となるような $f: Q/E' \to Q$ がある．(ただし ι は埋め込みとする．) また E' の極大性から $E \oplus E'/E' \subset_e Q/E'$ となり，単準同型 $E \xrightarrow{\lambda} Q/E'$ は本質的である．よって $f \circ \lambda = \iota$ より f は単準同型で，$V \subset_e E = f(E \oplus E'/E') \subset_e f(Q/E')$ であるから $V \subset_e f(Q/E')$ となり，E の極大性より $E = f(E \oplus E'/E') = f(Q/E')$ をえる．よって $E \oplus E' = Q$ である．□



§13. 離散付値環

13.1 離散付値

体 K に対し $K^\times = K - \{0\}$ 上で定義された実数値関数 $\nu: K^\times \to \boldsymbol{R}$ が次の条件

(13.1) $\qquad \nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,

(13.2) $\qquad \nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$

をみたすとき，ν を K の（指数）**付値**とよび，$\Gamma = \nu(K^\times)$ をその**値群**という．K の零元 0 に対しては $\nu(0) = \infty$ と定め，これはどの実数よりも大であるとする．(13.1) から ν は乗法群 $K^\times$ から実数全体のつくる加法群 $\boldsymbol{R}^+$ への準同型で，したがって Γ は $\boldsymbol{R}^+$ の部分加群である．付値 ν の与えられた体 K または (K, ν) を**付値体**という．

注意　上で定義した付値は，正確には**非 Archimedes 付値**とよばれるものである．

問 13.1　ν を体 K の付値とすれば，次が成り立つ．

(i)　$\nu(\pm 1) = 0$　　(ii)　$\nu(a) = \nu(-a)$　　(iii)　$\nu(a^{-1}) = -\nu(a)$

(iv)　$\nu(b) < \nu(a) \Longrightarrow \nu(a+b) = \nu(b)$.

ν を体 K の付値とするとき，$R = \{a \in K\,;\, \nu(a) \geq 0\}$ は K の部分環で，これを ν の**付値環**とよぶ．$R^{-1} = \{a^{-1}; R \ni a \neq 0\}$ とおけば $K = R \cup R^{-1}$ となり，特に K は R の商体である．R において $P = \{a \in K\,;\, \nu(a) > 0\}$ はイデアルで，これを ν の**付値イデアル**とよぶ．また R の正則元の全体は $R^\times = \{a \in K\,;\, \nu(a) = 0\}$ となり，これを ν の**単数群**という．付値イデアル P は R の非正則元の全体と一致するから，R は局所環で $J(R) = P$ となる．体 $R^* = R/P$ を ν の**剰余体**という．

K の付値 ν と正の実数 $\lambda > 0$ に対し，$K^\times$ 上の関数 ν' を

$$\nu'(a) = \lambda\nu(a) \qquad (a \in K^\times)$$

と定めれば，ν' はまた K の付値である．このような二つの付値 ν, ν' は**同値**であるといって $\nu \sim \nu'$ と表す．同値な付値の付値環，付値イデアル，単数群等は一致する．

K の付値 ν の値群が特に $\boldsymbol{Z}$ に一致するとき，ν あるいはそれに同値な付値を**離散付値**とよび，その付値環を**離散付値環**という．また $\nu(K^\times) = \boldsymbol{Z}$ となる付値を**正規離散付値**とよぶ．

離散付値環の性質をのべるため少し準備をしておく．

整域 S の部分環 R に対し，S の元 α が R 上**整**であるとは α が，最高次の係数が 1 である R 上のある多項式の根であることである．すなわち

(13.3) $$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$
となる $a_i \in R$ が存在することである.

補題 13.2 S の元 α が R 上整であることと, $R[\alpha] = \sum_{i=0}^{\infty} R\alpha^i$ を含む S の部分環 T で R-有限生成なものが存在することは同値である.

[証明] α が R 上整で (13.3) をみたすとすれば, $R[\alpha] = \sum_{i=0}^{n-1} R\alpha^i$ となる.

逆に T は $R[\alpha]$ を含む部分環で, $T = R\alpha_1 + \cdots + R\alpha_m$ とすれば, $\alpha\alpha_i \in T$ であるから
$$\alpha\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j \qquad (a_{ij} \in R)$$
と表され, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ は m 個の方程式からなる次の斉次連立一次方程式

(13.4) $$\sum_{j=1}^{m} (\alpha\delta_{ij} - a_{ij})\, x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$
の解である (ただし δ_{ij} は Kronecker の δ). したがって (13.4) は自明でない解をもち, その係数のつくる行列の行列式 $\det((\alpha\delta_{ij} - a_{ij})_{i,j})$ は 0 となるから, $\alpha^m + c_1\alpha^{m-1} + \cdots + c_m = 0$ ($c_i \in R$) なる等式が成り立つ. □

補題 13.3 R 上整である S の元の全体 T は, R を含む S の部分環である.

[証明] $S \ni \alpha, \beta$ は R 上整であるとし, $R[\alpha] = \sum_{i=0}^{m-1} R\alpha^i$, $R[\beta] = \sum_{j=0}^{n-1} R\beta^j$ とすれば, $R[\alpha, \beta] = \sum_{i,j} R\alpha^i\beta^j = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} R\alpha^i\beta^j$ となるから, これは R-有限生成な部分環である. $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta \in R[\alpha, \beta]$ であるからこれらは R 上整で, したがって T は部分環である. □

上の補題の部分環 T を R の S における **整閉包** とよび, $T = R$ であるとき R は S の中で **整閉** であるという.

問 13.4 $R \subset S$ とし, T を R の S における整閉包とすれば T は S の中で整閉である.

特に整域 R がその商体 K の中で整閉であるとき, すなわち R 上整な K の元は R の元に限るとき, R は単に **整閉** であるという.

定理 13.5 単項イデアル整域は整閉である.

[証明] R は単項イデアル整域, K はその商体とし, $K \ni \alpha$ は R 上整であるとする. R は一意分解環であるから $\alpha = b/a$, a と b はともに R の元で共通の素因子

をもたないとしてよい．ここで a は R の単元でないと仮定し

$$(b/a)^n + c_1(b/a)^{n-1} + \cdots\cdots + c_n = 0 \qquad (c_i \in R)$$

とすれば，この両辺に a^n をかけて

$$b^n + a(c_1 b^{n-1} + \cdots\cdots + c_n a^{n-1}) = 0$$

となる．よって p を a の一つの素因子とすると，これは b の素因子にもなって矛盾である．したがって a は単元で $\alpha \in R$ となる．□

さて離散付値環については次の定理が成り立つ．

定理 13.6　ν は体 K の正規離散付値とする．また R をその付値環，P を付値イデアルとする．このとき

(i)　$R \ni \pi$, $\nu(\pi) = 1$ とすれば，K の任意の元 α は $\alpha = \pi^i u$, $u \in R^\times$ と表され，このとき $\nu(\alpha) = i$ となる．(ここで $R^\times$ は R の単数群である．)

(ii)　R のイデアルは $R, P, P^2, \cdots, 0$ のいずれかに限る．また $P^i = (\pi^i)$ となり，したがって R は単項イデアル整域である．

(iii)　R は整閉である．

［**証明**］　(i)　$\nu(\alpha) = i$ ならば $\nu(\alpha\pi^{-i}) = 0$. したがって $u = \alpha\pi^{-i}$ とおけば $u \in R^\times$ である．

(ii)　$I \neq 0$ は R のイデアルであるとし，$\min\{\nu(a)\,;\, a \in I\} = i$ とおく．このとき (i) より $\pi^i \in I$ となる．$I \ni a \neq 0$, $\nu(a) = j$ とすれば $R^\times \ni u$ があって，$a = \pi^j u = \pi^i(\pi^{j-i}u) \in (\pi^i)$ となるから $I = (\pi^i)$ である．特に $P = (\pi)$, したがって $I = P^i$ となる．

(iii)　定理 13.5 と (ii) より明らかである．□

系 13.7　体 K の二つの離散付値 ν, ν' が同値であるため必要十分な条件は，それらの付値イデアルが一致することである．

［**証明**］　十分性を示せばよい．そのため ν, ν' の付値イデアルはともに P であるとする．このとき $R = K - P^{-1}$ (ただし $P^{-1} = \{\alpha^{-1}\,;\, P \ni \alpha \neq 0\}$) はこれらの付値環で，定理 13.6 より ν, ν' のそれぞれに同値な正規離散付値は R 上で一致するから K 上でも一致する．よって $\nu \sim \nu'$ である．□

離散付値環は環論的に次のように特徴づけられる．

定理 13.8 可換環 R について次の 2 条件は同値である．

（1） R は離散付値環である．

（2） R は単項イデアル整域で，かつ局所環である．

［**証明**］ (1) ⇒ (2) はすでに示したから (2) ⇒ (1) を示す．そのため $J(R)$ を P と表し，$P=(\pi)$ とする．このとき $\bigcap_{i=1}^{\infty}P^i=0$ となることが次のようにして示される．いま $\bigcap_{i=1}^{\infty}P^i \ni a \neq 0$ と仮定すれば，$a=\pi a_1=\pi^2 a_2=\cdots$ となる $R \ni a_1, a_2, \cdots$ があり，このとき $a_i=\pi a_{i+1}\,(\forall i)$ となるから $(a_1) \subsetneqq (a_2) \subsetneqq \cdots$ となって矛盾である．

さて $R \ni a \neq 0$ に対して $a \in P^i$，$a \notin P^{i+1}$ となる負でない整数 i がある．このとき $a=\pi^i u$ と表され，$u \in R-P=R^{\times}$ となる．ここで $\nu(a)=i$ と定め，また R の商体 K の元 $b/a \neq 0$ に対しては $\nu(b/a)=\nu(b)-\nu(a)$ と定めれば，$\nu: K^{\times} \to \boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{Z}$ を値群にもつ K の付値になることが容易に示される．□

13.2 デデキント環と $\mathfrak{p}$-進付値

R は整域とし，その商体を K とする．K の部分集合 $\mathfrak{a}$ が次の 2 条件をみたすとき，$\mathfrak{a}$ は **分数イデアル** であるという．

(13.5) $\mathfrak{a}$ は K の R- 部分加群である．すなわち $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}$，$a \in R$ ならば $\alpha \pm \beta$，$a\alpha \in \mathfrak{a}$ となる．

(13.6) $R \ni t \neq 0$ が存在して $t\mathfrak{a} \subset R$ となる．

特に $\mathfrak{a} \subset R$ のときは $\mathfrak{a}$ は R の普通の意味のイデアルで，ここではこれを **整イデアル** とよぶことにする．

例えば $\alpha \in K$ に対し $\alpha R=\{\alpha r\,;\, r \in R\}$ は分数イデアルである．これを (α) とかいて α の生成する **単項イデアル** とよぶ．

二つの分数イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\{a+b\,;\, a \in \mathfrak{a},\, b \in \mathfrak{b}\}, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}=\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,;\, a_i \in \mathfrak{a},\ b_i \in \mathfrak{b}\}$$

はまた分数イデアルである．

分数イデアル $\mathfrak{a} \neq 0$ に対し $\{\alpha \in K\,;\, \alpha\mathfrak{a} \subset R\}$ を $\mathfrak{a}^{-1}$ と表す．これは明らかに R-加群で，(13.6) のような $t \in R$ と $\mathfrak{a}$ の一つの元 $a \neq 0$ をとれば $ta \in R$

で，また $ta \in \mathfrak{a}$ より $(ta)\mathfrak{a}^{-1} \subset R$ となる．よって $\mathfrak{a}^{-1}$ は分数イデアルである．

一般に $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} \subset R$ であるが，特に $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = R$ となるとき $\mathfrak{a}$ は **可逆** であるという．

整域 R が次の3条件をみたすとき，R は **デデキント環** であるという．

(13.7)　R はネーター環である．

(13.8)　R は整閉である．

(13.9)　R の素イデアル $\mathfrak{p} \neq 0$ は極大イデアルである．

例えば単項イデアル整域はデデキント環である．実際 (13.7) は明らかで，(13.8) は定理 13.5 で示した．また (13.9) については永尾［4］定理 23.2 を参照されたい．

定理 13.9　R がデデキント環のとき次が成り立つ．

(i)　任意の分数イデアル $\mathfrak{a} \neq 0$ は可逆である．

(ii)　$R, 0$ と異なる分数イデアル $\mathfrak{a}$ は

(13.10)
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n} \qquad (Z \ni e_i \neq 0)$$

と R の素イデアルのべき積に一意的に表される．

［**証明**］　R が体のときは明らかであるから R は体でないとしてよい．このとき 0 と異なる R の極大イデアルがあり，それは R の素イデアルである．

以下イデアルというときは 0 と異なるイデアルを意味するものとする．

(i)　(1)　任意の整イデアルは素イデアルのある積を含む．実際素イデアルの積を含まない整イデアルがあるとすると，(13.7) よりそのうち極大なもの $\mathfrak{a}$ がある．このとき $R \supsetneqq \mathfrak{a}$ で，また $\mathfrak{a}$ は素イデアルではない．したがって $R - \mathfrak{a} \ni b, c$ があって $bc \in \mathfrak{a}$ となる．$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + Rb$，$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + Rc$ とおけば $\mathfrak{b} \supsetneqq \mathfrak{a}$，$\mathfrak{c} \supsetneqq \mathfrak{a}$ であるから，$\mathfrak{a}$ の極大性より $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$，$\mathfrak{c} \supset \mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$ となる素イデアル $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_j$ がある．このとき

$$\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s \subset \mathfrak{b}\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}b + \mathfrak{a}c + Rbc \subset \mathfrak{a}$$

となって $\mathfrak{a}$ のとり方に反する．

(2)　$R \supsetneqq \mathfrak{a}\,(\neq 0)$ を整イデアルとすれば，$R \subsetneqq \mathfrak{a}^{-1}$ である．実際 $R \subset \mathfrak{a}^{-1}$ は明らかである．また $\mathfrak{a}$ の元 $a \neq 0$ を一つとると，上で示したように (a) は素イデアルの積を含む．$(a) \supset \mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$ ($\mathfrak{p}_i$：素イデアル) で r が最小になる $\{\mathfrak{p}_i\}$ をとる．$\mathfrak{a}$ を含む極

大イデアルを$\mathfrak{p}$とすると$\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r\subset\mathfrak{p}$であるから，ある$\mathfrak{p}_i$，例えば$\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}$となる．このとき(13.9)より$\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}$となり

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r\subset(a)\subset\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$$

となる．またrの最小性より$\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r\not\subset(a)$であるから，$b\in\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r$，$b\notin(a)$ となる元bがある．$\lambda=a^{-1}b$とおけば，$b\notin(a)$より$\lambda\notin R$で，また

$$\lambda\mathfrak{a}=a^{-1}b\mathfrak{a}\subset a^{-1}b\mathfrak{p}\subset a^{-1}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r\subset R$$

となるから$\lambda\in\mathfrak{a}^{-1}$となる．よって$R\subsetneqq\mathfrak{a}^{-1}$である．

(3) 整イデアル$\mathfrak{a}(\neq 0)$は可逆である．実際$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}$とおけば$\mathfrak{b}$は整イデアルで，$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}=\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\subset R$より$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\subset\mathfrak{a}^{-1}$である．よって任意の$\beta\in\mathfrak{b}^{-1}$に対し$\mathfrak{a}^{-1}\beta\subset\mathfrak{a}^{-1}$となるが，このとき任意の自然数$m$に対して$\mathfrak{a}^{-1}\beta^m\subset\mathfrak{a}^{-1}$となることが帰納法で示される．したがって $\mathfrak{a}^{-1}[\beta]=\sum_{m=0}^{\infty}\mathfrak{a}^{-1}\beta^m\subset\mathfrak{a}^{-1}$ となり，$R[\beta]\subset\mathfrak{a}^{-1}[\beta]\subset\mathfrak{a}^{-1}$ をえる．ここで(13.7)より$\mathfrak{a}^{-1}$はR-有限生成で，そのR-部分加群$R[\beta]$もR-有限生成となり，補題13.2によりβはR上整である．したがって(13.8)より$\beta\in R$，よって$\mathfrak{b}^{-1}\subset R$となり$\mathfrak{b}^{-1}=R$をえる．(2)で示したようにこのとき$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}=R$となる．

(ii) 素イデアルの積に表されない整イデアル$(\neq R)$があると仮定して，そのうち極大なものを$\mathfrak{a}$とする．また$\mathfrak{a}$を含む極大イデアルを$\mathfrak{p}$とすれば，$\mathfrak{a}\subsetneqq\mathfrak{p}$である．$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}$とおけば$\mathfrak{b}$は整イデアルで，(i)で示したことより $\mathfrak{p}\mathfrak{b}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}=R\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$となる．このとき$\mathfrak{a}\subsetneqq\mathfrak{b}$となるから$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$と素イデアルの積に表され，$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$となって$\mathfrak{a}$のとり方に反する．

次に整イデアル$\mathfrak{a}$が $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r=\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$と素イデアルの積として2通りに表されたとする．このとき$\mathfrak{p}_1$はある$\mathfrak{q}_i$，例えば$\mathfrak{q}_1$を含み，(13.9)より$\mathfrak{p}_1=\mathfrak{q}_1$となる．よって${\mathfrak{p}_1}^{-1}$をかけて $\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r=\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_s$となり，以下同様にして$r=s$で，適当に番号をつけかえれば$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{q}_i\ (1\leq i\leq r)$となることがわかる．

分数イデアル$\mathfrak{a}\,(\neq R)$に対しては$t\mathfrak{a}\subset R$となる$t\in R$をとれば，$\mathfrak{b}=(t)\mathfrak{a}$は整イデアルで$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}(t)^{-1}$となる．$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r,(t)=\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$と素イデアルの積に表せば，$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r{\mathfrak{q}_1}^{-1}\cdots{\mathfrak{q}_s}^{-1}$と表される．また表示の一意性も整イデアルの場合に帰着できることが容易に確かめられる．□

(13.10)のような分解を$\mathfrak{a}$の**素イデアル分解**という．ただし場合によっては

$\mathfrak{p}_i{}^0 = R$とおいて$e_i = 0$となることを許すこともある．

注意 定理13.9の条件(ii)を**イデアル論の基本定理**とよぶことがある．また(i)も(ii)もデデキント環であることと同値な条件であることが知られている．

定理13.9よりデデキント環Rの0と異なる分数イデアル全体の集合は，乗法をイデアルの積で定義して群になる．これをRの商体Kの**イデアル群**とよぶ．その単位元はRである．またイデアル群はRの素イデアルの集合を基とする自由アーベル群である．

問 13.10 Rはデデキント環，Kはその商体とする．このときKの分数イデアル$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$について次が成り立つ．

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Longleftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$となる整イデアル$\mathfrak{c}$がある．

(ii) $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{e_n}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1{}^{f_1} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{f_n}$ $(e_i, f_i \in \boldsymbol{Z})$ を素イデアル分解とすれば

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1{}^{\min(e_1, f_1)} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{\min(e_n, f_n)},$$
$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1{}^{\max(e_1, f_1)} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{\max(e_n, f_n)}$$

となる．

（ヒント：$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$は$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$をともに含む最小の分数イデアル，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$は$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$のいずれにも含まれる最大のイデアルである．）

(iii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$であるとき，$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$は**互いに素**であるという．このとき整イデアル$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$に対し次が成り立つ：

$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$が互いに素$\Longleftrightarrow \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$の素イデアル分解で共通の素イデアルは現れない．

補題 13.11 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$をデデキント環$R$の整イデアルとするとき，$\mathfrak{b}$と互いに素な整イデアル$\mathfrak{c}$で$\mathfrak{a}\mathfrak{c}$が単項イデアルとなるものがある．

［証明］ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{e_n}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1{}^{f_1} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{f_n}$ $(e_i, f_i \geq 0)$を素イデアル分解とする．各iに対し元$a_i \in \mathfrak{p}_i{}^{e_i} - \mathfrak{p}_i{}^{e_i+1}$を一つずつとると，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$のどの二つも互いに素であるから，Chinese remainder theorem（章末問題2，永尾[4]定理24.1参照）より

$$a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i{}^{e_i+1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となる元aがある．このとき$a \in \mathfrak{p}_i{}^{e_i} - \mathfrak{p}_i{}^{e_i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$となり，単項イデアル(a)の素イデアル分解は$(a) = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{e_n}\mathfrak{q}_1{}^{t_1} \cdots \mathfrak{q}_m{}^{t_m}$であるとしてよい．これより明らかに$(a) = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$となる整イデアル$\mathfrak{c}$があるが，問13.10(ii)より$(a) + \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$となるから$\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$をえる．この両辺に$\mathfrak{a}^{-1}$をかければ$\mathfrak{c} + \mathfrak{b} = R$となり，$\mathfrak{b}$と$\mathfrak{c}$は互いに

素である. □

さてデデキント環 R の商体を K とし, R は 0 と異なる素イデアルをもつとしてその一つを $\mathfrak{p}$ とする. $K \ni \alpha \neq 0$ に対し単項イデアル (α) の素イデアル分解を

$$(\alpha) = \mathfrak{p}^e \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r{}^{e_r}$$

とするとき, $\nu_\mathfrak{p}(\alpha) = e$ とおけば $\nu_\mathfrak{p}$ は $\boldsymbol{Z}$ を値群とする K の離散付値になることが容易に示される. これを K の $\mathfrak{p}$-**進付値**といい, その付値環を $R_\mathfrak{p}$ と表す : $R_\mathfrak{p} = \{\alpha \in K\,;\, \nu_\mathfrak{p}(\alpha) \geq 0\}$.

定理 13.12 R はデデキント環とすれば

$$\bigcap_{\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} = R$$

となる. ただし $\mathfrak{p}$ は R の素イデアル全体にわたるものとする.

[**証明**] 左辺 ⊃ 右辺は明らかである. 逆に $\bigcap_{\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} \ni \alpha \neq 0$ とし, $(\alpha) = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r{}^{e_r}$ を素イデアル分解とすれば, $e_i \geq 0\,(\forall i)$ であるから (α) は整イデアルで $\alpha \in R$ となる. □

定理 13.13 R はデデキント環で, $\mathfrak{p} \neq 0$ はその素イデアルとする. このとき次が成り立つ.

(i) $R_\mathfrak{p} = \{b/a\,;\, a,\ b \in R,\ a \notin \mathfrak{p}\}$.

(ii) $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ の極大イデアルで次の同型が成り立つ :

$$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \simeq R/\mathfrak{p}.$$

[**証明**] $\mathfrak{p}$-進付値 $\nu_\mathfrak{p}$ を ν と略記することにする.

(i) $a, b \in R$ で $a \notin \mathfrak{p}$ とすれば, $\nu(b/a) = \nu(b) - \nu(a) = \nu(b) \geq 0$ であるから $b/a \in R_\mathfrak{p}$ である. 逆に $R_\mathfrak{p} \ni \alpha \neq 0$ とし, $(\alpha) = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m{}^{e_m} \mathfrak{q}_1{}^{-f_1} \cdots \mathfrak{q}_n{}^{-f_n}$ $(e_i,\ f_j > 0)$ を素イデアル分解とする. $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1{}^{f_1} \cdots \mathfrak{q}_n{}^{f_n}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1{}^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m{}^{e_m}$ とおけば, $\nu(\alpha) \geq 0$ より $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{p}$ は互いに素である. 補題 13.11 より $\mathfrak{p}$ と互いに素な整イデアル $\mathfrak{c}$ で $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (a)$ となるものがあるが, このとき (a) と $\mathfrak{p}$ は互いに素であるから $a \notin \mathfrak{p}$ である. また

$$(\alpha) = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = a^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

であるから，$b = \alpha a$ とおけば $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (b)$ となり $b \in R$ である．ここで $\alpha = b/a$ であるから (i) が成り立つ．

(ii) $\mathfrak{p} = \{a \in R\,;\, \nu(a) > 0\}$ であるから $R \cap \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ である．したがって単準同型 $\varphi : R/\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ $(a + \mathfrak{p} \mapsto a + \mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ が存在する．一方 $R_\mathfrak{p} \ni \alpha$ とすれば $\alpha = a^{-1}b$ $(a, b \in R,\ a \notin \mathfrak{p})$ と表される．$\mathfrak{p}$ は R の極大イデアルであるから $R/\mathfrak{p}$ は体で，したがって $R \ni c$ で $ac \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ となるものがある．$ac = 1 - x$, $x \in \mathfrak{p}$ とすれば，$\alpha - bc = a^{-1}b - bc = a^{-1}b(1 - ac) = \alpha x \in \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ となるから $\alpha \equiv bc \pmod{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}$ となり，φ は全射である．□

デデキント環の重要な例として，次にのべる有限次代数体の整数環がある．

複素数体 $\boldsymbol{C}$ の部分体 K が $\boldsymbol{Q}$ 上有限次であるとき，K を **有限次代数体** とよぶ．また $\boldsymbol{Z}$ 上整である複素数を **代数的整数** という．有限次代数体 K における代数的整数の全体は K の部分環で，これを K の **整数環** とよぶ．

有限次代数体の整数環がデデキント環であることを示すため，まず次の補題を示す．

補題 13.14 K は $\boldsymbol{Q}$ 上 n 次の有限次代数体とし，R はその整数環とする．このとき次が成り立つ．

(i) $K \ni \alpha$ に対し $c\alpha \in R$ となる $\boldsymbol{Z} \ni c \neq 0$ がある．特に K は R の商体である．

(ii) R は階数 n の $\boldsymbol{Z}$-自由加群である．

(iii) $R \supset \mathfrak{a}$ $(\neq 0)$ を整イデアルとすれば $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{Z}} \mathfrak{a} = n$, $|R/\mathfrak{a}| < \infty$ である．

[証明] (i) $\alpha^m + (b_1/a_1)\alpha^{m-1} + \cdots + b_m/a_m = 0 \qquad (a_i, b_i \in \boldsymbol{Z})$

とし，両辺に $c = a_1 \cdots a_m$ をかけると

$$c\alpha^m + c_1\alpha^{m-1} + \cdots + c_m = 0 \qquad (c_i \in \boldsymbol{Z})$$

となる．したがって

$$(c\alpha)^m + c_1(c\alpha)^{m-1} + \cdots\cdots + c^{m-1}c_m = 0$$

となり $c\alpha \in R$ をえる．

(ii) K は $\boldsymbol{Q}$ の分離拡大であるから $\theta \in K$ があって

$$K = \boldsymbol{Q}(\theta) = \boldsymbol{Q}1 \oplus \boldsymbol{Q}\theta \oplus \cdots\cdots \oplus \boldsymbol{Q}\theta^{n-1}$$

となる．ここで(i)より $\theta \in R$ と仮定してよい．θ に $\boldsymbol{Q}$ 上共役な元を $\theta = \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ とすれば各 θ_i は代数的整数である．そこで $\varDelta = \det(\theta_i{}^j)_{0 \leq i,j \leq n-1}$ とおけば $\varDelta \neq 0$ で，$\varDelta^2$ は $\theta_0, \cdots, \theta_{n-1}$ の対称式で表されるから，$\varDelta^2 \in \boldsymbol{Q}$．また $\varDelta^2$ は代数的整数でもあるから $\boldsymbol{Z}$ の整閉性より $\varDelta^2 \in \boldsymbol{Z}$ である．

$R \ni \alpha = \alpha_0 = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{n-1}\theta^{n-1}$ $(a_i \in \boldsymbol{Q})$ に対し

$$\alpha_i = a_0 + a_1\theta_i + \cdots + a_{n-1}\theta_i{}^{n-1} \qquad (0 \leq i \leq n-1)$$

とおき，これを $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ に関する連立一次方程式とみて解くと

(13.11) $\qquad a_j = \varDelta_j/\varDelta \qquad (0 \leq j \leq n-1)$

となる．ただし $\varDelta_j$ は $\varDelta$ の第 j 列を $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ を縦に並べたものでおきかえた行列式である．(ここで $\varDelta$ の列は第0列から第 $(n-1)$ 列までと番号をつけているものとする．) θ_i, α_j は代数的整数であるから $\varDelta, \varDelta_j$ も代数的整数で，したがって $b_j = \varDelta\varDelta_j$ とおけば，これも代数的整数である．一方 (13.11) より $b_j = a_j\varDelta^2 \in \boldsymbol{Q}$ であるから $b_j \in \boldsymbol{Z}$ となる．$\alpha = b_0(1/\varDelta^2) + b_1(\theta/\varDelta^2) + \cdots\cdots + b_{n-1}(\theta^{n-1}/\varDelta^2)$ であるから

$$R \subset \boldsymbol{Z}(1/\varDelta^2) + \boldsymbol{Z}(\theta/\varDelta^2) + \cdots\cdots + \boldsymbol{Z}(\theta^{n-1}/\varDelta^2)$$

となり，この右辺の加群を M と表すと，M は $1/\varDelta^2, \theta/\varDelta^2, \cdots, \theta^{n-1}/\varDelta^2$ を基とする階数 n の $\boldsymbol{Z}$-自由加群である．また $N = \boldsymbol{Z}1 \oplus \boldsymbol{Z}\theta \oplus \cdots\cdots \oplus \boldsymbol{Z}\theta^{n-1}$ とすれば $N \subset R \subset M$ で，$\mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}} N = n$ であるから R は階数 n の $\boldsymbol{Z}$-自由加群である．

(iii) $\mathfrak{a} \ni a \neq 0$ を一つとれば，$aR \subset \mathfrak{a} \subset R$ で $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}} aR = \mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}} R = n$ であるから，定理 11.8 (i)より $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{Z}}\, \mathfrak{a} = n$, $|R/\mathfrak{a}| < \infty$ をえる．□

定理 13.15 有限次代数体の整数環はデデキント環である．

[**証明**] 有限次代数体 K の整数環を R とする．補題 13.14 (iii)より R のイデアルはすべて R-有限生成であるから，R はネーター環である．また R は $\boldsymbol{Z}$ の K における整閉包で，K は R の商体であるから R は整閉である．

さらに $\mathfrak{p} \neq 0$ を R の素イデアルとし，$\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ とおけばこれは有限整域である．$\bar{R} \ni \bar{a} \neq 0$ に対し写像 $\bar{R} \to \bar{R}$ $(\bar{x} \mapsto \bar{a}\bar{x})$ は単射であるから，有限性よりこれは全射でもある．よって $\bar{R}$ は体で，$\mathfrak{p}$ は R の極大イデアルである．□

有限次代数体 K の整数環を R とし，$\mathfrak{p} \neq 0$ を R の素イデアルとすれば K の $\mathfrak{p}$-進付値 $\nu_{\mathfrak{p}}$ が定義される．その付値環 $R_{\mathfrak{p}}$ の元を **$\mathfrak{p}$-整数** とよぶ．$\nu_{\mathfrak{p}}$ の付値

イデアルは $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ で，剰余体 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ は $R/\mathfrak{p}$ に同型な有限体である．$\mathfrak{p}\cap \boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ の素イデアルであるから $\mathfrak{p}\cap\boldsymbol{Z}=(p)$（$p$ は素数）となり，$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ は標数 p の有限体である．$\nu_\mathfrak{p}(p)=e$ であるとき，$\nu_\mathfrak{p}$ に同値な付値 $\nu^*=(1/e)\nu_\mathfrak{p}$ をとれば $\nu^*(p)=1$ となる．

13.3 完備化

体 K の付値 ν が与えられたとき，$0<\gamma<1$ なる実数 γ を一つ定めて，実数値関数 $\varphi : K\to\boldsymbol{R}$ を

$$\varphi(a)=\gamma^{\nu(a)}$$

と定義すれば次が成り立つ：

(13.12) $\qquad \varphi(a)\geq 0\,;\quad \varphi(a)=0\Longleftrightarrow a=0,$

(13.13) $\qquad \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),$

(13.14) $\qquad \varphi(a+b)\leq \max(\varphi(a),\varphi(b)).$

また問 13.1 から $\varphi(a)=\varphi(-a), \varphi(a^{-1})=\varphi(a)^{-1}$．さらに次が成り立つ：

(13.15) $\qquad \varphi(a)<\varphi(b)\Longleftrightarrow\varphi(a+b)=\varphi(b).$

ν の付値環は $R=\{a\in K\,;\varphi(a)\leq 1\}$ で，付値イデアルは $P=\{a\in K\,;\varphi(a)<1\}$ である．

逆に (13.12) ～ (13.14) をみたす実数値関数 $\varphi : K\to\boldsymbol{R}$ が与えられたとき，$0<\gamma<1$ なる実数 γ を一つとって，$K\ni a\neq 0$ に対し $\nu(a)=\log_\gamma\varphi(a)$ と ν を定義すれば，これは K の（指数）付値である．この意味でこのような関数 φ を K の **乗法付値** とよぶ．$\varphi(K^\times)$ は乗法群 $\boldsymbol{R}^\times$ の部分群で，これを φ の **値群** とよび G_φ と表す．このとき φ が離散乗法付値であることと G_φ が無限巡回群であることは同値である．

二つの乗法付値 φ_1,φ_2 に対し正数 $r>0$ が存在して，$\varphi_2(a)=\varphi_1(a)^r$（$\forall a\in K$）が成り立つとき，$\varphi_1$ と φ_2 は同値であるといって $\varphi_1\sim\varphi_2$ と表す．これは φ_1,φ_2 から上のようにしてえられる指数付値 ν_1,ν_2 が同値であることに他ならない．

さて体 K の乗法付値 φ が与えられたとき，$\varphi(a+b) \leq \varphi(a)+\varphi(b)$ となるから，K における距離 $d(a, b)$ を

$$d(a, b)=\varphi(a-b)$$

と定義すれば K は距離空間になる．したがって K は Hausdorff 空間で，写像 $K \times K \to K$ $((x, y) \mapsto x+y)$，$K \times K \to K$ $((x, y) \mapsto xy)$，$K \times K^{\times} \to K$ $((x, y) \mapsto xy^{-1})$ はすべて連続である．

K の元の列 $(a_n)=(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ が **Cauchy 列** であるとは，任意の正数 ε に対して自然数 N が存在して，$m, n>N$ ならばつねに $d(a_m, a_n)<\varepsilon$ となることである．また $K \ni a$ があって $\lim_{n \to \infty} d(a_n, a)=\lim_{n \to \infty} \varphi(a_n-a)=0$ となるとき，(a_n) は a に **収束する** といい $\lim_{n \to \infty} a_n=a$ とかく．収束する列は Cauchy 列である．

K において Cauchy 列がつねに K のある元に収束するとき，K は **完備** である，あるいは K（または (K, φ)）は **完備体** であるといい，その付値環 R を **完備付値環** とよぶ．

付値体 K において Cauchy 列の全体を C で表し，C における加法，乗法を

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n), \qquad (a_n)(b_n)=(a_n b_n)$$

と定義すれば C は可換環になる．また 0 に収束する列の全体を I とすれば，I は C のイデアルであるが，さらに I は C の極大イデアルであることが容易に示される．したがって $\tilde{K}=C/I$ は体である．

問 13.16 上の I は C の極大イデアルであることを示せ．

Cauchy 列 (a_n) に対して，一般に (13.14) より $\pm(\varphi(a_m)-\varphi(a_n)) \leq \varphi(a_m-a_n)$ が成り立つから実数の列 $(\varphi(a_n))$ は $\boldsymbol{R}$ における Cauchy 列で $\lim_{n \to \infty} \varphi(a_n)=\alpha$ が存在する．また (b_n) が Cauchy 列で $(a_n)-(b_n) \in I$ ならば $\lim_{n \to \infty} \varphi(a_n)=\lim_{n \to \infty} \varphi(b_n)$ となる．よって上の実数 α は (a_n) を含む類 $\widetilde{(a_n)}=(a_n)+I$ だけできまり，$\tilde{\varphi}(\widetilde{(a_n)})=\alpha$ とおけばこれが $\tilde{K}$ の乗法付値になることは容易に確かめられる．

K の元 a に対しすべての a_n が a に等しい列 $(a)=(a, a, \cdots)$ は明らかに

Cauchy 列で，これを含む類 $\widetilde{(a)} = (a) + I$ を $\tilde{a}$ と表せば $\tilde{\varphi}(\tilde{a}) = \lim_{n\to\infty}\varphi(a) = \varphi(a)$ となる．$a \neq b$ ならば明らかに $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ であるから，$\tilde{a}$ と a を同一視して K は $\tilde{K}$ の部分体と考えることができる．このとき $\tilde{\varphi}$ は φ の拡張になっている．さらに $\tilde{K}$ の任意の元 $\widetilde{(a_n)}$ に対し $\lim_{n\to\infty} a_n = \widetilde{(a_n)}$ となり，K は $\tilde{K}$ において稠密である．

問 13.17　上の $\tilde{K}$ は完備体であることを示せ．

以上のようにして K を含む完備体 $\tilde{K}$ で，K がその中で稠密となるものの存在が示されたが，このような $\tilde{K}$ は（付値体として）K-同型を度外視すると一意的に定まることが知られている．この $\tilde{K}$ を K の **完備化** という．

定理 13.18　付値体 K の付値環を R，付値イデアルを P とする．また K の完備化 $\tilde{K}$ の付値環，付値イデアルをそれぞれ $\tilde{R}, \tilde{P}$ とするとき次が成り立つ．

$$\tilde{R}/\tilde{P} \simeq R/P.$$

［**証明**］　明らかに $R \subset \tilde{R}, R \cap \tilde{P} = P$ であるから，$R + \tilde{P} = \tilde{R}$ となることを示せばよい．そのため $\tilde{R} \ni a \neq 0$ とすれば $0 < \tilde{\varphi}(a) \leq 1$ である．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(a_n \in K)$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(a_n - a) = 0$ であるから $\tilde{\varphi}(a_n - a) < \tilde{\varphi}(a)$ となる n がある．このとき (13.15) より，$\varphi(a_n) = \tilde{\varphi}((a_n - a) + a) = \tilde{\varphi}(a) \leq 1$ となるから $a_n \in R$ である．また $\tilde{\varphi}(a_n - a) < \tilde{\varphi}(a) \leq 1$ より $a_n - a \in \tilde{P}$ となり，$a = a_n + (a - a_n) \in R + \tilde{P}$ となる．□

問 13.19　φ を付値体 K の乗法付値とするとき次が成り立つ．

（i）　(a_n) が Cauchy 列 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(a_{n+1} - a_n) = 0$.

（ii）　$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ ならば，十分大きい n に対して $\varphi(a_n) = \varphi(a)$ となる．

特に ν は K の正規離散付値で R はその付値環，$P = (\pi)$ は付値イデアルとする．このとき $\{P, P^2, \cdots\}$ は 0 の基本近傍系である．したがって (a_n) が Cauchy 列であることは，任意の自然数 l に対し自然数 N があって，$m, n > N$ ならばつねに $a_m - a_n \in P^l$ となることに他ならない．また $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となることは，任意の l に対し N があって $n > N$ ならば $a_n - a \in P^l$ となることである．

各 $i \in \boldsymbol{Z}$ に対し $\nu(\pi_i) = i$ となる K の元 π_i をとる.（例えば $\pi_i = \pi^i$ とすればよい.）$\boldsymbol{Z} \ni r$, $R \ni c_i$ $(i \geq r)$ が与えられたとき，$n \geq r$ に対し $a_n = \sum_{i=r}^{n} c_i\pi_i$ とおく．そして $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ が存在するとき無限級数

(13.16) $$a = \sum_{i=r}^{\infty} c_i\pi_i$$

は収束するという．(a_n) は明らかに Cauchy 列であるから，K が完備体ならば (13.16) はつねに収束する．

問 13.20 K は正規離散付値 ν に関して完備であるとし，$R, P, \{\pi_i\}$ は上と同じとする．また Λ は R/P の完全代表系で 0 を含むものとする．このとき K の任意の元 a は

$$a = \sum_{i=r}^{\infty} c_i\pi_i \qquad (c_i \in \Lambda)$$

と一意的に表され，$c_r \neq 0$ ならば $\nu(a) = r$ である．

（ヒント：$\nu(a) = r$ ならば $a = u\pi_r$, u は R の単数．$u \equiv c_r \pmod{P}$, $c_r \in \Lambda$ とすれば $\nu(a - c_r\pi_r) \geq r + 1$. 以下同様にして c_i $(i > r)$ をきめていけばよい.）

特に有限次代数体 K の $\mathfrak{p}$-進付値 $\nu_{\mathfrak{p}}$ に関する完備化 $\tilde{K}$ を **$\mathfrak{p}$-進数体** とよび，その付値環 $\tilde{R}$ を **$\mathfrak{p}$-進整数環** という．また $\tilde{R}$ の元を **$\mathfrak{p}$-進整数** という．$\tilde{R}$ は完備離散付値環である．$\tilde{R}$ の極大イデアルを $\tilde{\mathfrak{p}}$, K の整数環を R とすれば $\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}} \simeq R/\mathfrak{p}$ で，これは有限体である．

13.4 離散付値の拡張

以下では主として離散付値について考察する．

補題 13.21 φ_1, φ_2 を体 K の二つの離散乗法付値とする．このとき次の 3 条件は同値である．

（1） $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

（2） $\{a \in K\,;\, \varphi_1(a) < 1\} = \{a \in K\,;\, \varphi_2(a) < 1\}$.

（3） φ_1, φ_2 による K の位相は一致する．

[証明] φ_1, φ_2 の付値イデアルをそれぞれ P_1, P_2 とすれば，(2) は $P_1 = P_2$ という条件であるから，系 13.7 より (1)⇔(2) は明らかである．また φ_i による位相で $\{a + P_i^n\,;\, a \in K, n = 1, 2, \cdots\}$ はその基本近傍系であるから，(2)⇒(3) も明らかである．

(3) ⇒ (2)を示すため $\varphi_1(a) < 1$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}\varphi_1(a^n) = \lim_{n\to\infty}\varphi_1(a)^n = 0$ となるから，(a^n) は φ_1 による位相で 0 に収束する．したがって φ_2 による位相でも 0 に収束し，$\varphi_2(a) < 1$ となる．同様に $\varphi_2(a) < 1$ ならば $\varphi_1(a) < 1$ である．□

φ は体 K の離散乗法付値とする．K 上のベクトル空間 V で定義された実数値関数 $\|v\|$ が次の条件をみたすとき，これを V における **ノルム** という．

(13.17)　　$\|v\| \geq 0\,;\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0.$

(13.18)　　$a \in K, v \in V \Longrightarrow \|av\| = \varphi(a)\,\|v\|.$

(13.19)　　$\|u + v\| \leq \max\,(\|u\|, \|v\|).$

このとき V における距離を $d(u, v) = \|u - v\|$ と定義すれば，V は距離空間となり，写像 $V \times V \to V$ $((u, v) \mapsto u + v)$, $K \times V$ $((a, v) \mapsto av)$ はともに連続である．

以下 V は K 上有限次元として，$\{u_1, \cdots, u_n\}$ はその K-基とする．

問 13.22　$V \ni v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ に対し

(13.20)　　$\|v\|_0 = \max\,\{\varphi(a_i)\,; 1 \leq i \leq n\}$

とおけば，これは V におけるノルムである．またこのノルムできまる位相に関して次が成り立つ．

(i)　$v_r = a_{r1}u_1 + \cdots + a_{rn}u_n$ $(r = 1, 2, \cdots)$ とするとき，V の元の列 (v_r) が Cauchy 列であることと，すべての i について K の元の列 $(a_{ri})_r$ が Cauchy 列であることは同値である．また $\lim_{r\to\infty} v_r = v = \sum_{i=1}^n a_iu_i$ となることと，各 i について $\lim_{r\to\infty} a_{ri} = a_i$ となることは同値である．

(ii)　K が完備体ならば V も完備である．

補題 13.23　K が完備体ならば，V の任意のノルム $\|v\|$ に対し定数 λ, μ が存在して，$\|v\| \leq \lambda\,\|v\|_0$, $\|v\|_0 \leq \mu\,\|v\|$ $(\forall v \in V)$ となる．特にノルム $\|v\|$ による位相と $\|v\|_0$ による位相は一致する．(ただし $\|v\|_0$ は (13.20) で定義されたノルムとする．)

［**証明**］　$\lambda = \max\,\{\|u_i\|\,; 1 \leq i \leq n\}$ とすれば，$v = \sum_i a_iu_i$ に対し

$$\|v\| \leq \max\,\{\varphi(a_i)\,\|u_i\|\,; 1 \leq i \leq n\} \leq \lambda\,\|v\|_0$$

となる．

次に $\|v\|_0 \leq \mu \|v\|$ となる定数 μ の存在を n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかであるから $n>1$ とする．また $v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ に対して $\varphi_i(v) = \varphi(a_i)$ とおくとき，各 i について

$$(13.21) \qquad \varphi_i(v) \leq \mu_i \|v\| \qquad (\forall\, v \in V)$$

をみたす定数 μ_i の存在を示せばよい．実際このとき $\mu = \max_i \mu_i$ とおけばよい．

以下 $i=n$ のとき上のことを示すが，他の i についても同様に証明される．$V' = Ku_1 \oplus \cdots \oplus Ku_{n-1}$ とおき，V のノルム $\|v\|, \|v\|_0$ の V' への制限を考えれば帰納法の仮定によりこれらは V' の同じ位相を与える．V' はノルム $\|v\|_0$ に関して完備であるから $\|v\|$ に関しても完備で，したがって V' は $\|v\|$ による位相に関して V の閉集合である．

いま (13.21) をみたす μ_n の存在を否定すると，任意の自然数 j に対し

$$\varphi_n(v_j) > j\,\|v_j\|$$

をみたす元 $v_j \in V - V'$ がある．v_j に 0 と異なる K の元をかけても上の不等式が成り立つから，$v_j = a_{j,1}u_1 + \cdots + a_{j,n-1}u_{n-1} + u_n$ としてもよい．このとき $\|v_j\| < \frac{1}{j}\varphi_n(v_j) = \frac{1}{j}$ であるから，$\|v\|$ による位相に関して $\lim_{j\to\infty} v_j = 0$，よって $\lim_{j\to\infty}(v_j - u_n) = -u_n$ となる．一方 $v_j - u_n \in V'\ (j=1,2,\cdots)$ で，V' は V の閉集合であるから $-u_n \in V'$ となり矛盾である．□

さて K, L はともに離散付値体で φ, Φ はそれぞれの乗法付値とし，$K \subset L$ で Φ は φ の拡張になっているとする．このとき (L, Φ) は (K, φ) の **拡大** であるといって $(K,\varphi) \subset (L,\Phi)$ と表す．また指数付値についても同様の表し方をする．

L を K 上のベクトル空間とみれば，Φ が φ の拡張であることから $\|x\| = \Phi(x)$ は (13.17)～(13.19) をみたし，これは L におけるノルムである．したがって補題 13.21，13.23 から次の定理がえられる．

定理 13.24 (K, φ) は完備な離散付値体（φ は乗法付値）とし，L は K の有限次拡大とする．このとき L の乗法付値 Φ で φ の拡張であるものがあれば，それは同値を度外視して一意的に定まる．また L は Φ に関して完備である．

注意 上の定理において φ の拡張 Φ はつねに存在し，同値を度外視して一意的に定まる

ことが一般の付値に対して知られている．

$(K,\varphi)\subset(L,\Phi)$ は離散付値体の拡大とし，R，$P=(\pi)$ はそれぞれ φ の付値環，付値イデアルとする．また S，$Q=(\Pi)$ は Φ の付値環，付値イデアルとする．このとき $R\subset S$ で $R\cap Q$ は R の素イデアルであるから $P=R\cap Q$ となり，$R^*=R/P\simeq(R+Q)/Q$ である．したがってこれらを同一視して R^* は $S^*=S/Q$ の部分体であると考えてよい．このとき拡大次数 $f=[S^*:R^*]$ を Φ の φ 上の **次数** という．(ここで $f=\infty$ となることもある．) また $PS=\pi S$ は S のイデアルであるから，$\pi S=Q^e$ となる自然数 e があるが，これを Φ の φ 上の **分岐指数** とよぶ．このとき $\Pi^e=\pi u$ (u は S の単数) となり，値群については $|G_\Phi:G_\varphi|=e$ で $\{\Phi(1)=1,\Phi(\Pi),\cdots,\Phi(\Pi^{e-1})\}$ は G_Φ/G_φ の完全代表系である．特に $e=1$ のとき Φ は φ 上 **不分岐** であるという．

定理 13.25 $(K,\varphi)\subset(L,\Phi)$ は離散 (乗法) 付値体の拡大とし，L は K の有限次拡大で $[L:K]=n$ とする．このとき上の記号のもとで次が成り立つ．

(i) $ef\leq n$.

(ii) K が完備体ならば上で等号が成り立つ．実際 $\omega_1,\cdots,\omega_f\in S$ を $\{\omega_1{}^*,\cdots,\omega_f{}^*\}$ が S^* の R^*-基となるようにとれば，$\{\omega_i\Pi^j;1\leq i\leq f,\ 0\leq j\leq e-1\}$ は S の R-基となり，したがってこれは L の K-基である．

[**証明**] (i) $S\ni\omega_1,\cdots,\omega_r$ に対し $\omega_1{}^*,\cdots,\omega_r{}^*$ が R^* 上一次独立ならば，re 個の元 $\{\omega_i\Pi^j;1\leq i\leq r,\ 0\leq j\leq e-1\}$ は K 上一次独立であることを示せば $f<\infty$ となり，$ef\leq n$ がえられる．そのためまず $K\ni a_1,\cdots,a_r$ のうち少なくとも一つが 0 でないとき，$x=\sum_{i=1}^r a_i\omega_i$ とおけば $x\neq 0$ で $\Phi(x)=\max\{\varphi(a_i);1\leq i\leq r,\ \varphi(a_i)\neq 0\}\in G_\varphi$ となることを示す．$\varphi(a_k)=\max_i\{\varphi(a_i)\neq 0\}$ となるように k を選べば，$a_k{}^{-1}a_i\in R\ (1\leq i\leq r)$, $a_k{}^{-1}a_k=1\notin P$ であるから，$\{\omega_i{}^*\}$ の一次独立性より $a_k{}^{-1}x=\sum_i a_k{}^{-1}a_i\omega_i\in S-Q$，したがって $\Phi(a_k{}^{-1}x)=\varphi(a_k)^{-1}\Phi(x)=1$, $\Phi(x)=\varphi(a_k)\in G_\varphi$ となる．

さて $\sum_{i=1}^r\sum_{j=0}^{e-1}a_{ij}\,\omega_i\,\Pi^j=0\ (a_{ij}\in K)$ で少なくとも一つの a_{ij} は 0 でないと仮定して矛盾を導く．$\gamma_j=\sum_{i=1}^r a_{ij}\omega_i$ とおけば $\sum_{j=0}^{e-1}\gamma_j\Pi^j=0$ で，このとき上で示

したように少なくとも一つの γ_j は 0 と異なり，$\Phi(\gamma_j) \in G_\varphi$ である．$0 \le j, k \le e-1$，$j \neq k$ ならば　$\Phi(\Pi^j) \not\equiv \Phi(\Pi^k) \pmod{G_\varphi}$　であるから，γ_j, γ_k が 0 でなければ $\Phi(\gamma_j\Pi^j) \not\equiv \Phi(\gamma_k\Pi^k) \pmod{G_\varphi}$　となり，(13.15) より

$$\Phi(\sum_j \gamma_j\Pi^j) = \max\{\Phi(\gamma_j\Pi^j)\,;\, 0 \le j \le e-1,\ \gamma_j \neq 0\} \neq 0.$$

これは $\sum_j \gamma_j\Pi^j = 0$ に反する．

（ii）　K は完備であるから L も完備体である．問 13.20 において K の代りに L を考えれば，$\{\pi_i\}$ として　$\{\pi^i\Pi^j\,;\, i \in \boldsymbol{Z},\ 0 \le j \le e-1\}$　をとることができる．また Γ を R/P の 0 を含む完全代表系とすれば

$$\Lambda = \{\sum_{t=1}^{f} c_t\omega_t\,;\, c_t \in \Gamma\}$$

は S/Q の完全代表系である．したがって L の任意の元 x は

$$x = \sum_{i,j}(\sum_t c_{ijt}\omega_t)\pi^i\Pi^j = \sum_{t=1}^{f}\sum_{j=0}^{e-1}(\sum_i c_{ijt}\pi^i)\,\omega_t\Pi^j$$

（ただし $c_{ijt} \in \Gamma$）と表される．$c_{ijt} \neq 0$ となる (i, j) の（辞書式順序に関して）最小なものを (r, s) とすれば，L の正規離散付値 μ に関して $\mu(x) = re + s$　$(0 \le s \le e-1)$ となり，$\mu(x) \ge 0 \Longleftrightarrow r \ge 0$．したがって $S = \sum_{t,j} R\omega_t\Pi^j$ である．$\{\omega_t\Pi^j\,;\, 1 \le t \le f,\ 0 \le j \le e-1\}$ は K 上一次独立であるからこれは S の R-基，したがって L の K-基で $ef = n$ をえる．□

問 13.26　$(K, \varphi) \subset (L, \Phi)$ は離散付値体の拡大とし，それぞれの剰余体を $R^* \subset S^*$ とする．このとき L が K の代数的拡大ならば S^* も R^* の代数的拡大である．

付値の拡張について，次の定理は IV 章，§7 で必要になる．

定理 13.27　ν は体 K の離散付値で，R, P はそれぞれ ν の付値環，付値イデアルとし，$R/P = F$ をその剰余体とする．このとき F の任意の代数的拡大 F' に対して，K の代数的拡大 K' とその離散付値 ν' で，ν' は ν の不分岐な拡張であり，その剰余体が F' に F-同型となるものが存在する．

[**証明**]　簡単のため $\nu(K^\times) = \boldsymbol{Z}$ とし，自然な準同型 $R \to R/P = F$ による $a \in R$ の像を a^* と表す．

（1）　まず F' が F の単純拡大の場合に示す．そのため $F' = F(\zeta)$ とおき，ζ を根とする F 上の既約多項式を　$f(x) = x^n + a_1^*x^{n-1} + \cdots + a_n^*$ $(a_i \in R)$　とし，$g(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$　とおく．このとき $g(x)$ は R 上の既約多項式で，R は単項イデアル整域であるから K 上の多項式としても既約である（永尾[4]例題 26.

11)．したがって K 上 n 次の単純拡大 $K' = K(\alpha)$ で $g(\alpha) = 0$ となるものがある．K' の元 a は $a = a_0 + a_1\alpha + \cdots\cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ $(a_i \in K)$ と一意的に表されるが，このとき

$$\nu'(a) = \min\{\nu(a_0), \cdots, \nu(a_{n-1})\}$$

とおけば，これは K' の付値で (K', ν') が求める拡大であることが次のようにして示される．

$K' \ni a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i$，$b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\alpha^i$ とする．ν' の定義から $\nu'(a+b) \geq \min\{\nu'(a), \nu'(b)\}$ となることは明らかである．次に $\nu'(ab) = \nu'(a) + \nu'(b)$ を示す．a または b が K の元ならば明らかである．いま $\nu'(a) = m$ とすれば $\nu(a_i) = m$ となる a_i があり，$a' = a_i^{-1}a$ とおけば $\nu'(a') = 0$ となる．同様に $\nu'(b) = \nu(b_j)$ となる b_j をとれば，$b' = b_j^{-1}b$ に対し $\nu'(b') = 0$ となる．このとき $\nu'(a'b') = 0$ が示されれば，$0 = \nu'(a_i^{-1}b_j^{-1}ab) = -\nu(a_i) - \nu(b_j) + \nu'(ab)$ となり上の等式が成り立つ．$R[\alpha] = \sum_{i=0}^{n-1} R\alpha^i$, $P[\alpha] = \sum_{i=0}^{n-1} P\alpha^i$ とおけば $P[\alpha]$ は $R[\alpha]$ のイデアルで，$R[\alpha]/P[\alpha] = F[\alpha^*]$ $(\alpha^* = \alpha + P[\alpha])$ となる．$f(\alpha^*) = 0$ であるから $F[\alpha^*] \simeq F(\zeta)$ で，これは体であるから $P[\alpha]$ は $R[\alpha]$ の素イデアルである．$\nu'(a') = \nu'(b') = 0$ より $a', b' \in R[\alpha] - P[\alpha]$ であるから，$a'b' \notin P[\alpha]$ で $\nu'(a'b') = 0$ をえる．

以上より ν' は K' の付値で，その付値環は $R[\alpha]$，付値イデアルは $P[\alpha]$ で剰余体は $R[\alpha]/P[\alpha] \simeq F(\zeta)$ となる．また ν' の定義からその値群は $\boldsymbol{Z}$ で，ν' は ν 上不分岐である．

（2） 次に F' は F の任意の代数的拡大とする．$\tilde{K}$ を K の代数的閉包とし，$\tilde{K}$ と K の中間体 K_1 とその離散付値 ν_1 で ν の不分岐な拡張となるものを考え，さらに ν_1 の剰余体 F_1 から F' の中への F-同型 $\sigma_1 : F_1 \to F'$ が存在するものをとって，このような組 (K_1, ν_1, σ_1) の全体を $\mathscr{M}$ とする．（ただし $F \subset F_1$ と考える．）

また $\mathscr{M} \ni (K_1, \nu_1, \sigma_1), (K_2, \nu_2, \sigma_2)$ に対して，$K_1 \subset K_2$ で ν_2 は ν_1 の拡張であり，さらに（剰余体について $F_1 \subset F_2$ と考えて）σ_2 が σ_1 の拡張になっているとき $(K_1, \nu_1, \sigma_1) \leq (K_2, \nu_2, \sigma_2)$ とおけば，$\mathscr{M}$ が帰納的順序集合になることは容易に確かめられる．したがって Zorn の補題より $\mathscr{M}$ に極大元 (K_0, ν_0, σ_0) がある．その剰余体を F_0 とし $\sigma_0(F_0) = F_0'$ とおく．$F_0' = F'$ ならば (K_0, ν_0) が求めるものである．よって $F_0' \subsetneq F'$ と仮定して矛盾を導く．

$F' - F_0' \ni \alpha$ をとり $F_1' = F_0'(\alpha)$ とおけば，(1)で示したことより $K_0 \subset K_1 \subset \tilde{K}$

なる体 K_1 とその離散付値 ν_1 で ν_0 の不分岐な拡張となるものがあり，さらにその剰余体 F_1 に対し同型 $\sigma_1 : F_1 \simeq F_1'$ で $\sigma_0 : F_0 \simeq F_0'$ の拡張になるものがある．このとき $(K_0, \nu_0, \sigma_0) < (K_1, \nu_1, \sigma_1) \in \mathscr{M}$ となり (K_0, ν_0, σ_0) の極大性に反する．□

§14.　完備離散付値環上の多元環

この節では

<u>R は完備離散付値環</u>

とし，ν はその付値，$P = (\pi)$ はその極大イデアル，$F = R/(\pi)$ は剰余体とする．

V を有限生成な R-加群とすれば，R は単項イデアル整域であるから，V は次のように巡回加群の直和に分解される：

(14.1)
$$V = Ru_1 \oplus Ru_2 \oplus \cdots \oplus Ru_r.$$

このとき

$$\pi^n V = R\pi^n u_1 \oplus \cdots \oplus R\pi^n u_r$$

となり，$\bigcap_{n=0}^{\infty} R\pi^n = 0$ であるから $\bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n V = 0$ となる．したがって $V \ni v \neq 0$ に対し $v \in \pi^i V - \pi^{i+1} V$ となる $i \geq 0$ があるが，このとき $\nu(v) = i$ とおき，また $\nu(0) = \infty$ と定めれば次が成り立つ：

(14.2)　$v \in \pi^j V \Longrightarrow j \leq \nu(v).$

(14.3)　$r \in R, v \in V \Longrightarrow \nu(rv) \geq \nu(r) + \nu(v).$

(14.4)　$\nu(u+v) \geq \min\{\nu(u), \nu(v)\}.$

したがって $0 < \gamma < 1$ なる実数 γ を一つ定めて　$\varphi(r) = \gamma^{\nu(r)}$ $(r \in R)$，$\|v\| = \gamma^{\nu(v)}$ $(v \in V)$　とおけば，φ は R の乗法付値であり，V における距離を $d(u, v) = \|u - v\|$ とおいて定義すれば V は距離空間になる．このとき $\|v\| \geq 0$ で，$\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$，また (14.3), (14.4) より　$\|rv\| \leq \varphi(r)\|v\|$，$\|u+v\| \leq \max\{\|u\|, \|v\|\}$　となり，写像　$V \times V \mapsto V$ $((u, v) \mapsto u + v)$，$R \times V \to V$ $((r, v) \mapsto rv)$　はともに連続である．

また V の元の列 $(v_n) = (v_1, v_2, \cdots)$ に対し，(14.1) の直和分解で

$$v_n = \sum_{i=1}^{r} r_{ni} u_i$$

と表したとき，(v_n) が Cauchy 列であることは，各 i について $(r_{ni}u_i)_n$ が Cauchy 列であることと同値で，$\lim_{n\to\infty} v_n = v = \sum_i r_i u_i$ となることは，各 i について $\lim_{n\to\infty} r_{ni} u_i = r_i u_i$ となることに同値である．ここで $(0 : u_i) = R\pi^{n(i)} \neq 0$ ならば Ru_i における位相は離散的で，したがって完備であることに注意すれば，V は上で定義した距離に関して完備である．

A が R-有限生成な R-多元環のとき，写像 $A \times A \to A$ $((a, b) \mapsto ab)$ は $V = A$ として上で定義した位相に関して連続である．また $A^* = A/\pi A$ は体 F 上有限次元の多元環である．

定理 14.1 A は R-有限生成な R-多元環とする．このとき

(i) $\pi A \subset J(A)$.

(ii) ある n に対して $J(A)^n \subset \pi A$.

[**証明**] (i) V は任意の既約 A-加群とする．このとき πV は V の A-部分加群であるから，$\pi V = V$ または$\pi V = 0$ となる．$V \ni v \neq 0$ とすれば $V = vA$ で，A は R-有限生成であるから V も R-有限生成である．したがって $\pi V = J(R)V = V$ とすれば，東屋 - 中山の補題より $V = 0$ となり矛盾である．よって $\pi V = 0$ となり，$\pi A \subset J(A)$ をえる．

(ii) $A^* = A/\pi A$ は体 F 上有限次元の多元環で，(i) より $J(A^*) = J(A)/\pi A$ となり，これはべき零である．よって (ii) が成り立つ．□

べき等元の持ち上げに関する次の定理は重要である．

定理 14.2 A は完備な離散付値環 R 上有限生成な多元環とする．また I は $J(A)$ に含まれるイデアルとし，$\bar{A} = A/I$ とおく．このとき次が成り立つ．

(i) $\bar{c}$ は $\bar{A}$ のべき等元とし

(14.5) $$\bar{c} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \cdots\cdots + \bar{c}_n$$

を $\bar{A}$ におけるべき等元分解とする．このとき $\bar{c}$ は A のべき等元 e に持ち上げることができ，e に対して直交するべき等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ で次をみたすもの

がある：

$$\bar{e}_i = \bar{c}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

(ii) A のべき等元 e に対して，$e \in \mathrm{pi}(A) \Longleftrightarrow \bar{e} \in \mathrm{pi}(\bar{A})$.

(iii) A のべき等元 e, f に対して，$eA \simeq fA \Longleftrightarrow \bar{e}\bar{A} \simeq \bar{f}\bar{A}$.

したがって原始べき等元の同値類について，$\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ と $\widetilde{\mathrm{pi}}(\bar{A})$ の間に1対1の対応がつく．

[**証明**] $I \subset J(A)$ より $I^m \subset \pi A$ となる m があり，このとき $I^{mr} \subset \pi^r A$ である．$\bar{A}^{(r)} = A/I^{mr}$ とおく．

(i) $\bar{A}^{(1)} = A/I^m$ において I/I^m はべき零イデアルであるから，定理4.9より $\bar{c}$ は $\bar{A}^{(1)}$ のべき等元に持ち上げることができる．すなわち $c^{(1)} \in A$ で

$$(c^{(1)})^2 \equiv c^{(1)} \pmod{I^m}, \qquad c^{(1)} \equiv c \pmod{I}$$

をみたすものがある．次に $\bar{A}^{(2)} = A/I^{2m}$ において I^m/I^{2m} はべき零イデアルであるから，$c^{(2)} \in A$ が存在して

$$(c^{(2)})^2 \equiv c^{(2)} \pmod{I^{2m}}, \qquad c^{(2)} \equiv c^{(1)} \pmod{I^m}$$

となる．以下同様にして各自然数 r に対して $c^{(r)} \in A$ があって

$$(c^{(r)})^2 \equiv c^{(r)} \pmod{I^{rm}}, \qquad c^{(r)} \equiv c^{(r-1)} \pmod{I^{(r-1)m}}$$

(ただし $c^{(0)} = c$) となる．このとき $(c^{(r)})_r$ は Cauchy 列で，完備性より $\lim_{r\to\infty} c^{(r)} = e$ が存在して，これは $\bar{c}$ を A に持ち上げたべき等元である．

次に $\bar{c}$ を A に持ち上げたべき等元の一つを改めて e とする．このとき定理4.10を用いて上と同様に考えれば，各自然数 r に対して $A \ni c_i^{(r)}\ (i = 1, \cdots, n)$ が存在して

$$c_i^{(r)} \equiv c_i^{(r-1)} \qquad \pmod{I^{(r-1)m}},$$

また

$$e \equiv c_1^{(r)} + \cdots + c_n^{(r)} \qquad \pmod{I^{rm}}$$

は $\bar{A}^{(r)}$ における直交するべき等元の和となる．ここで $(c_i^{(r)})_r$ は Cauchy 列であり，$\lim_{r\to\infty} c_i^{(r)} = e_i$ とおけばこれらが求めるものである．

(ii) $J(A)$ は A のべき等元を含まないから，(i) を用いて定理4.11と同様に証明できる．

(iii) (⇒) は明らかである．また (⇐) は定理10.14より eA, fA がそれぞれ $\bar{e}\bar{A}$,

$\bar{f}\bar{A}$ の射影被覆であるから明らかである. □

定理 14.1, 14.2 より直ちに次がえられる.

定理 14.3 完備な離散付値環 R 上有限生成な多元環は半完全環である.

後で必要な半完全環に関する次の補題を示しておく.

補題 14.4 A が半完全環のとき

$$A \text{ は局所環} \Longleftrightarrow 1 \text{ が } A \text{ のただ一つのべき等元}.$$

[**証明**] $(\Rightarrow)$ は定理 5.9 で示したから $(\Leftarrow)$ を示す. $\bar{A} = A/J(A)$ とおけば, 仮定より $\bar{1}$ は $\bar{A}$ のただ一つのべき等元で, $\mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{A}_{\bar{A}}) \simeq \bar{A}$ であるから $\bar{A}_{\bar{A}}$ は直既約である (定理 5.5). $\bar{A}$ は半単純なアルチン環であるから斜体となり, A は局所環である. □

以下

<u>A は完備な離散付値環 R 上有限生成な多元環</u>

とし, A-加群の直既約分解について考察する.

補題 14.5 V_A が A-有限生成ならば, $\mathrm{End}_A(V)$ は R 上有限生成な多元環で, したがって半完全環である.

[**証明**] $\mathrm{End}_R(V) \supset \mathrm{End}_A(V)$ で R はネーター環であるから, $\mathrm{End}_R(V)$ が R-有限生成であることを示せばよい. 仮定より V は R-有限生成で, $V = Rv_1 + \cdots + Rv_n$ としてよい. いま $X = Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_n$ を R-自由加群とすれば, 準同型 φ: $X \to V$ $(x_i \mapsto v_i)$ がある. このとき $E(X) = \mathrm{End}_R(X) \simeq M_n(R)$ で, これは R-有限生成である. したがって $E_0(X) = \{\sigma \in E(X) ; \sigma(\mathrm{Ker}\,\varphi) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi\}$ も R-有限生成である. いま $\bar{X} = X/\mathrm{Ker}\,\varphi$ $(\simeq V)$ とおけば, $E_0(X) \ni \sigma$ に対し $\mathrm{End}_R(\bar{X}) \ni \bar{\sigma}$ で $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \overline{\sigma(x)}$ となるものが定まる. このようにして準同型 $E_0(X) \to \mathrm{End}_R(\bar{X})$ $(\sigma \mapsto \bar{\sigma})$ がえられるが, これが全射であることが次のようにして示される. $\rho \in \mathrm{End}_R(\bar{X})$ に対し, 各剰余類 $\rho(\bar{x}_i)$ から元 y_i を一つえらべば, 準同型 $\lambda: X \to X$ で $\lambda(x_i) = y_i$ となるものがあり, このとき $\lambda \in E_0(X)$ で $\bar{\lambda} = \rho$ となる. よって $\mathrm{End}_R(V) \simeq \mathrm{End}_R(\bar{X})$ は $E_0(X)$ の準同型像で R-有限生成である. □

定理 5.5 と補題 14.4, 14.5 から直ちに次の定理がえられる．

定理 14.6　A-有限生成な加群 V_A について

$$V \text{ が直既約} \Longleftrightarrow \mathrm{End}_A(V) \text{ が局所環.}$$

上の定理から直既約分解に関する K-S-A 定理が適用できる．

定理 14.7　V_A が A-有限生成ならば，V は有限個の直既約な A-部分加群の直和に分解される．また

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_n,$$
$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots\cdots \oplus W_m$$

を V の二つの直既約分解とすれば，$n = m$ で適当に番号をつけかえれば $V_i \simeq W_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となる．

[**証明**]　V_A は定理 2.5 よりネーター加群であるから前半は定理 6.2 (i) より明らかである．後半は K-S-A 定理より明らかである．□

問　題　I

以下で A は環を表すものとする．

1. **(イデアル化の原理)**　U は (A, A)-両側加群とする．このとき加群としての直和 $A \oplus U = B$ において，乗法を次のように定義すれば B は環となり，U はそのイデアルである：

$$(a_1, u_1)(a_2, u_2) = (a_1 a_2,\ a_1 u_2 + u_1 a_2).$$

2. $I_1, \cdots, I_r$ は A のイデアルとし，異なる i, j に対しつねに $I_i + I_j = A$ が成り立つと仮定する．このとき

(i)　$I_i + \prod_{j \neq i} I_j = A.$

(ii)　**(Chinese remainder theorem)**　次の写像

$$\varphi : A \to \bigoplus_{j=1}^{r} A/I_j \qquad (a \mapsto (a + I_j)_j)$$

は全準同型である．よって次の同型が成り立つ：

$$A/\bigcap_{j=1}^{r} I_j \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} A/I_j.$$

3. V_A がネーター加群のとき，A-準同型 $\varphi : V \to V$ が全射ならばこれは同型であ

る．

4. $U = V \oplus W$ とし，π_V, π_W はそれぞれ V, W への射影とする．このとき

（i） U の部分加群 L に対し $\pi_V(L)/L \cap V \simeq \pi_W(L)/L \cap W$.

（ii） U は組成列をもつとする．このとき次の2条件は同値である．

(1) U の任意の部分加群 L は次のように直和分解される：

$$L = L_1 \oplus L_2 \qquad (L_1 \subset V, L_2 \subset W).$$

(2) V と W は同型な既約成分を共通にもたない．

5. $\varphi: A \to A'$ が環の全準同型ならば次が成り立つ：$\varphi(J(A)) \subset J(A')$.

6. A はアルチン環で V_A は A-有限生成とする．このとき $VJ(A)$ は V の極大な A-部分加群全体の共通集合に一致する．

7. A において1が次のように2通りに n 個の直交するべき等元の和に表されているとする：$1 = \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n f_i$.

このとき任意の i に対し $e_iA \simeq f_iA$ (A-同型) ならば，A の正則元 u が存在して $u^{-1}e_iu = f_i \ (1 \leq i \leq n)$ となる．

8. I は $J(A)$ に入るイデアルとし，$\bar{A} = A/I$ とおく．このとき A の二つのべき等元 e, f に対し $\bar{e} = \bar{f}$ ならば，I の元 c が存在して $(1+c)^{-1}e(1+c) = f$ となる．

9. A-加群 V が組成列をもつとき，次の3条件は同値である．

（1） V_A は完全可約である．

（2） V_A の任意の既約な部分加群は V_A の直和因子である．

（3） V_A の任意の極大部分加群は V_A の直和因子である．

10. 二つの A-加群 U, V に対し

$$\mathrm{soc}(U \oplus V) = \mathrm{soc}(U) \oplus \mathrm{soc}(V).$$

11. A は半単純なアルチン環とし，$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ はその単純因子分解とする．このとき

（i） A のイデアルはいくつかの A_i の直和である．

（ii） A' が A の準同型像ならば，A' はいくつかの A_i の直和に同型である．

12. A がアルチン環のとき，次が成り立つ：

（i） A の極大イデアルは有限個で，$J(A)$ はそれらの共通集合と一致する．

（ii） A の右イデアル I がべき等元を含まなければ，$I \subset J(A)$.

13. A はネーター環とする．もし A の2元 x, y が $xy = 1$ をみたせば，$yx = 1$ であ

る.

14.　A-有限生成な二つの射影加群P, Qに対し次が成り立つ：

$$P/PJ(A) \simeq Q/QJ(A) \Longrightarrow P \simeq Q.$$

15.　eはAのべき等元で$AeA = A$をみたすとする．このとき$\Gamma = eAe$とおき，V_Aに対して$\mathfrak{F}(V) = Ve$, W_Γに対して$\mathfrak{G}(W) = W \otimes_\Gamma eA$とおけば，$\mathfrak{F}(V)$, $\mathfrak{G}(W)$はそれぞれ自然な作用でΓ-加群，A-加群になる．これらに対して次が成り立つ.

(i)　$\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(V)) \simeq V$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}(W)) \simeq W$.

(ii)　制限写像によって次の同型が引き起される：

$$\mathrm{Hom}_A(U, V) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(Ue, Ve).$$

特に環同型　$A \cong \mathrm{End}_\Gamma(Ae)\ (a \mapsto \varphi_a\ (: xe \mapsto axe))$　が成り立つ.

(iii)　$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$は直和，包含関係，射影性を保つ.

16.　$1_A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{n_i} e_{i\lambda}$を$A$における原始べき等元分解とし，$e_{i\lambda}A \simeq e_{j\mu}A \Longleftrightarrow i = j$とする．このとき　$e_{i1} = e_i$, $e = e_1 + \cdots + e_k$　とおけば$AeA = A$となる．また**15**と同様に$\Gamma = eAe$とおけば，$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{k} e_i\Gamma$, $i \neq j$ならば$e_i\Gamma \not\simeq e_j\Gamma$となる.（この$\Gamma$を$A$の**basic ring**とよぶ.）

17.　PはA-有限生成射影加群とし，$E = \mathrm{End}_A(P)$とおくとき次が成り立つ.

(i)　$J(E) = \{\varphi \in E ; \mathrm{Im}\,\varphi \subset PJ(A)\}$.

(ii)　$E/J(E) \simeq \mathrm{End}_A(P/PJ(A))$.

18.　U_Aが有限生成の射影加群であるため必要十分な条件は次が成り立つことである：

$u_1, \cdots, u_n \in U$と$\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathrm{Hom}_A(U, A)$が存在して，すべての$u \in U$に対し，$u = \sum_i u_i\varphi_i(u)$となる.

19.　$Z(A)$のべき等元が単位元に限るものとする．このとき次のいずれのイデアルIについても$Z(A/I)$のべき等元は単位元に限る.

(1)　$Z(A)$のべき零イデアルNがあって$I = NA$.

(2)　$J(A)$がべき零で，$I \subset J(A)^2$.

20.　次の二つの完全系列

$$V'_A \xrightarrow{\lambda} V_A \xrightarrow{\lambda'} V''_A \longrightarrow 0$$
$$_AW' \xrightarrow{\mu} {_AW} \xrightarrow{\mu'} {_AW''} \longrightarrow 0$$

に対し，次は完全系列である（ただし　$f = \lambda \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes \mu$):

$$(V' \otimes_A W) \oplus (V \otimes_A W') \xrightarrow{f} V \otimes_A W \xrightarrow{\lambda' \otimes \mu'} V'' \otimes_A W'' \longrightarrow 0.$$

21. V_A を A-平坦とする．このとき ${}_AW$ の部分加群 W_1, W_2 に対して次が成り立つ：

$$V \otimes_A W_1 \cap V \otimes_A W_2 = V \otimes_A (W_1 \cap W_2).$$

22. R は可換環とし，I, L を R のイデアルとすれば次の同型が成り立つ：

$$R/I \otimes_R R/L \simeq R/(I + L).$$

II　多元環とその表現

§1〜§3で多元環の表現に関する基礎的な事柄をのべた後，単純多元環の理論，Schur 指数，接合積，Frobenius 多元環の理論についてのべる．

§1. 表現の基礎概念

1.1 表現と表現加群

可換環 R 上の多元環 A, B に対し，R-線形写像 $f: A \to B$ が環準同型であるとき，f は R-多元環としての準同型であるという．

R-多元環 A から R 上 n 次の全行列環への R-多元環としての準同型

(1.1) $$\boldsymbol{X}: A \to M_n(R) \qquad (a \mapsto X(a))$$

を A の (R-) **表現** とよび，n をその **次数** という．約束により $X(1) = I$ (単位行列) である．$\boldsymbol{X}$ が特に単準同型のとき，表現 $\boldsymbol{X}$ は **忠実** であるという．例えば単純多元環の表現はつねに忠実である．

$R^\times$ を R の単数群とするとき，$M_n(R)$ の単数群は

$$GL_n(R) = \{M \in M_n(R)\,;\, \det M \in R^\times\}$$

で，$GL_n(R)$ の元を **正則行列** という．

次数の等しい A の二つの表現 $\boldsymbol{X}: A \to M_n(R)$ と $\boldsymbol{Y}: A \to M_n(R)$ に対して $P \in GL_n(R)$ が存在して

$$Y(a) = P^{-1}X(a)P \qquad (\forall a \in A)$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は (R-) **同値** であるといって $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$，または $\boldsymbol{X} \underset{R}{\sim} \boldsymbol{Y}$ とかく．

また (1.1) の表現 $\boldsymbol{X}$ に対し $\chi_X(a) = \mathrm{tr}\, X(a)$ とおけば，R-線形写像

$$\chi_X : A \to R$$

がえられる．これを表現 $\boldsymbol{X}$ の (R-) **指標** という．明らかに次が成り立つ：

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y} \Longrightarrow \chi_X = \chi_Y.$$

さて A-加群 V は R-有限生成でかつ R-自由とする．このとき V は有限個の元からなる R-基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ をもつ：

$$V = Rv_1 \oplus Rv_2 \oplus \cdots \oplus Rv_n.$$

$A \ni a$ に対し

$$(1.2) \qquad v_i a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a) v_j \qquad (\alpha_{ij}(a) \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

とすれば，n 次の正方行列 $X(a) = (\alpha_{ij}(a))$ がきまり，写像

$$(1.3) \qquad \boldsymbol{X} : A \to M_n(R) \qquad (a \mapsto X(a))$$

がえられるが，これが A の表現になることは容易に確かめられる．$\boldsymbol{X}$ を A-加群 V の R-**基** $\{v_i\}$ **に関する表現，** あるいは簡単に V_A **による表現** という．

注意　(1.2) は行列記号を用いて

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} a = X(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

と表すことができる．ただし上の左辺は $v_1 a, \cdots, v_n a$ を縦に並べたものである．

問 1.1　(i)　(1.3) の写像 $\boldsymbol{X}$ が A の表現であることを示せ．

(ii)　V の別の基 $\{u_i\}$ に関する A の表現を $\boldsymbol{Y}$ とすれば $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$ である．

(ヒント：$\{v_i\}, \{u_i\}$ を縦に並べたものを $(v_i), (u_i)$ と表し，$(v_i) = P(u_i)$ とすれば $P^{-1} X(a) P = Y(a)$ となる．)

逆に A の n 次の表現 $\boldsymbol{X} : a \mapsto X(a) = (\alpha_{ij}(a))$ が与えられたとき，R-自由加群 $V = Rv_1 \oplus \cdots \oplus Rv_n$ を考え，V に対する A の元 a の作用を基の元に対しては (1.2) で定め，これを線形に拡張したものとして定義すれば V は A-加群になる．またその基 $\{v_i\}$ に関する表現は与えられた表現 $\boldsymbol{X}$ に一致する．このようにしてえられた A-加群 V を $\boldsymbol{X}$ の (右) **表現加群** という．

一般に A-加群 V が R-有限生成な R-自由加群であるとき，V は A の **表**

現加群 であるということもある.

問 1.2 A の二つの表現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ の表現加群をそれぞれ V_A, W_A とするとき

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y} \Longleftrightarrow V \simeq W \quad (A\text{-同型}).$$

したがって A の表現の同値類と A の表現加群の同型類は 1 対 1 に対応する.

注 意 左 A-加群 V が R-有限生成な R-自由加群であるとき, その R-基 $\{v_i\}$ を一つとって, $A \ni a$ に対し

(1.4) $$av_j = \sum_i \alpha_{ij}(a) v_i$$

によってきまる行列 $X(a) = (\alpha_{ij}(a))$ を対応させれば, A の表現 $\boldsymbol{X}$ がえられる. このとき ${}_AV$ を X の左表現加群という. 上の (1.4) は行列記号を用いて次のように表される:

$$a(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n) X(a).$$

A の表現 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ が与えられたとき, 次のような表現 $\boldsymbol{X}$ がえられる:

$$\boldsymbol{X} : a \mapsto \begin{pmatrix} X_1(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_m(a) \end{pmatrix}.$$

この表現 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_m$ の **直和** とよび, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{X}_m$ とかく. $\boldsymbol{X}_i$ の表現加群を V_i とすると $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ が $\boldsymbol{X}$ の表現加群となる. 特に $\boldsymbol{X}_1 = \cdots = \boldsymbol{X}_m$ のときは $\boldsymbol{X} = m\boldsymbol{X}_1$, $V = mV_1$ などと略記する.

A の表現 $\boldsymbol{X}$ がそのどんな同値表現をとっても二つ以上の表現の直和に分解されないとき, $\boldsymbol{X}$ は **直既約** であるという.

また $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{X}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{X}_m$ で各 $\boldsymbol{X}_i$ が直既約であるとき, これを $\boldsymbol{X}$ の **直既約分解** といい, 各 $\boldsymbol{X}_i$ を $\boldsymbol{X}$ の **直既約因子** という.

一般に R-加群 V が R-有限生成でトーションがないとき, V は R-**格子**であるという.

以後この節では

(1.5) <u>Rは単項イデアル整域</u>

と仮定する. このとき V が R-格子であることは, V が R-有限生成な R-自由加群であることに他ならない. R-格子の R-部分加群はまた R-格子である.

R-多元環 A の表現 $\boldsymbol{X}$ の表現加群を V_A とするとき, $\boldsymbol{X}$ が直既約であることと V が A-加群として直既約であることは同値である.

R-格子 V の R-部分加群 $W(\neq V)$ は，V/W がトーションのない R-加群であるとき V の **純部分加群** であるという．このとき仮定 (1.5) より $V/W=\bar{V}$ は R-自由で，$W\neq 0$ ならば V は次のように直和分解される：

$$V=W\oplus W', \qquad W'\simeq \bar{V}.$$

ここで V は A-加群，W はその A-部分加群とするとき，V の基 $\{v_1,\cdots,v_r,\cdots,v_n\}$ を $\{v_1,\cdots,v_r\}$ が W の基，$\{v_{r+1},\cdots,v_n\}$ が W' の基になるようにとれば，W が A-部分加群であることからこの基に関する A の表現 $\boldsymbol{X}$ は次のような形になる：

$$\boldsymbol{X}: a\mapsto X(a)=\begin{pmatrix} Y(a) & 0 \\ * & Y'(a)\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

ただし $\boldsymbol{Y}: a\mapsto Y(a)$ は W の基 $\{v_1,\cdots,v_r\}$ に関する表現，$\boldsymbol{Y}': a\mapsto Y'(a)$ は，$\bar{V}$ の基 $\{\bar{v}_{r+1},\cdots,\bar{v}_n\}$ に関する表現である．

問 1.3　A の表現 $\boldsymbol{X}$ が (1.6) の形に分解しているとき，$\boldsymbol{X}$ は次の形の表現に同値である：

$$\boldsymbol{X}': a\mapsto \begin{pmatrix} Y'(a) & * \\ 0 & Y(a)\end{pmatrix}.$$

A の R-表現が (1.6) の形の表現に同値にならないとき，その表現は **既約** であるという．このことは表現加群 V_A の純部分加群が自明なものに限ることと同値である．

特に A が体 K 上の多元環のときは，A の表現加群は K-有限生成な A-加群を意味し，V_A の純部分加群は V と異なる A-部分加群のことである．したがって次が成り立つ．

定理 1.4　A は体 K 上の多元環とする．このとき A の表現 $\boldsymbol{X}$ が既約であることとその表現加群 V_A が既約な A-加群であることは同値である．

体 K 上の多元環 A の表現を $\boldsymbol{X}$，その表現加群を V_A とするとき，V は K 上有限次元のベクトル空間であるから A-加群 V は組成列

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$$

をもつ．まず V_1 の基 $\{v_1, \cdots, v_{n_1}\}$ をとり，次にこれを含む V_2 の基 $\{v_1, \cdots, v_{n_2}\}$ をとり，以下同様にして V の基 $\{v_i\}$ がえられる．この基に関する A の表現 $\boldsymbol{Y}$ は次の形である：

$$\text{(1.7)} \qquad \boldsymbol{Y} : a \mapsto Y(a) = \begin{pmatrix} Y_1(a) & & & 0 \\ & Y_2(a) & & \\ & & \ddots & \\ * & & & Y_m(a) \end{pmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{Y}_i : a \mapsto Y_i(a)$ は $\bar{V}_i = V_i/V_{i-1}$ の基 $\{\bar{v}_{n_{i-1}+1}, \cdots, \bar{v}_{n_i}\}$ に関する表現で A の既約表現である．

このようにして $\boldsymbol{X}$ と同値な表現を適当にとれば (1.7) のように分解するが，対角線上の既約表現の集合 $\{\boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_m\}$ は Jordan-Hölder の定理により順序と同値を度外視すれば一意的に定まる．各 $\boldsymbol{Y}_i$ を $\boldsymbol{X}$ の **既約成分** という．

上で V_A が完全可約なときは $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Y}_m$ ($\boldsymbol{Y}_i$: 既約)となり，このとき $\boldsymbol{X}$ は **完全可約** であるという．

A の二つの K-表現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ の表現加群をそれぞれ V, W とする．V_A と W_A の組成剰余群列が順序と同型を度外視して一致するとき

$$V \longleftrightarrow W, \qquad \boldsymbol{X} \longleftrightarrow \boldsymbol{Y}$$

などとかく．このとき明らかに $\chi_X = \chi_Y$ である．また $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$ ならば $\boldsymbol{X} \leftrightarrow \boldsymbol{Y}$ であるが，特に $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ が完全可約ならばこの逆も成り立つ．

1.2 *R*-形式

$S \supset R$ は単位元を共有する R の可換な拡大環とし，A は R-多元環とする．このとき A から S 上の全行列環への R-多元環としての準同型 $\boldsymbol{X}: A \to M_n(S)$ を A の S-**表現** という．

これは自然に S-多元環としての準同型 $\boldsymbol{X}^S : A^S (= S \otimes_R A) \to M_n(S)$ ($s \otimes a \mapsto sX(a)$) に拡張されて A^S の表現がえられるが，逆に表現 $A^S \to M_n(S)$ が与えられると，準同型 $A \to A^S$ ($a \mapsto 1_S \otimes a$) を通して A の S-表現がえられ

る．このように A の S-表現を考えることは A^S の表現を考えることと同じことである．

また $\boldsymbol{X}: A \to M_n(R)$ を A の R-表現とするとき，$X(a) \in M_n(S)$ と考えれば A の S-表現がえられ，したがって A^S の表現 $\boldsymbol{X}^S$ がえられる．このとき V_A を $\boldsymbol{X}$ の表現加群とすれば，$\boldsymbol{X}^S$ の表現加群は $V^S = S \otimes_R V$ である．

一般に A^S-加群 U に対して，A-加群 V が存在して

$$V^S \simeq U \qquad (A^S\text{-同型}) \tag{1.8}$$

となるとき，U は R で **実現可能** であるという．またこのような V_A を U_{A^S} の R-**形式** とよぶ．

上の (1.8) で V が A の n 次の R-表現 $\boldsymbol{X}$ の表現加群であるときは，U も A^S の表現加群である．そして U のある S-基に関する A の S-表現を $\boldsymbol{Y}$ とすると，S 上の正則行列 P があって

$$P^{-1}Y(a)P = X(a) \quad (\in M_n(R)) \qquad (\forall a \in A) \tag{1.9}$$

となる．このような $P \in GL_n(S)$ が存在するとき $\boldsymbol{Y}$ は $\boldsymbol{X}$ に S-**同値** であるという．

また A の S-表現 $\boldsymbol{Y}$ に対し，(1.9) をみたす R-表現 $\boldsymbol{X}$ と $P \in GL_n(S)$ が存在するとき，$\boldsymbol{Y}$ は R で **実現可能** であるという．

特に S が R の商体のときは次が成り立つ．

補題 1.5　R は単項イデアル整域，K はその商体とし，A は R-有限生成な R-多元環とする．また M は A^K の表現加群，V は M の有限生成な A-部分加群とする．このとき V が M のある K-基を含めば，V_A は M_{A^K} の R-形式である．

［**証明**］　明らかに V はトーションのない R-加群で，V の元の集合 $\{v_i\}$ が R-自由であることとこれが K 上1次独立であることは同値である．したがって V が M の K-基 $\{m_1, \cdots, m_n\}$ を含むとすれば $\mathrm{rank}_R V = n$ である．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の R-基とすると，これは M の K-基で

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} Kv_i \simeq V^K = K \otimes_R V = \bigoplus_{i=1}^{n} K(1_K \otimes v_i)$$

となり，V_A は M_{A^K} の R-形式である．□

定理 1.6 R, K, A は補題 1.5 と同じとする．このとき

(i) A^K の任意の表現加群 M に対し，その R-形式 V_A が存在する．

(ii) A の任意の K-表現 $\boldsymbol{M}$ は A のある R-表現 $\boldsymbol{X}$ に K-同値である．

［**証明**］ (i) を示せばよい．そのため $A = \sum_{i=1}^{r} Ra_i$ とし，$\{m_1, \cdots, m_n\}$ は M の K-基とする．このとき，$V = \sum_{i,j} R(m_i a_j)$ とおけば，V は M の A-部分加群で，M の K-基 $\{m_i\}$ を含むから M_{A^K} の R-形式である．□

以下この節では

(1.10) $\underline{R \text{ は離散付値環，} (\pi) \text{ はその極大イデアル}}$

と仮定する．また，$\underline{K \text{ は } R \text{ の商体，} F = R/(\pi) \text{ は剰余体}}$とし，自然な準同型 $R \to F = R/(\pi)$ による $R \ni \alpha$ の像を α^* と表す．

問 1.7 A は R-多元環，M は A^K の表現加群とするとき，M の A-部分加群 V, W がともに M の R-形式ならば $\pi^m V \subset W$ となる自然数 m がある．

R-加群 V が R-自由ならば $V = R \otimes_R V \to V^K = K \otimes_R V$ $(v \mapsto 1_K \otimes v)$ は単準同型で (I, 10.3)，v と $1_K \otimes v$ を同一視して $V \subset V^K$ と考えてよい．V の R-部分加群 W の生成する V^K の K-部分加群を KW と表すことにする．

また $V/\pi V$ $(\simeq F \otimes_R V)$ を V^* とかき，自然な準同型 $V \to V^*$ における v の像を v^* と表す．V^* は明らかに F-加群である．特に $\pi V = 0$ ならば V 自身 F-加群と考えられる．

問 1.8 R-格子 V の R-部分加群 $W (\neq V)$ について，次の条件は同値である．

(1) W は V の純部分加群である．

(2) $W = KW \cap V$.

(3) V^K の K-部分加群 U で $W = U \cap V$ となるものがある．

(4) $\alpha W = W \cap \alpha V$ $(\forall \alpha \in R)$.

(5) $\pi W = W \cap \pi V$.

さて A は R-有限生成な R-多元環とし，M_{A^K} は A の K-表現 $\boldsymbol{M}$ の表現加群とする．このとき M_{A^K} の R-形式 V_A が存在し，その R-基 $\{v_i\}$ に関する A

の $(R$-$)$ 表現を $\boldsymbol{X}$ とすれば，$\boldsymbol{M} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{X}$ である．$A \ni a$ に対し $X(a)$ の各成分に $*$ をつけた F 上の行列を $X(a)^*$ と表すことにすれば

$$\boldsymbol{X}^* : A^* \to M_n(F) \qquad (a \mapsto X(a)^*)$$

は F 上の多元環 $A^* = A/\pi A$ の表現である．明らかに $V^* = V/\pi V$ は A^*-加群で，その基 $\{v_i^*\}$ に関する表現が上の $\boldsymbol{X}^*$ である．

このように A の K-表現 $\boldsymbol{M}$ が与えられると，それに K-同値な R-表現 $\boldsymbol{X}$ を経由して A^* の F-表現 $\boldsymbol{X}^*$ がえられるが，$\boldsymbol{X}$ の表現加群となる M_{A^K} の R-形式は，A-同型を度外視しても一般には一意的に定まるものではない．したがって下の問 1.10 のように $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*$ などは同値を度外視しても $\boldsymbol{M}$ によって一意的にきまるものではない．しかし次の定理が示すように，$\boldsymbol{X}^*$ の既約成分の集合は $\boldsymbol{X}$ のとり方によらず一意的に定まる．

定理 1.9　A は上と同じとし，$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ は A の K-表現，それぞれの表現加群を M_{A^K}, N_{A^K} とする．また V_A, W_A はそれぞれ $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ の R-形式とし，そのある R-基に関する A の表現を $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ とする．このとき次が成り立つ．

(i)　$M_{A^K} \simeq N_{A^K} \Longrightarrow V^*{}_{A^*} \leftrightarrow W^*{}_{A^*}$.

(ii)　$\boldsymbol{X} \underset{K}{\sim} \boldsymbol{Y} \Longrightarrow \boldsymbol{X}^* \leftrightarrow \boldsymbol{Y}^*$.

［証明］ (Serre [1] p. 125)　(i) を示せばよい．また $N = M$ としてよい．このとき $\pi^m W \subset V$ となる m があるが，W と $\pi^m W$ は A-同型であるから，$\pi^m W$ を改めて W とおいて $W \subset V$ としてよい．$\pi^n V \subset W$ となる自然数 n をとり，n に関する帰納法で $V^* \leftrightarrow W^*$ を示す．

$n = 1$ のときは $\pi W \subset \pi V \subset W \subset V$ となり次の二つの完全系列がえられる：

$$0 \longrightarrow W/\pi V \longrightarrow V/\pi V \longrightarrow V/W \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \pi V/\pi W \longrightarrow W/\pi W \longrightarrow W/\pi V \longrightarrow 0.$$

ここで $V/W \simeq \pi V/\pi W$ であるから $V^* \leftrightarrow W^*$ が成り立つ．

次に $n > 1$ とし $U = \pi^{n-1} V + W$ とおけば，U はまた M の R-形式で $\pi^{n-1} V \subset U \subset V$, $\pi U \subset W \subset U$ となるから帰納法の仮定より $V^* \leftrightarrow U^* \leftrightarrow W^*$ となる．□

問 1.10　有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の 2-進付値を考え，その付値環を R とする．また $G = \langle\sigma\rangle$ は位数 2 の群とし群環 $RG = R1 \oplus R\sigma$ を A とおく．このとき次のような A の R-表

現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ がある：

$$X(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Y(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

この二つの表現について次が成り立つ.

(i) $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は K-同値であるが R-同値ではない.

(ii) $\boldsymbol{X}^*$ と $\boldsymbol{Y}^*$ は F-同値ではない.

§2. 体上の多元環

本章ではこの節以後，特に断らない限り

<u>R-多元環 A，A-加群 V などはすべて R-有限生成</u>

と仮定する．したがって R が体のときは A, V などは R 上有限次元である.

A を体 K 上の多元環とする．このとき A はアルチン環であるから I 章，§8.1 のように A_A は

$$(2.1) \qquad A = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{\mu=1}^{n_i} e_{i\mu}A \qquad (e_{i\mu}A \simeq e_{j\nu}A \Longleftrightarrow i = j)$$

と直既約分解される．ここで $1 = \sum_{i,\mu} e_{i\mu}$ は 1 の原始べき等元分解である.

$\bar{A} = A/J(A)$ とすれば (2.1) に対応して

$$(2.2) \qquad \bar{A} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{\mu=1}^{n_i} \bar{e}_{i\mu}\bar{A} \qquad (\bar{e}_{i\mu}\bar{A} \simeq \bar{e}_{j\nu}\bar{A} \Longleftrightarrow i = j)$$

と分解される．簡単のため e_{i1} を e_i と表すことにする．また IRR(A) で既約な A-加群の同型類のある完全代表系を表すことにすれば

$$\mathrm{IRR}(A) = \{\bar{e}_1\bar{A}, \bar{e}_2\bar{A}, \cdots, \bar{e}_k\bar{A}\}$$

となる．したがって，対応する A の既約表現を

$$\boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{F}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{F}_k$$

とすれば，これらは A の既約表現の同値類の完全代表系である.

A の任意の表現が完全可約であることと A が半単純であることは同値である（I, 8.1 参照)．また一般に A の表現 $\boldsymbol{X}$ が完全可約であることは $X(J(A))$

$=0$ となることと同じである (I,8.2). したがって A の完全可約表現は実質的には $\bar{A}$ の表現と考えてよい.

(2.2) において $\bar{A}_i = \bigoplus_{\mu=1}^{n_i} \bar{e}_{i\mu}\bar{A}$ とおけば, $\bar{A}$ は

(2.3) $$\bar{A} = \bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_k$$

と単純因子の直和に分解される. 各 $\bar{A}_i$ は単純多元環で, $D_i = \mathrm{End}_A(\bar{e}_i\bar{A})$ とおけば

$$\bar{A}_i \simeq M_{n_i}(D_i) \qquad (D_i: \text{斜体})$$

となり, これらはしばしば同一視される. また $\boldsymbol{F}_i$ の次数を f_i とすれば

(2.4) $$f_i = n_i(\dim_K D_i)$$

である. 上の D_i のように多元環が斜体であるとき, これを **多元体** とよぶ.

次の定理はほとんど明らかである.

定理 2.1 A の既約表現 $\boldsymbol{F}$ (あるいは既約加群 V_A) について次の 3 条件は同値である.

(1) $\boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{F}_i \qquad (V \simeq e_iA \quad (A\text{-同型}))$.

(2) $F(\bar{A}_i) \neq 0 \qquad (V\bar{A}_i \neq 0)$.

(3) $j \neq i \Longrightarrow F(\bar{A}_j) = 0 \qquad (V\bar{A}_j = 0)$.

上の定理のような既約表現 $\boldsymbol{F}$ は実質的には単純多元環 $\bar{A}_i$ の表現と考えられ, これを $\bar{A}$ の単純因子 $\bar{A}_i$ に属する既約表現という. 既約加群についても同様のいい表し方をする.

A の表現 $\boldsymbol{X}$ に対してその既約成分を考えれば

$$\boldsymbol{X} \longleftrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} m_i\boldsymbol{F}_i$$

となり, 指標については

$$\chi_{\boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^{k} m_i\chi_{\boldsymbol{F}_i}$$

となる. このとき m_i を $\boldsymbol{X}$ (または $\chi_{\boldsymbol{X}}$) における $\boldsymbol{F}_i$ (または $\chi_{\boldsymbol{F}_i}$) の **重複度** とよぶ. $m_i > 0$ のとき, $\boldsymbol{F}_i$ あるいはこれに同値な既約表現 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{X}$ の既約成分である. 表現加群についても既約成分の重複度が同様に定義される.

一般に既約表現の指標を **既約指標** とよぶ.

定理 2.2 Char $K=0$ のとき, A の二つの表現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して次が成り立つ:

$$\boldsymbol{X} \leftrightarrow \boldsymbol{Y} \Longleftrightarrow \chi_{\boldsymbol{X}} = \chi_{\boldsymbol{Y}}.$$

特に $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ がともに完全可約なときは, 上のことは $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$ と同値である.

[**証明**] $(\Rightarrow)$ は明らかであるから $(\Leftarrow)$ を示す. 各 i について A の元 c_i を

$$\bar{c}_i = 1_{\bar{A}_i} \tag{2.5}$$

となるようにとる. このとき $\boldsymbol{F}_i(c_i) = I$ (単位行列), $j \neq i$ ならば $\boldsymbol{F}_j(c_i) = 0$ となるから, f_j を $\boldsymbol{F}_j$ の次数とし $\chi_{\boldsymbol{X}} = \sum_j m_j \chi_{\boldsymbol{F}_j}$ とすれば $\chi_{\boldsymbol{X}}(c_i) = m_i f_i$ となる. したがって重複度 m_i は指標 $\chi_{\boldsymbol{X}}$ によって定まり $(\Leftarrow)$ がいえる. 定理の後半は明らかである. □

A_A を表現加群とする表現を A の (右) **正則表現** とよび $\boldsymbol{\Gamma}$ で表す. 同様に ${}_AA$ を表現加群とする表現を左正則表現とよび $\boldsymbol{\Gamma}'$ で表す.

定理 2.3 $\bar{A}\bar{e}_i$ を表現加群とする A の表現 $\boldsymbol{F}_i'$ は $\boldsymbol{F}_i$ に同値である.

[**証明**] $\boldsymbol{F}_i'$ は既約表現で, (2.5) のような元 c_i に対して $\boldsymbol{F}_i'(c_i) = I$ となるから $\boldsymbol{F}_i' \sim \boldsymbol{F}_i$ である. □

各 $\boldsymbol{F}_i$ は $(A/J(A))_A$ あるいは ${}_A(A/J(A))$ を表現加群とする表現の既約成分であるから次が成り立つ.

定理 2.4 A の既約表現はすべて A の右 (あるいは左) 正則表現の既約成分である.

特に A が半単純のときは定理 2.3 より次が成り立つ.

定理 2.5 A が半単純ならばその右正則表現と左正則表現は同値である.

A_A の直既約因子, すなわち A の主直既約加群を表現加群とする表現を A の **主直既約表現** という. e_iA を表現加群とする表現を $\boldsymbol{P}_i$ とすれば

$$\boldsymbol{P}_1, \quad \boldsymbol{P}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{P}_k$$

は主直既約表現の同値類の完全代表系である.

注 意　A の右正則表現と左正則表現は一般に同値ではない．これらが同値な多元環は Frobenius 多元環とよばれ，§8 で考察する．

§3．絶 対 既 約 表 現

A は体 K 上の多元環，L は K の拡大体とし，A の二つの (K-) 表現の K-同値と L-同値の間の関係をまず考えよう．A の L-表現は A^L の (L-) 表現と実質的に同じであった．特に $\boldsymbol{X}$ を A の (K-) 表現，V_A をその表現加群とするとき，$\boldsymbol{X}$ は A の L-表現とみることができて，対応する A^L の表現 $\boldsymbol{X}^L$ の表現加群は V^L である．

定 理 3.1　$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を A の二つの (K-) 表現とし，それぞれの表現加群を V, W とする．このとき $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ が L-同値ならば K-同値である．すなわち

$$(V^L)_{A^L} \simeq (W^L)_{A^L} \Longrightarrow V_A \simeq W_A.$$

［**証 明**］ $\boldsymbol{X}$ の次数を n とし，$\{a_1, \cdots, a_s\}$ を A の K-基とすれば，仮定により $M_n(L) \ni P = (\xi_{ij})$ で次をみたすものがある：

(3.1)　　　$X(a_i)P = PY(a_i) \qquad (1 \leq i \leq s),$

(3.2)　　　$\det P \neq 0.$

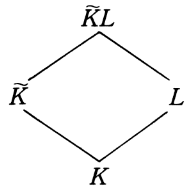
(1)　L が K の代数的拡大のとき：　K に $\{\xi_{ij}\}$ を添加した体を L_1 とすれば，L_1 は K の有限次拡大で $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は L_1-同値である．したがって $V^{L_1} \simeq W^{L_1}$．ここで $\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$ を L_1 の K-基とすれば

$$V^{L_1} = L_1 \otimes_K V = \textstyle\bigoplus_{i=1}^m \omega_i \otimes_K V$$

となるが，これを A-加群とみれば　$\omega_i \otimes_K V \simeq V$　であるから $V^{L_1} \simeq mV$ となる．同様に $W^{L_1} \simeq mW$ (A-同型) となり，V^{L_1}, W^{L_1} の直既約分解を考えれば Krull-Schmidt-東屋の定理より $V_A \simeq W_A$ をえる．

(2)　$|K| = \infty$ のとき：　(3.1) は n^2 個の変数 $\{\xi_{ij}\}$ に関する K の元を係数とする斉次連立一次方程式とみることができる．これが L において自明でない解をもつから，連立方程式の係数のつくる行列の階数を考えて (3.1) は K においても自明でない解をもつ．その K における基本解を $P_1, \cdots, P_r$ とし $x_1, \cdots, x_r$ を変数とすれば，$\det(x_1P_1 + \cdots + x_rP_r) = f(x_1, \cdots, x_r)$ は K 上の多項式で，$P = \sum_i \lambda_i P_i$ ($\lambda_i \in L$)

とすれば $f(\lambda_1,\cdots,\lambda_r) \neq 0$ であるから $f(x_1,\cdots,x_r) \neq 0$ である．したがって $|K| = \infty$ より，$f(\mu_1,\cdots,\mu_r) \neq 0$ となる K の元 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ があることが r に関する帰納法で容易に示される．このとき $Q = \sum_i \mu_i P_i$ とおけば $\det Q \neq 0$ で $Q^{-1}X(a)Q = Y(a)$ $(\forall a \in A)$ となり，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は K-同値である．



(3) 一般のとき： L の代数的閉包 $\tilde{L}$ において，K の代数的閉包を $\tilde{K}$ とおけば $|\tilde{K}| = \infty$ である．仮定により $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は $\tilde{K}L$-同値で，したがって (2) より $\tilde{K}$-同値，よって (1) より K-同値になる．□

以下 A は体 K 上の多元環とし，§2の記号をそのまま用いることにする．

$\boldsymbol{F}$ は A の既約表現，V はその表現加群とする．このとき K の拡大体 L に対して，$\boldsymbol{F}$ を L-表現とみれば一般に既約とは限らない．K の任意の拡大体 L に対して $\boldsymbol{F}^L$ が A^L の既約表現であるとき，すなわち V^L が既約な A^L-加群であるとき $\boldsymbol{F}$，あるいは V は **絶対既約** であるという．

絶対既約性と同値な条件を求めるため補題を一つ準備しておく．

補題 3.2 D は体 K 上（有限次元）の多元体とする．

(i) $K \subsetneqq D$ ならば K の有限次拡大 L で，D^L が多元体にならないようなものが存在する．

(ii) K が代数的閉体ならば $D = K$ である．

[**証明**] (i) $D - K \ni a$ をとり $L = K[a]$ とおけば，L は K の有限次拡大体である (I,1.7)．$D^L = L \otimes_K D$ が多元体であると仮定すれば，その部分多元環 $L \otimes_K L$ は上と同じ理由で体である．一方 $f : L \otimes_K L \to L$ $(\sum_i a_i \otimes b_i \mapsto \sum_i a_i b_i)$ は K-多元環の全準同型で，$L \supsetneqq K$ であるから K 上の次元を比較して f は同型ではない．これは矛盾である．

(ii) K の有限次拡大は K に限るから (i) より明らかである．□

定理 3.3 $\boldsymbol{F}_i$ は A の n_i 次の既約表現，$\bar{e}_i\bar{A}$ はその表現加群とする．このとき次の5条件は同値である．

（1） $\boldsymbol{F}_i$ は絶対既約である．

（2） K を含む代数的閉体 $\tilde{K}$ に対して $\boldsymbol{F}_i{}^{\tilde{K}}$ は $A^{\tilde{K}}$ の既約表現である．

（3） $\mathrm{End}_A(\bar{e}_i\bar{A})\ (\simeq \bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i) = K$．

（4） $\bar{A}_i \simeq M_{n_i}(K)$．（ただし $\bar{A}_i$ は $\boldsymbol{F}_i$ が属する $\bar{A}$ の単純因子である．）

（5） $\boldsymbol{F}_i : A \to M_{n_i}(K)$ は全準同型である．

［**証明**］ (1) ⇒ (2)．定義より明らかである．

(2) ⇒ (3)．$\mathrm{End}_{A^{\tilde{K}}}((\bar{e}_i\bar{A})^{\tilde{K}})$ は仮定により $\tilde{K}$ 上の多元体であるから $\tilde{K}$ と一致する．一方，$\mathrm{End}_{A^{\tilde{K}}}((\bar{e}_i\bar{A})^{\tilde{K}}) \simeq \tilde{K} \otimes_K \mathrm{End}_A(\bar{e}_i\bar{A})$ (I, 11.12) であるから，$\tilde{K}$ 上の次元を比較して $\mathrm{End}_A(\bar{e}_i\bar{A}) = K$ をえる．

(3) ⇒ (4)．明らかである．

(4) ⇒ (5)．一般に $\boldsymbol{F}_i$ は忠実な表現 $\bar{A}_i \to M_{n_i}(K)$ を引き起すが，K 上の次元を比較してこれが全射であることがわかる．

(5) ⇒ (1)．$\boldsymbol{F}_i$ は同型 $\bar{A}_i \simeq M_{n_i}(K)$ を引き起す．L を K の任意の拡大体とすれば $\bar{A}_i{}^L \simeq M_{n_i}(L)$ となり，A^L-加群として $\bar{A}_i{}^L \simeq n_iW$, W_{A^L} は既約である．一方 $\bar{A}_i \simeq n_i\bar{e}_i\bar{A}$ であるから $\bar{A}_i{}^L \simeq n_i(\bar{e}_i\bar{A})^L$ となり，$(\bar{e}_i\bar{A})^L \simeq W$ でこれは既約である．□

上の定理から直ちに次がえられる．

系 3.4 K が代数的閉体ならば，K-多元環 A の任意の既約表現は絶対既約である．

また次の **Schur の補題** がえられる．

補題 3.5 (Schur) $\boldsymbol{F}$ は A の絶対既約表現とし，その次数を n とする．

（i） $P \in M_n(K)$ とするとき次が成り立つ：

$$PF(a) = F(a)P \quad (\forall a \in A) \Longrightarrow P = \lambda I \text{（スカラー行列）}.$$

（ただし $\lambda \in K$，I は単位行列とする．）

（ii） z が A の中心 $Z(A)$ の元ならば $F(z) = \zeta(z)I$ となり，$\zeta : Z(A) \to K$ $(z \mapsto \zeta(z))$ は $Z(A)$ の 1 次の表現である．

特に A 自身可換であれば，その絶対既約表現の次数はすべて 1 である．

［**証明**］ 定理 3.3 (5) より $F(A) = M_n(K)$ であるから (i) が成り立つ．(ii) は (i) より明らかである．□

補題 3.6 A は代数的閉体 K 上の多元環とする．

(i) $a \in A$ とする．このとき A の表現 $\boldsymbol{X}$ に対しそれと同値な表現 $\boldsymbol{X}'$ を適当にとれば，$X'(a)$ は下半三角行列になる：

$$(3.3)\qquad X'(a) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

特に a がべき零元ならば $\chi_{\boldsymbol{X}}(a) = 0$ である．

(ii) $e \in \mathrm{pi}(A)$ で，$\boldsymbol{F}$ は $F(e) \neq 0$ である A の既約表現とする．このとき $\boldsymbol{F}$ に同値な表現 $\boldsymbol{F}'$ を適当にとれば

$$(3.4)\qquad F'(e) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

となる．特に $\chi_{\boldsymbol{F}}(e) = 1$ である．

［**証明**］(i) $B = K[a]$ は A の可換な部分多元環である．$\boldsymbol{X}$ を B に制限した B の表現を考えれば，その既約成分はすべて 1 次であるから (3.3) のような同値表現 $\boldsymbol{X}'$ がある．特に a がべき零ならば $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる．

(ii) $\bar{A} = A/J(A)$ とするとき，$\bar{e}\bar{A}$ は $\boldsymbol{F}$ の表現加群で，これは $K[e]$-加群として次のように直和分解される：$\bar{e}\bar{A} = \bar{e}\bar{A}\bar{e} \oplus \bar{e}\bar{A}(\bar{1} - \bar{e})$．ここで $\bar{e}\bar{A}\bar{e} = K\bar{e}$ であるから，$\bar{e}\bar{A}$ の K-基として $\bar{e}$ に $\bar{e}\bar{A}(\bar{1} - \bar{e})$ の K-基をつけ加えたものをとり，この基に関する表現を $\boldsymbol{F}'$ とすれば $F'(e)$ は (3.4) のようになる．□

上の補題から次の定理がえられる．

定理 3.7 $I = \sum_{i=1}^{r} Ka_i$ は A の右イデアルで，a_i はすべてべき零元とする．このとき I はべき零な右イデアルである．

［**証明**］$\tilde{K}$ を K の代数的閉包とするとき，$I^{\tilde{K}} = \sum_i \tilde{K}a_i$ がべき零であることを示せば十分であるから，最初から K は代数的閉体としてよい．また $\bar{A} = A/J(A)$ において $\bar{I} = \sum_i K\bar{a}_i = 0$ を示せば $I \subset J(A)$ となるから，A は半単純と仮定して $I = 0$ を示す．

結論を否定して $I \neq 0$ とすれば，I は A の原始べき等元 e を含む．いま eA を表現加群とする A の既約表現を $\boldsymbol{F}$ とすれば，上の補題 (i) より $\chi_{\boldsymbol{F}}(I) = 0$ となるが，一

方 (ii) より $\chi_F(e)=1$ であるから矛盾である. □

A の表現を考えることはその表現加群を考えることと本質的には同じことであるから, 以後必要のない限り定理等は A-加群についてのべることにする.

さて絶対既約加群の重複度については次が成り立つ.

定理 3.8 $e \in \mathrm{pi}(A)$ とし, $\bar{e}\bar{A}$ は絶対既約な A-加群であると仮定する. このとき A-加群 V における $\bar{e}\bar{A}$ の重複度は $\dim_K Ve = \dim_K \mathrm{Hom}_A(eA, V)$ に等しい.

[**証明**] 求める重複度は $(Ve)_{eAe}$ の組成列の長さに等しい (I, 8.11). 一方

$$eAe/J(eAe) = eAe/(eAe \cap J(A)) \simeq \bar{e}\bar{A}\bar{e} = K$$

であるから, 既約な eAe-加群は K 上 1 次元で, したがって $(Ve)_{eAe}$ の組成列の長さは $\dim_K Ve$ に一致する. □

補題 3.9 L は K の拡大体とする. このとき次が成り立つ.

(i) M を既約な A^L-加群とすれば, M はある $(\bar{e}_i\bar{A})^L$ の既約成分となり, このような i は唯一つ定まる.

(ii) 二つの既約な A-加群 U, V が A-同型でなければ, U^L と V^L は同型な既約成分をもたない. したがって $|\mathrm{IRR}(A)| \leq |\mathrm{IRR}(A^L)|$ となる.

[**証明**] (i) $A \leftrightarrow \bigoplus_i m_i\bar{e}_i\bar{A}$ とすれば $A^L \leftrightarrow \bigoplus_i m_i(\bar{e}_i\bar{A})^L$ となり, M は A^L の既約成分であるから, ある $(\bar{e}_i\bar{A})^L$ の既約成分である. このとき $A \ni c_j$ を $\bar{c}_j = 1_{\bar{A}_j}$ となるようにとれば $Mc_i \neq 0$, $j \neq i$ ならば $Mc_j = 0$ となるから, このような i は一意的に定まる.

(ii) 上のような i の一意性から $i \neq j$ ならば $(\bar{e}_i\bar{A})^L$ と $(\bar{e}_j\bar{A})^L$ は同型な既約成分をもたない. □

K の拡大体 L に対して $A^L/J(A^L)$ の単純因子がすべて L 上の全行列環であるとき, すなわち A の任意の既約な L-表現が絶対既約であるとき, L は A の**分解体**であるという.

問 3.10 (i) L が A の分解体ならば, L の任意の拡大体はまた A の分解体である.

（ii） L が K の代数的閉包を含めば，L は A の分解体である．

A の分解体については次が成り立つ．

定理 3.11 K の有限次拡大 L で A の分解体となるものがある．

[証明] $\tilde{K}$ は K の代数的閉包とし，$\boldsymbol{M}_1, \cdots, \boldsymbol{M}_l$ を $A^{\tilde{K}}$ の既約表現の同値類の完全代表系とする．また $M_p(a) = (\alpha_{ij}^{(p)}(a))$，$A = \bigoplus_{\nu=1}^{m} Ka_\nu$ とするとき，K に $\{\alpha_{ij}^{(p)}(a_\nu)\}_{p,\nu,i,j}$ を添加した体を L とすればよい．実際 L は明らかに K の有限次拡大で，$\boldsymbol{M}_p$ の A^L への制限を $\boldsymbol{M}_p'$ とすれば $(\boldsymbol{M}_p')^{\tilde{K}} = \boldsymbol{M}_p$ となり，これは既約であるから $\boldsymbol{M}_p'$ は絶対既約である．また $p \neq q$ ならば $\boldsymbol{M}_p'$ と $\boldsymbol{M}_q'$ は非同値であるから，補題 3.9 (ii) より $\boldsymbol{M}_1', \cdots, \boldsymbol{M}_l'$ は A^L の既約表現の同値類の完全代表系である．□

また次の補題が成り立つ．

補 題 3.12 L は K の拡大体とし，$M_n(A)$ は A 上の全行列環とする．このとき次が成り立つ：

$$L \text{ は } A \text{ の分解体} \Longleftrightarrow L \text{ は } M_n(A) \text{ の分解体．}$$

[証明] $M_n(A)^L \simeq M_n(A^L)$，$J(M_n(A^L)) = M_n(J(A^L))$ (I, 3.11) である．したがって $A^L/J(A^L) \simeq \bigoplus_i M_{n_i}(D_i)$ （D_i は多元体） とすれば

$$M_n(A)^L/J(M_n(A)^L) \simeq M_n(A^L/J(A^L)) \simeq \bigoplus_i M_{nn_i}(D_i)$$

となり，これより補題は明らかである．□

絶対既約表現の指標について次が成り立つ．

定理 3.13 A の（同値でない）既約表現 $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_r$ がすべて絶対既約ならば，それらの指標 $\chi_{F_1}, \cdots, \chi_{F_r}$ は K 上一次独立である．

[証明] $\boldsymbol{F}_i$ の表現加群を $\bar{e}_i\bar{A}$ （$e_i \in \mathrm{pi}(A)$）とすれば，補題 3.6 (ii) より $\chi_{F_i}(e_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i,\ j \leq r)$ となり，これより一次独立性が導かれる．□

K-多元環 A において，K 自身 A の分解体になっているとき A は **K 上の分解多元環**，あるいは **分解型** の K-多元環であるという．このような多元環の既約表現の個数については次が成り立つ．

定理 3.14 A は半単純な K 上の分解多元環とする．このとき A の（絶対）

既約表現の同値類の個数は，A の中心 $Z(A)$ の K 上の次元に等しい．

［証明］　$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k, \quad A_i = M_{n_i}(K)$

としてよい．このとき $Z(A) = Z(A_1) \oplus \cdots \oplus Z(A_k)$ で，各 $Z(A_i)$ はスカラー行列の全体であるから $Z(A_i) = K$ である．よって $k = \dim_K Z(A)$ となる．□

注意　一般の場合については次の Brauer の結果が知られている．すなわち A は K 上の分解多元環とし，$S(A) = \sum_{a,b \in A} K[a,b]$ (ただし $[a,b] = ab - ba$), Char $K = p > 0$ のときは $T(A) = \{a \in A;\ ある\ n\ に対し\ a^{p^n} \in S(A)\}$ とおく．このとき A の絶対既約表現の同値類の個数 k は次で与えられる．

(i)　$k = \dim_K (A/(S(A)+J(A)))$.

(ii)　Char $K = p > 0$ ならば $T(A) = S(A) + J(A)$ で，したがって

$$k = \dim_K A - \dim_K T(A).$$

(証明については Curtis-Reiner [1]，p. 597 参照)

最後に二つの多元環のテンサー積の絶対既約表現について考察しよう．

A, B は体 K 上の二つの多元環とし，A については § 2 の記号をそのまま用いることにし，B については $\bar{B} = B/J(B)$ とおいて (2.1), (2.3) に対応する分解をそれぞれ

$$B = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{\mu=1}^{m_i} f_{i\mu} B,$$

$$\bar{B} = \bar{B}_1 \oplus \bar{B}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{B}_l, \qquad \bar{B}_i = \bigoplus_{\mu=1}^{m_i} \bar{f}_{i\mu} \bar{B}$$

とする．また f_{i1} を f_i と略記し，簡単のため $\otimes_K$ の K を省略してかくことにする．

このとき $A \otimes B$ において $J(A) \otimes B + A \otimes J(B)$ はべき零イデアルであるから $J(A \otimes B) \supset J(A) \otimes B + A \otimes J(B)$ である．また

$$A \otimes B/(J(A) \otimes B + A \otimes J(B)) \simeq \bar{A} \otimes \bar{B} = \bigoplus_{i,j} \bar{A}_i \otimes \bar{B}_j$$

となるが，これは一般に半単純ではない．しかし例えば A, B がともに K 上の分解多元環のときは　$\bar{A}_i \otimes \bar{B}_j = M_{n_i}(K) \otimes M_{m_j}(K) = M_{n_i m_j}(K)$ となって，これは単純多元環であるから $\bar{A} \otimes \bar{B}$ は半単純で，$J(A \otimes B) = J(A) \otimes B + A \otimes J(B)$ となる．また $A \otimes B$ も K 上の分解多元環である．

定理 3.15 A, B は K 上の分解多元環とする．また V_A, W_B はそれぞれ A, B の（絶対）既約加群とすれば，$V \otimes W$ は $A \otimes B$ の（絶対）既約加群である．逆に $A \otimes B$ の任意の（絶対）既約加群は適当な V_A, W_B をとって $V \otimes W$ とかける．したがって次が成り立つ：

$$\mathrm{IRR}(A \otimes B) = \{V \otimes W \,;\, V \in \mathrm{IRR}(A),\ W \in \mathrm{IRR}(B)\},$$
$$|\mathrm{IRR}(A \otimes B)| = |\mathrm{IRR}(A)| \cdot |\mathrm{IRR}(B)|.$$

［**証明**］ この定理の上でのべた記号を用いて $V = \bar{e}_i \bar{A}$, $W = \bar{f}_j \bar{B}$ としてよい．このとき $\bar{A}_i \otimes \bar{B}_j \simeq n_i m_j V \otimes W$ であるが，上でみたように $\bar{A}_i \otimes \bar{B}_j = M_{n_i m_j}(K)$ で，これは $n_i m_j$ 個の既約な $A \otimes B$ 加群の直和であるから $(V \otimes W)_{A \otimes B}$ は既約である．また

$$\overline{A \otimes B} = \bar{A} \otimes \bar{B} = \bigoplus_{i,\mu} \bigoplus_{j,\nu} \bar{e}_{i\mu} \bar{A} \otimes \bar{f}_{j\nu} \bar{B}$$

であるから，既約な $A \otimes B$ 加群はある $\bar{e}_i \bar{A} \otimes \bar{f}_j \bar{B}$ に同型である．後半は上の考察から明らかである．□

§4. 単純多元環

4.1 中心的単純多元環

環 A が環 B の部分環であるとき，A のすべての元と可換な B の元の全体は B の部分環である．これを $C_B(A)$ とかいて B における A の**可換子環**という：

$$C_B(A) = \{b \in B \,;\, ab = ba \ (\forall a \in A)\}.$$

二つの K-多元環 A, B の K 上のテンサー積を簡単のため $A \otimes B$ とかく．$A \otimes B$ においては $a \otimes 1_B$ と a を同一視して $A \subset A \otimes B$ と考えてよい．同様に $1_A \otimes b$ と b を同一視して B も $A \otimes B$ の部分環と考えることができる．このとき A と B は元ごとに可換で $A \otimes B = AB = \{\sum_i a_i b_i \,;\, a_i \in A, b_i \in B\}$ となる．

補題 4.1 A, B は K-多元環，A_1, B_1 はそれぞれ A, B の部分多元環で 1_A,

1_B を含むものとする．このとき次が成り立つ．

(i) $C_{A\otimes B}(A_1) = C_A(A_1)\otimes B$．特に $C_{A\otimes B}(A) = Z(A)\otimes B$．

(ii) $C_{A\otimes B}(A_1\otimes B_1) = C_A(A_1)\otimes C_B(B_1)$．

(iii) $Z(A\otimes B) = Z(A)\otimes Z(B)$．

ただし，ここでは A,B の K 上の次元の有限性は仮定しない．

［**証明**］ (i) $\{b_i\}_{i\in I}$ を B の K-基とすれば，$A\otimes B$ の元 x は $x = \sum_i a_i\otimes b_i$ (有限和，$a_i \in A$) と一意的に表される．$a \in A$ に対し $ax = \sum_i (aa_i)\otimes b_i$, $xa = \sum_i (a_i a)\otimes b_i$ であるから，$x \in C_{A\otimes B}(A_1) \Longleftrightarrow a_i \in C_A(A_1)$ $(\forall i)$ となり (i) が成り立つ．

(ii) A_1, B_1 はそれぞれ A, B と単位元を共有するから $A_1, B_1 \subset A_1B_1$，$A_1\otimes B_1 = A_1B_1$ となる．したがって (i) を用いて

$$\begin{aligned} C_{A\otimes B}(A_1\otimes B_1) &= C_{A\otimes B}(A_1) \cap C_{A\otimes B}(B_1) \\ &= (C_A(A_1)\otimes B) \cap C_{A\otimes B}(B_1) \\ &= C_{C_A(A_1)\otimes B}(B_1) = C_A(A_1)\otimes C_B(B_1). \end{aligned}$$

(iii) は (ii) で $A_1 = A$，$B_1 = B$ とおけばよい．□

さて $A = M_n(D)$ (D は多元体) は単純な K-多元環とする．I を n 次の単位行列とするとき，$D \ni d$ と dI を同一視して $D \subset A$ と考えてよい．このとき中心について $Z(A) = Z(D)$ となり，これは体である．特に $Z(A) = K$ であるときは A は (K 上) **中心的単純** な多元環であるという．特に A が多元体のときは K 上の **中心的多元体** とよぶ．

任意の単純多元環 A はその中心 $Z = Z(A)$ 上の多元環と考えることができるが，このとき A は Z 上中心的単純な多元環である．

定理 4.2 A は K 上中心的単純な多元環とする．また B は K-多元環とするとき次が成り立つ．(ただし (i),(ii) では $\dim_K B$ の有限性は仮定しない．)

(i) $A\otimes B$ のイデアルはすべて $A\otimes I$ (I は B のイデアル) の形に表される．

(ii) B が単純ならば $A\otimes B$ も単純である．特に K の任意の拡大体 L に対

して A^L は L 上中心的単純な多元環である．また B が中心的単純ならば $A\otimes B$ も中心的単純である．

(iii) $J(A\otimes B)=A\otimes J(B)$.

［証明］（i） $\{b_i\}_{i\in I}$ を B の K-基とすれば $A\otimes B=\bigoplus_i A\otimes b_i$ となる．A は単純であるから (A,A)-両側加群として既約である．$A\subset A\otimes B$ と考えて，乗法によって $A\otimes B$ を (A,A)-両側加群とみれば $A\otimes b_i$ は A に同型な部分加群で，したがって $A\otimes B$ は (A,A)-完全可約である．いま M を $A\otimes B$ のイデアルとすれば，これは $A\otimes B$ の (A,A)-部分加群であるから $M=\bigoplus_j M_j$, ${}_A(M_j)_A\simeq {}_AA_A$ となる．この同型で 1_A に対応する M_j の元を c_j とすれば，$ac_j=c_ja$ $(\forall a\in A)$ となるから $c_j\in C_{A\otimes B}(A)=Z(A)\otimes B=B$ をえる．よって $M=\bigoplus_j A\otimes c_j$ となり，$I=\bigoplus_j Kc_j$ とおけば $M=A\otimes I$ となる．ここで $BM=MB=M$ であるから I は B のイデアルである．

（ii） 最初の主張は (i) より明らかである．また残りの主張は補題 4.1 (iii) より導かれる．

(iii) 右辺は $A\otimes B$ のべき零イデアルであるから 左辺 $\supset$ 右辺 が成り立つ．一方 $J(A\otimes B)=A\otimes I$ とすれば，I は B のべき零イデアルとなるから $I\subset J(B)$，したがって 左辺 $\subset$ 右辺 をえる．□

中心的単純な多元環の単純部分多元環とその可換子環を考察するため少し準備をしておく．

補題 4.3 単純な K-多元環を $A=M_r(D)$ （D は多元体）とし，U をその既約加群とする．また V は A-加群とし，$E=\mathrm{End}_A(V)$ とおく．このとき

（i） 自然数 s に対し $V_A\simeq sU_A \Longrightarrow E\simeq M_s(D)$．また M を既約な左 E-加群とすれば ${}_EV\simeq r({}_EM)$ となる．

（ii） $(\dim_K A)(\dim_K E)=(\dim_K V)^2$.

(iii) $A\ni a$ に対し $\varphi_a: V\to V$ $(v\mapsto va)$ は E-準同型で，次の同型がえられる：

$$\varphi: A \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_E(V) \qquad (a\mapsto \varphi_a).$$

［証明］ $V\simeq sU$, $\mathrm{End}_A(U)\simeq D$ より $E\simeq M_s(D)$ となり，これは単純多元環で

ある．また $\dim_K U = r \dim_K D$ より $\dim_K V = rs \dim_K D$ となり (ii) が成り立つ．さらに $\dim_K M = s \dim_K D$ より (i) の後半がえられる．(iii) において φ_a は明らかに E-準同型で，A は単純であるから $\varphi: A \to \mathrm{End}_E(V)$ は単準同型である．ここで V_A の代りに ${}_EV$ を考えれば，(i) より $\mathrm{End}_E(V) \simeq M_r(D) = A$ となるから，次元を比較して φ が同型であることがわかる．□

V が忠実な A-加群のとき，V の基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に関する表現 $\boldsymbol{X}: A \to M_n(K)$ は単準同型で，a と $X(a)$ を同一視して $A \subset M_n(K)$ と考えてよい．また $E = \mathrm{End}_A(V)$ とおけば V は忠実な左 E-加群で，したがって E^0 を E に逆同型な多元環とすれば V は忠実な右 E^0-加群となり，上と同様に基 $\{v_i\}$ に関する表現を通して $E^0 \subset M_n(K)$ と考えられる．このとき E^0 は $M_n(K)$ における A の可換子環と一致するから，補題 4.3 から次がえられる．

補題 4.4 $M_n(K) \supset A$ は単純多元環とし，$A = M_r(D)$ (D は多元体) とする．このとき $B = M_n(K)$ とおけば次が成り立つ．

(i) ある s に対して $C_B(A) \simeq M_s(D^0)$.

(ii) $(\dim_K A)(\dim_K C_B(A)) = \dim_K B \ (= n^2)$.

K-多元環 A に逆同型な多元環を A^0 とするとき，$A^0 \otimes_K A$ を A の **包絡多元環** とよび A^e と表す．このとき A に対する A^e の作用で $x(a^0 \otimes b) = axb$ (ただし $x, a, b \in A$) となるものが定義され，A は A^e-加群になる．

補題 4.5 A は K 上中心的単純な多元環で $\dim_K A = n$ とする．このとき次が成り立つ：

$$A^e = A^0 \otimes A \simeq M_n(K).$$

［**証明**］ 定理 4.2 (ii) より A^e は単純で，したがって A は忠実な A^e-加群となるから単準同型 $\varphi: A^e \to M_n(K)$ が存在する．このとき次元を比較してこれが同型であることがわかる．□

以上の準備のもとで，単純多元環に関する次の基本定理がえられる．

定理 4.6 B は K 上中心的単純な多元環とし，A は B の単位元を含む部分

多元環で単純であるとする．このとき次が成り立つ．

(i) $C_B(A)$ は単純多元環で，それに属する多元体は $B\otimes A^0$ に属する多元体に同型である．

(ii) $(\dim_K A)(\dim_K C_B(A)) = \dim_K B$.

(iii) $C_B(C_B(A)) = A$.

(iv) $Z(A) = A\cap C_B(A) = Z(C_B(A))$.

(v) A が中心的単純ならば $C_B(A)$ も中心的単純で，$A\otimes C_B(A)\simeq B$ となる．

(vi) (Skolem-Noether) $\sigma: A \cong A' (\subset B)$ が A から B の部分多元環 A' への（多元環としての）同型ならば，σ は B の内部自己同型に拡張できる．すなわち B の正則元 b が存在して $\sigma(a) = b^{-1}ab$ $(\forall a\in A)$ となる．

［証明］ まず (i), (ii) を示す．$B = M_n(K)$ のときは補題 4.4 で示した．一般の場合は補題 4.5 より $B^e = B^0\otimes B = M_n(K)\supset B^0\otimes A$ としてよい．このとき B^0 は中心的単純であるから $B^0\otimes A$ は単純で，補題 4.1 より $C_{B^e}(B^0\otimes A) = Z(B^0)\otimes C_B(A)\simeq C_B(A)$ となり，補題 4.4 よりこれは単純である．またそれに属する多元体は $B^0\otimes A$ に属する多元体に逆同型で (i) が成り立つ．(ii) が成り立つことは補題 4.4 (ii) より容易にわかる．

(iii) $A\subset C_B(C_B(A))$ と，(ii) において A の代りに $C_B(A)$ を考えてえられる等式から次元を比較して導かれる．

(iv) 最初の等式は明らかで，2 番目の等式は (iii) から導かれる．

(v) 前半は (iv) より明らかである．また準同型 $A\otimes C_B(A)\to B$ $(\sum_i a_i\otimes c_i\mapsto \sum_i a_ic_i)$ を考えれば，$A\otimes C_B(A)$ の単純性と次元の比較からこれが同型であることがわかる．

(vi) V_B を既約な B-加群とすれば，$D = \mathrm{End}_B(V)$ は中心的多元体で，補題 4.3 (iii) より $\mathrm{End}_D(V) = B$ である．また $D^0\otimes A$ は単純で，V は次のような作用で $D^0\otimes A$-加群になる：$v(d^0\otimes a) = (dv)a$ $(v\in V,\ d\in D,\ a\in A)$.

一方 $V^{(\sigma)}$ を K-加群としては V と同じとし，$D^0\otimes A$ の作用を

$$v\cdot(d^0\otimes a) = (dv)\sigma(a)$$

をみたすように定義してえられる $D^0\otimes A$-加群とする．このとき $D^0\otimes A$ の単純性よ

り $D^0 \otimes A$-同型 $\varphi: V \cong V^{(\sigma)}$ が存在する．$\varphi(dv) = \varphi(v(d^0 \otimes 1_A)) = \varphi(v)\cdot(d^0 \otimes 1_A) = d\varphi(v)$ であるから $\varphi \in \mathrm{End}_D(V) = B$ となり，$\varphi(v) = vb$ $(\forall v \in V)$ となる $b \in B$ が存在する．ここで φ は同型であるから b は B の正則元である．また任意の $v \in V$, $a \in A$ に対して

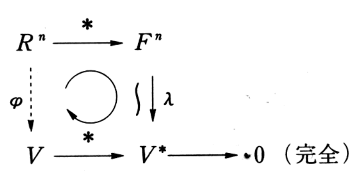
$$\begin{aligned} vab = \varphi(va) &= \varphi(v(1_{D^0} \otimes a)) = \varphi(v)\cdot(1_{D^0} \otimes a) \\ &= \varphi(v)\sigma(a) = vb\sigma(a) \end{aligned}$$

となるから $ab = b\sigma(a)$，$\sigma(a) = b^{-1}ab$ をえる．□

上の定理の (vi) の系として，特に中心的単純多元環 B の（多元環としての）自己同型は内部自己同型に限ることがわかるが，このことは次のようにして可換な局所環上の全行列環の場合に拡張される．

いま R は可換な局所環とし，その極大イデアルを $\mathfrak{m}\,(= J(R))$，剰余体を $F = R/\mathfrak{m}$ とおいて，自然な準同型 $R \to F$ による R の元 a の像を a^* と表すことにする．また R-加群 V に対し $V^* = V/V\mathfrak{m}$ とおけばこれは F-加群で，R-準同型 $\varphi: V \to W$ に対し F-準同型 $\varphi^*: V^* \to W^*$ $(v^* \mapsto \varphi(v)^*)$ が自然に定義される．

補題 4.7　R は上と同じとし $A = M_n(R)$ とおく．また R^n は R 上 n 次元の行ベクトル全体のつくる加群とし，これを自然に A-加群とみる．このとき A-加群 V が R-自由で，かつ $\mathrm{rank}_R V = n$ ならば $V \simeq R^n$（A-同型）となる．



［証明］　$A^* = A/A\mathfrak{m} = M_n(F)$ は体 F 上の単純多元環であるから A^*-同型 $\lambda: (R^n)^* = F^n \cong V^*$ がある．ここで R^n は A-射影的であるから A-準同型 $\varphi: R^n \to V$ で $\varphi^* = \lambda$ となるものがある．このとき R^n, V はともに R-加群とみて V^* の射影被覆で，したがって φ は同型である (I, 10.14)．□

定理 4.8　R は可換な局所環で $A = M_n(R)$ とするとき，A の（多元環としての）自己準同型 $\sigma: A \to A$ は A の内部自己同型である．

［証明］　上の補題と同様に R^n を自然に A-加群とみる．また V は R-加群として

は $V = R^n$ とし，A の作用を $v \cdot a = v\sigma(a)$（右辺は自然な作用）と定義してえられる A-加群とする．このとき上の補題より A-同型 $\varphi: R^n \cong V$ がある．明らかに $\varphi \in \mathrm{End}_R(R^n) = M_n(R) = A$ であるから，$a \in A$ が存在して $\varphi(v) = va$ $(\forall v \in R^n)$ となり，φ は同型であるから a は A の正則元である．また任意の $v \in R^n$, $x \in A$ に対して

$$vxa = \varphi(vx) = \varphi(v) \cdot x = \varphi(v)\sigma(x) = va\sigma(x)$$

となるから，$xa = a\sigma(x)$，$\sigma(x) = a^{-1}xa$ をえる．□

4.2 Brauer 群

二つの K 上中心的単純な多元環 A, B は，それらに属する多元体が同型であるとき **相似** であるといって $A \sim B$ と表す．これは明らかに同値関係で，その同値類を **多元環類** とよび，A を含む多元環類を (A) と表す．

補題 4.9 K 上中心的単純な多元環について次が成り立つ．

(i) $A \sim A' \Longleftrightarrow M_m(A) \simeq M_n(A')$ となる m, n がある．

(ii) $A \sim A'$, $B \sim B' \Longrightarrow A \otimes B \sim A' \otimes B'$.

[**証明**] (i) $A = M_r(D)$，$A' = M_s(D')$，D と D' は多元体とする．

$(\Rightarrow)$ $D \simeq D'$ ならば明らかに $M_s(A) \simeq M_{rs}(D) \simeq M_{rs}(D') \simeq M_r(A')$ となる．

$(\Leftarrow)$ $M_{mr}(D) \simeq M_{ns}(D')$ ならば $D \simeq D'$ である (I, 8.7)．

(ii) $M_m(A) \simeq M_n(A')$，$M_r(B) \simeq M_s(B')$ とすれば $M_m(A) \otimes M_r(B) \simeq M_n(A') \otimes M_s(B')$，したがって $M_{mr}(A \otimes B) \simeq M_{ns}(A' \otimes B')$ となる．□

上の補題の (ii) により二つの多元環類 $(A), (B)$ の積 $(A) \times (B)$ を $(A \otimes B)$ と定義することができる．このとき

$$(A) \times (K) = (K) \times (A) = (A), \qquad (A^0) \times (A) = (A) \times (A^0) = (K)$$

となるから，多元環類の全体は (K) を単位元とする群をつくり，(A) の逆元は (A^0) である．この群を（K 上の）**Brauer 群** とよび $\mathcal{B}(K)$ と表す．

問 4.10 A, B は K 上中心的単純な多元環で L は K の拡大体とする．このとき A^L, B^L はともに L 上中心的単純な多元環となるが（定理 4.2 (ii)），次のことが成り立つ：

（i）　$A \sim B \Longrightarrow A^L \sim B^L$.

（ii）　L が A の分解体 $\Longleftrightarrow A^L \sim L$.

上の問より L が K 上中心的単純な多元環 A の分解体であるとき，L は多元環類 (A) の分解体であるといってよい．またこのとき $A^L \simeq M_n(L)$ となり，$\dim_K A = \dim_L A^L = n^2$ であるから次の定理がえられる．

定理 4.11　K 上中心的単純な多元環 A に対し $\dim_K A$ は平方数である．

また中心的単純な多元環の分解体については次が成り立つ．

定理 4.12　A は K 上中心的単純な多元環とする．このとき

（i）　A の極大可換部分体は A の分解体である．

（ii）　K の有限次拡大 L が A の分解体ならば，L を含む A に相似な多元環 B があって $C_B(L) = L$，したがって L は B の極大可換部分体となる．

[証明]　（i）　L を A の極大可換部分体とする．このとき $C_A(L) \supset L$ であるが，定理 4.6 より $C_A(L)$ は単純で $Z(C_A(L)) = L$，また $C_A(L)$ に属する多元体 D は $A \otimes L = A^L$ に属する多元体に同型である．ここで $D \supset L$ と考えてよいが，$D \neq L$ と仮定すれば $D - L \ni a$ に対し $L[a]$ は L より大きい A の可換部分体になって L の極大性に反する．よって $D = L$ で，A^L は L 上の全行列環に同型となり，L は A の分解体である．

（ii）　L が A の分解体ならば $A^L \simeq M_n(L)$ となり，V を既約な A^L-加群とすれば $\dim_L V = n$ である．したがって $\dim_K L = l$ とおけば $\dim_K V = ln$ であって，$E = \mathrm{End}_K(V) \simeq M_{ln}(K)$ となる．A, L の元はそれぞれ V の K-自己同型を引き起し，それらは互いに可換である．したがって $E \supset A^0, L$ と考えてよく，このとき $C_E(A^0) \supset L$ となる．$B = C_E(A^0)$ とおけば，補題 4.4 よりこれは A に相似な中心的単純多元環で $\dim_K B = l^2$ となる．また $C_B(L) \supset L$ であるが，定理 4.6 より $(\dim_K L)(\dim_K C_B(L)) = \dim_K B$ であるから $\dim_K C_B(L) = l$ となり，$C_B(L) = L$ をえる．□

さらに次が成り立つ．

定理 4.13　$A = M_n(D)$（D は多元体）は K 上中心的単純な多元環とする．このとき

(i) D の極大可換部分体 L で K 上分離的なものがある．

(ii) K の有限次 Galois 拡大 E で A の分解体となるものがある．

[証明] (i) を示せば，(ii) の E としては L を含む最小の Galois 拡大をとればよい．また $\mathrm{Char}\, K = p > 0$ と仮定してよい．

K 上分離的な D の可換部分体のうち極大なものの一つを L とし，$C_D(L) = C$ とおく．$C = L$ ならば L は D の極大可換部分体であるから，$C \supsetneqq L$ と仮定して矛盾を導く．

$C - L \ni c$ とすれば $L[c]$ は D の可換部分体で，ある整数 e に対し c^{p^e} は L 上分離的になる（永尾 [4]，例題 36.4）．このとき L の極大性より $c^{p^e} \in L$ となり，$c \notin L$ であるから $e > 0$ である．このような e の最小値をとり，$d = c^{p^{e-1}}$ とおけば $d \notin L, d^p \in L$ となる．d による C の内部自己同型を σ とする：$\sigma(x) = d^{-1}xd$ $(x \in C)$．このとき $\sigma^p = 1$，したがって $(\sigma - 1)^p = 0$ となるが，定理 4.6 (iv) より $L = Z(C)$ であるから $\sigma - 1 \neq 0$ である．いま $(\sigma - 1)^k \neq 0$ となる最大の $k \geq 1$ をとり，$(\sigma - 1)^k u \neq 0$ $(u \in C)$ とする．$v = (\sigma - 1)^k u$, $w = (\sigma - 1)^{k-1} u$ とおけば k の最大性から $(\sigma - 1)v = 0$ となり，また $v = (\sigma - 1)w$ より $\sigma(w) = v + w$ となる．よって $t = v^{-1}w$ とおけば

$$\sigma(t) = \sigma(v)^{-1}\sigma(w) = v^{-1}(v + w) = 1 + t$$

となり，σ は $L[t]$ の自明でない L-同型を引き起す．よって分離次数 $[L[t] : L]_s > 1$ となり，L 上分離的で L と異なる $L[t]$ の部分体が存在する（永尾 [4]，例題 36.4, 36.5）．これは L の極大性に反する．□

§5. 分離多元環

A は K-多元環とし，L は K の拡大体とする．このとき $J(A)^L$ は A^L のべき零イデアルであるから $J(A)^L \subset J(A^L)$ となる．したがって A^L が半単純ならば A も半単純であるが，この逆は必ずしも成り立たない．

半単純な K-多元環 A は，K の任意の拡大体 L に対して A^L がまた半単純であるとき **分離的** または **分離多元環** であるという．

補題 5.1 A は K-多元環とする.

(i) A が半単純で分解型の多元環ならば A は分離的である.

(ii) $\bar{A} = A/J(A)$ が分離的であるため必要十分な条件は，任意の拡大体 L/K に対し $J(A^L) = J(A)^L$ が成り立つことである. またこのとき，V_A が完全可約ならば $(V^L)_{A^L}$ も完全可約である.

［**証明**］ L を K の任意の拡大体とする.

(i) $A \simeq \bigoplus_i M_{n_i}(K)$ とすれば $A^L \simeq \bigoplus_i M_{n_i}(L)$ となり，これは半単純である.

(ii) $J(A)^L \subset J(A^L) \subset A^L$ であるから，$\bar{A}^L \simeq A^L/J(A)^L$ が半単純であることと $J(A)^L = J(A^L)$ が成り立つことは同値である. またこのとき $VJ(A) = 0$ ならば $V^L J(A)^L = V^L J(A^L) = 0$ となるから，$(V^L)_{A^L}$ は完全可約である. □

補題 5.2 A は K-多元環，$\tilde{K}$ は K の代数的閉包とする. このとき $A^{\tilde{K}}$ が半単純ならば A は分離的である.

［**証明**］ L は K の任意の拡大体とし，$\tilde{L}$ は L の代数的閉包とする. このとき $\tilde{K} \subset \tilde{L}$ としてよい. 仮定により $A^{\tilde{K}}$ は $\tilde{K}$ 上の全行列環の直和であるから $A^{\tilde{L}}$ は半単純で，したがって A^L も半単純である. □

まず可換な K-多元体の分離性について考察しよう.

Z が可換な K-多元体であることは，(K 上有限次元と仮定しているから) Z が K の有限次拡大であることに他ならない. このとき $\dim_K Z$ は Z の K 上の拡大次数で，これを n とし $\tilde{K}$ を K の代数的閉包とすれば次が成り立つ.

定理 5.3 K の有限次拡大 Z が分離的な K-多元環であることは，Z が K の分離拡大であること，すなわち Z から $\tilde{K}$ への K-同型の個数が拡大次数 n に一致することと同値である.

［**証明**］ Z の既約な $\tilde{K}$-表現は絶対既約でその次数は 1 であるから，それは Z から $\tilde{K}$ への K-同型に他ならない. したがってその個数 m は $\dim_{\tilde{K}} Z^{\tilde{K}}/J(Z^{\tilde{K}})$ に等しい. $\dim_{\tilde{K}} Z^{\tilde{K}} = n$ であるから，$m = n$ であることと $J(Z^{\tilde{K}}) = 0$ であることは同値である. □

半単純な K-多元環 A に対し $A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i$ を単純多元環の直和とすれば，A が分離的であることと A_i がすべて分離的であることは同値である．したがって分離性の問題は単純多元環の場合に帰着される．

定理5.4 単純な K-多元環 A が分離的であることと，その中心 $Z = Z(A)$ が分離的であることは同値である．

［**証明**］ K の任意の拡大体 L に対して

$$A^L = L \otimes_K A = L \otimes_K (Z \otimes_Z A) = (L \otimes_K Z) \otimes_Z A$$

となり，A は Z 上中心的単純な多元環であるから定理4.2(iii) より $J(A^L) = J(L \otimes_K Z) \otimes_Z A$ となる．したがって $J(A^L) = 0$ となることと $J(L \otimes_K Z) = 0$ となることは同値で，A の分離性と Z の分離性は同値である．□

K が完全体（例えば標数0の体や有限体）のときは，上の定理より半単純な任意の K-多元環は分離的で，その分離性について配慮する必要はない．

K-多元環 A の分離性と包絡多元環 $A^e = A^0 \otimes_K A$ の性質との関係をみるため，二つの補題を準備しておく．

補題5.5 A が分離的な K-多元環ならば，任意の半単純な K-多元環 B に対し $A \otimes_K B$ はまた半単純である．

［**証明**］ B は単純と仮定してよい．$Z = Z(B)$ とおけば，

$$A \otimes_K B = A \otimes_K (Z \otimes_Z B) = (A \otimes_K Z) \otimes_Z B$$

となるが，$A \otimes_K Z$ は半単純で B は Z 上中心的単純な多元環であるから，定理4.2 (ii) より $A \otimes_K B$ は半単純である．□

補題5.6 K-多元環 A が $A^0 \otimes_K A$-加群として射影的であることと，次の(a), (b) をみたす A の元 $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$ が存在することは同値である：

（a） $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^0 \otimes (b_i x) = \sum_{i=1}^{n} (x a_i)^0 \otimes b_i \qquad (\forall x \in A)$,

（b） $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1.$

［**証明**］ $\lambda : A^e = A^0 \otimes_K A \to A \left(\sum_i x_i^0 \otimes y_i \mapsto \sum_i x_i y_i\right)$ は A^e-全準同型で，A

が A^e-射影的であることは A^e-準同型　$\mu: A \to A^e$　で $\lambda\circ\mu = \mathrm{id}_A$ をみたすものが存在することと同値である．

いま上のような μ が存在したとして　$\mu(1) = \sum_{i=1}^n a_i^0 \otimes b_i$　とおけば，$\lambda\circ\mu(1) = 1$ より (b) が成り立つ．また $x \in A$ に対し

$$\mu(x) = \mu(1(1^0 \otimes x)) = \mu(1)(1^0 \otimes x) = \textstyle\sum_i a_i^0 \otimes (b_i x),$$

一方

$$\mu(x) = \mu(1(x^0 \otimes 1)) = \mu(1)(x^0 \otimes 1) = \textstyle\sum_i (a_i^0 x^0) \otimes b_i = \sum_i (xa_i)^0 \otimes b_i$$

となり (a) が成り立つ．

逆に (a), (b) をみたす $\{a_i\}, \{b_i\}$ が存在するとき，写像　$\mu: A \to A^e$　を

$$\mu(x) = \textstyle\sum_i a_i^0 \otimes (b_i x) \quad (= \sum_i (xa_i)^0 \otimes b_i)$$

とおいて定義すれば，これが A^e-準同型で $\lambda\circ\mu = \mathrm{id}_A$ となることが容易に確かめられる．□

さて次の定理が示したかった事柄である．

定理 5.7　K-多元環 A について，次の 3 条件は同値である．

（1）　A は分離的である．

（2）　$A^e = A^0 \otimes_K A$　は半単純である．

（3）　A は A^e-射影加群である．

［**証明**］ (1) ⇒ (2) は補題 5.5 より，また (2) ⇒ (3) は I, 10.4 より明らかである．

(3) ⇒ (1)．　L は K の任意の拡大体とし，A^L-加群がすべて完全可約であることを示せばよい．すなわち V は A^L-加群，$W \neq 0$ はその A^L-部分加群とするとき，W は V の（A^L-加群としての）直和因子であることを示す．

$(A^L)^e = (A^L)^0 \otimes_L A^L = (A^0 \otimes_K L) \otimes_L (L \otimes_K A) = L \otimes_K A^e$　であるから，仮定により　$A^L = L \otimes_K A$　は $(A^L)^e$-射影的である．したがって補題 5.6 のような A^L の元　$a_1, \cdots, a_n$,　$b_1, \cdots, b_n$　がある．

さて W は L-加群としては V の直和因子であるから，L-準同型　$f: V \to W$　で $f(w) = w\ (\forall w \in W)$　となるものがある．

これに対し　$\mu(f): V \to W$　を

$$\mu(f)(v) = \sum_{i=1}^n f(va_i) b_i$$

とおいて定義すれば，補題 5.6 (b) より　$\mu(f)(w) = w\ (\forall w \in W)$　が成り立つ．

したがって $\mu(f)$ が A^L-準同型であることを示せば十分である．そのため任意の $v \in V$ に対し，L-準同型 $g:(A^L)^e = (A^L)^0 \otimes_L A^L \to V$ で $g(a^0 \otimes b) = f(va)b$ となるものを考えれば，補題5.6(a)より $g(\sum_i a_i^0 \otimes (b_i x)) = g(\sum_i (xa_i)^0 \otimes b_i)$ $(\forall x \in A^L)$ となるが，この左辺は $\mu(f)(v)x$ に等しく，また右辺は $\mu(f)(vx)$ に等しい．よって $\mu(f)$ は A^L-準同型である．□

§6. Schur 指数

$A = M_n(D)$ (D は多元体) は体 K 上の単純多元環とし，$Z = Z(A)$ とおく．このとき D は Z 上の中心的多元体であるから $\dim_Z D$ は平方数である (定理4.11)．$\dim_Z D = m^2$ であるとき，m を単純多元環 A の **Schur 指数** という．

この節では Schur 指数の表現論的意味について考察しよう．まず中心的単純多元環について次が成り立つ．

定理6.1 $A = M_n(D)$ (D は多元体) は K 上中心的単純な多元環で，m はその Schur 指数とする：$m^2 = \dim_K D$．このとき

(i) L を D の極大可換部分体とすれば，$\dim_K L = m$ で L は A の分解体である．

(ii) K の有限次拡大 E が A の分解体ならば，$m | \dim_K E$ である．

(iii) E は A の分解体とし，V は既約な A-加群，$\tilde{V}$ は (絶対) 既約な A^E-加群とする．このとき

(a) $V^E \simeq m\tilde{V}$ (A^E-同型)．

(b) 自然数 r に対して

$r\tilde{V}$ が K で実現可能 $\iff$ $m | r$.

［**証明**］(i) L の極大性より $C_D(L) = L$ であるから，定理4.6(ii)より $(\dim_K L)^2 = \dim_K D = m^2$，したがって $\dim_K L = m$ となる．また L が A の分解体になることは定理4.12より明らかである．

(ii) E は D の分解体でもあるから $D^E = M_m(E)$ としてよい．W を既約な D^E-加群とすると $D^E \simeq mW$ (D^E-同型) となる．$D^E \supset D$ と考えて D^E の D-加群としての階数を考えると

$$\dim_K E = \dim_D D^E = m \dim_D W$$

となるから，$\dim_K E$ は m の倍数である．

(iii) $\dim_K V = nm^2$．また $A^E = M_{nm}(E)$ であるから $\dim_E \tilde{V} = nm$ である．V^E は完全可約でその既約成分は $\tilde{V}$ のみであるから，次元を比較して (a) がえられる．

(b) ($\Rightarrow$) $r\tilde{V} \simeq W^E$ となる W_A があるとして $W \simeq sV$ とすれば，$r\tilde{V} \simeq sV^E \simeq sm\tilde{V}$, したがって $r = sm$ となる．

($\Leftarrow$) $r = sm$ とすれば $(sV)^E \simeq r\tilde{V}$ となる．□

さて A は一般の K-多元環とし，E は A の分解体とする．また $A/J(A) = \bar{A} = \bigoplus_i \bar{A}_i$ を単純因子分解とする．このとき（絶対）既約な A^E-加群 $\tilde{V}$ に対し $\tilde{V}\bar{A}_i \neq 0$ となる i がただ一つ定まり，$\tilde{V}$ は実質的には単純多元環 $\bar{A}_i$ の絶対既約加群と考えてよい．$\bar{A}_i$ の Schur 指数 m を $m_K(\tilde{V})$ とかいて，これを $\tilde{V}$ の **K 上の Schur 指数** という．$\tilde{V}$ による A の表現の指標を $\tilde{\xi}$ とするとき，m を $m_K(\tilde{\xi})$ と表して $\tilde{\xi}$ の K 上の Schur 指数ということもある．

上の定義から絶対既約加群の Schur 指数は単純多元環について考えればよい．その表現論的意味を考察するため準備を少ししておく．

A は K-多元環で E は K の拡大体とする．このとき $\mathrm{Aut}(E/K) \ni \sigma$ は $A^E = E \otimes_K A$ の K-多元環としての自己同型で $\lambda \otimes a \mapsto \lambda^\sigma \otimes a$ ($\lambda \in E$, $a \in A$) となるものを引き起す．これを同じ σ で表すことにする．

また写像 $\boldsymbol{X}: A \to M_n(E)$ $(a \mapsto X(a))$ において，$X(a)$ の各成分を σ でうつした行列を $X(a)^\sigma$ と表すことにする．$\boldsymbol{X}$ が A の E-表現ならば，$\boldsymbol{X}^\sigma : a \mapsto X(a)^\sigma$ はまた A の E-表現で，指標については $\chi_{X^\sigma} = (\chi_X)^\sigma$ が成り立つ．$\boldsymbol{X}^\sigma$, $(\chi_X)^\sigma$ はそれぞれ $\boldsymbol{X}$, χ_X に **代数的共役** であるという．$\boldsymbol{X}$ の表現加群が U_{A^E} であるとき $\boldsymbol{X}^\sigma$ の表現加群を U^σ と表すことにし，これも U に代数的共

役であるという.

注意 X の表現加群 U が A^E の A^E-部分加群であるときは, A^E の自己同型 σ による U の像 U^σ が X^σ の表現加群になる.

さて以下では $A=M_n(D)$ (D は多元体) は K 上の単純多元環とし, 話を簡単にするため A は分離的であると仮定する.

注意 群環 KG については, III, 1.28 で示すように $KG/J(KG)$ はつねに分離的で, 上を仮定しても本書の目的には十分である.

このとき K の有限次 Galois 拡大 E で A の分解体となるものがある (定理 4.13). その Galois 群を $\mathfrak{G}=\mathrm{Gal}(E/K)$ とおく.

また V は (同型を度外視して一意的に定まる) 既約な A-加群とし, (絶対) 既約な A^E-加群の一つを $\tilde{V}$ とする. さらに $V, \tilde{V}$ による A の表現の指標をそれぞれ $\zeta, \tilde{\zeta}$ と表す. ただし $\tilde{\zeta}$ は (A^E 上ではなく) A 上で定義された関数と考え, K に $\{\tilde{\zeta}(a)\,;\,a\in A\}$ を添加した体を $K(\tilde{\zeta})$ と表す. $\mathfrak{G}\ni\sigma$ で $\tilde{\zeta}^\sigma=\tilde{\zeta}$, すなわち $\tilde{\zeta}(a)^\sigma=\tilde{\zeta}(a)\ (\forall a\in A)$ をみたすものの全体を $\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}$ とかくことにすれば, $\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}$ は $K(\tilde{\zeta})$ の不変群で, したがって Galois の基本定理により $K(\tilde{\zeta})$ は $\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}$ の不変体である. $\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}$ はまた $\{\sigma\in\mathfrak{G}\,;\,\tilde{V}^\sigma\simeq\tilde{V}\ (A^E\text{-同型})\}$ と一致する.

以上の仮定のもとで次が成り立つ.

定理 6.2 $Z=Z(A)$, $\dim_K Z=t$ とおく. このとき

(i) $|\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}|=t$.

(ii) $Z\simeq K(\tilde{\zeta})$ (K-同型).

(iii) $\mathfrak{G}=\sum_{i=1}^t\mathfrak{G}_{\tilde{\zeta}}\sigma_i$ ($\sigma_1=1$) とすれば, V^E は次のように既約分解される:

$$V^E\simeq m_K(\tilde{V})(\tilde{V}^{\sigma_1}\oplus\cdots\oplus\tilde{V}^{\sigma_t}). \tag{6.1}$$

よって $m_K(\tilde{V})$ は V^E における $\tilde{V}$ の重複度に一致する.

[証明] A の分離性より A^E は半単純で

$$A^E=\bigoplus_i B_i,\qquad B_i=M_{s_i}(E) \tag{6.2}$$

と単純因子分解される．これに対応してその中心 $Z(A^E) = Z(A)^E = Z^E$ は次のように分解される：

$$Z^E = \bigoplus_i Ec_i. \tag{6.3}$$

ただし $1 = \sum_i c_i$ は1の中心的原始べき等元分解で，$B_i = A^E c_i$ とする．ここで $\dim_E Z^E = \dim_K Z = t$ であるから (6.2), (6.3) における i は1から t まで動く．

さて $Z \subset Z^E$ と考えることにして，$Z \ni z$ の (6.3) による分解を

$$z = \sum_{i=1}^{t} \omega_i(z)\, c_i \qquad (\omega_i(z) \in E) \tag{6.4}$$

とする．このとき $\omega_i : Z \to E$ $(1 \leq i \leq t)$ は Z を K-多元環と考えてその異なる既約な E-表現の全体で，$Z_i = \omega_i(Z)$ は Z に K-同型な E の部分体である．

$\mathfrak{G} \ni \sigma$ は A^E の自己同型を引き起すから，σ は $\{B_1, \cdots, B_t\}$ 上の，したがって $\{c_1, \cdots, c_t\}$, $\{\omega_1, \cdots, \omega_t\}$ などの上の置換を引き起す．ここで A は $\mathfrak{G}$ の A^E における不変環であるから，$\mathfrak{G}$ は $\{c_1, \cdots, c_t\}$ 上可移に作用する．実際 $\{c_1, \cdots, c_r\}$ を $\mathfrak{G}$-軌道とすれば，$\sum_{i=1}^r c_i$ は $\mathfrak{G}$-不変で A の中心的原始べき等元で，A の単純性より $1 = \sum_{i=1}^r c_i$, したがって $r = t$ となる．

よって各 i に対し $B_1^{\sigma_i} = B_i$ となる $\sigma_i \in \mathfrak{G}$ があり，$s_1 = \cdots = s_t$ をえる．また $\mathfrak{G}_{B_1} = \{\sigma \in \mathfrak{G}\,;\, B_1^\sigma = B_1\}$ とおけば $\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^t \mathfrak{G}_{B_1}\sigma_i$ である．ただし $\sigma_1 = 1$ とする．

既約な A^E-加群 $\tilde{V}$ は B_1 の極小右イデアルとしてよい．このとき $\tilde{V}^\sigma \subset B_1{}^\sigma$ (p. 129 の注意) より $\mathfrak{G}_{B_1} = \{\sigma \in \mathfrak{G}\,;\, \tilde{V}^\sigma \simeq \tilde{V}\ (A^E\text{-同型})\} = \mathfrak{G}_{\xi}$ となり，$|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_{\xi}| = t$ をえる．

また $\mathfrak{G} \ni \sigma$ ならば $Z \ni z$ に対し

$$z = z^\sigma = \sum_{i=1}^{t} \omega_i(z)^\sigma c_i^\sigma \tag{6.5}$$

となる．ここで $\mathfrak{G}_{B_1} \ni \sigma$ とすれば $c_1^\sigma = c_1$ となり，(6.4) と (6.5) の c_1 の係数を比較して $\omega_1(z)^\sigma = \omega_1(z)\ (\forall z \in Z)$ をえる．よって $\mathfrak{G}_{\xi} = \mathfrak{G}_{B_1} \subset \mathfrak{G}_{Z_1}$ であるが，$|\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_{Z_1}| = \dim_K Z_1 = t = |\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_{\xi}|$ より $\mathfrak{G}_{\xi} = \mathfrak{G}_{Z_1}$, したがって不変体を考えて $Z_1 = K(\xi)$ となり，これは Z に K-同型である．

最後に (6.1) を示すため $m = m_K(\tilde{V})$ とおけば $\dim_K D = m^2 t$, $\dim_K A = n^2 m^2 t$ となる．一方 (6.2) より $\dim_E \tilde{V} = s_1$, $A^E \simeq s_1(\bigoplus_{i=1}^t \tilde{V}^{\sigma_i})$ であるから，E 上の次元を考えて $n^2 m^2 t = (s_1)^2 t$, よって $s_1 = nm$ をえる．これと $A^E \simeq nV^E$ より (6.1) がえられる．□

群環 KG の場合は III, §1.5 でのべるように $K(\tilde{\xi})$ は K の Galois 拡大である．このときは次が成り立つ．

定理 6.3 定理 6.2 と同じ仮定のもとで，さらに $K(\tilde{\xi})$ は K の Galois 拡大であると仮定し $Z_1 = K(\tilde{\xi})$ とおく．また U は既約な A^{Z_1}-加群で $\tilde{V}|U^E$ とする．このとき

(i) $V^{Z_1} \simeq U^{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus U^{\sigma_t}$.

(ii) $U^E \simeq m_K(\tilde{V})\tilde{V}$. したがって $m_K(\tilde{V}) = m_{K(\tilde{\xi})}(\tilde{V})$ である．

(iii) $K \subset M \subset E$ なる中間体 M で $\tilde{V}$ が実現可能ならば $Z_1 \subset M$ で

$$m_K(\tilde{V}) \mid \dim_{Z_1} M.$$

また $\dim_{Z_1} L = m_K(\tilde{V})$ となる Z_1 の拡大体 L で $\tilde{V}$ が実現可能なものがある．

(iv) 自然数 r に対して

$$r\tilde{V} \text{ が } K(\tilde{\xi}) \text{ で実現可能} \iff m_K(\tilde{V}) \mid r.$$

［**証明**］ 定理 6.2 の証明の記号をそのまま用いることにする．また $A \subset A^{Z_1} \subset A^E$ と考える．

仮定により Z_1 は Galois 拡大であるから $Z_1{}^{\sigma_i} = Z_1$ で，$\omega_1, \cdots, \omega_t$ は Z の（K-多元環としての）異なる既約な Z_1-表現である．したがって Z^{Z_1} は t 個の Z_1 の直和に同型で，Z^{Z_1} において 1 は t 個の直交する原始べき等元の和で表される．これと $Z^E(\supset Z^{Z_1})$ における 1 の原始べき等元分解を比較すると，結局 $1 = \sum_{i=1}^t c_i$ が Z^{Z_1} における 1 の原始べき等元分解となり

$$Z^{Z_1} = \bigoplus_{i=1}^t Z_1 c_i$$

をえる．したがって

$$A^{Z_1} = Z_1 \otimes Z \otimes_Z A = \bigoplus_{i=1}^t Z_1 c_i \otimes_Z A$$

は A^{Z_1} の単純因子分解である．$A_i = Z_1 c_i \otimes_Z A$ とおけば，$A_i = A^{Z_1} c_i = A_1{}^{\sigma_i}$ となる．また A_i において $\omega_i(z) c_i \otimes a = c_i z \otimes a = c_i \otimes (za)$ となるから $A_i = \{c_i \otimes a \,;\, a \in A\}$ で，写像 $f_i : A \to A_i \ (a \mapsto c_i \otimes a)$ は K-多元環としての同型になる．よって $A_i \simeq M_n(D_i)$，$D_i \simeq D$ である．

さて $A^E = (A^{Z_1})^E = \bigoplus_{i=1}^t A_i^E$，$A_i^E = A^E c_i = B_i$ で，$\tilde{V} \subset B_1$ と仮定したから U は A_1 の極小右イデアルとしてよい．このとき

$$A^{Z_1} \simeq n(U^{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus U^{\sigma_t}) \qquad (U^{\sigma_1} = U)$$

となり，これと $A^{Z_1} \simeq nV^{Z_1}$ を比較して (i) がえられる．

また $m = m_K(\tilde{V})$ とおけば

$$A^E \simeq n((U^{\sigma_1})^E \oplus \cdots \oplus (U^{\sigma_t})^E)$$
$$\simeq nm(\tilde{V}^{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{V}^{\sigma_t})$$

より $U^E \simeq m\tilde{V}$ となり (ii) がえられる．

さらに $\tilde{V}$ は Z_1 上の中心的単純多元環 A_1 の絶対既約加群と考えてよいから，定理 6.1 から (iii), (iv) がえられる．□

定理 6.2 からまた次がえられる．

定理 6.4 A は K-多元環で $A/J(A)$ は分離的であると仮定する．また L は K の拡大体で A^L-加群 $\tilde{V}$ は絶対既約とする．このとき A-加群 W に対し W^L における $\tilde{V}$ の重複度は $m_K(\tilde{V})$ の倍数である．

[**証明**] A^L-加群 M における $\tilde{V}$ の重複度を $c(M, \tilde{V})$ と表すことにする．

$\mathrm{IRR}(A) = \{V_1, \cdots, V_l\}$, $W \leftrightarrow \bigoplus_i r_i V_i$ とすれば $c(W^L, \tilde{V}) = \sum_i r_i c(V_i^L, \tilde{V})$ となる．ここで唯一つの i に対して $c(V_i^L, \tilde{V}) \neq 0$ となるから，最初から A は単純で分離的として，既約な A-加群 V に対し $c(V^L, \tilde{V}) = m_K(\tilde{V})$ となることを示せばよい．A の Schur 指数を m とすれば，定義より $m_K(\tilde{V}) = m$ である．

いま $\tilde{L}$ を L の代数的閉包とし，$\tilde{L}$ に含まれる K の有限次 Galois 拡大 E で A の分解体となるものをとる．また $\tilde{V}_1$ は (絶対) 既約な A^E-加群で $\tilde{V}_1^{\tilde{L}} = \tilde{V}^{\tilde{L}}$ となるものとする．このとき定理 6.2 (iii) より $c(V^E, \tilde{V}_1) = m_K(\tilde{V}_1) = m$ となる．一方 V^L の $\tilde{V}$ と同値でない既約成分 U に対しては $c(U^{\tilde{L}}, \tilde{V}^{\tilde{L}}) = 0$ であるから

$$c(V^L, \tilde{V}) = c(V^{\tilde{L}}, \tilde{V}^{\tilde{L}}) = c(V^E, \tilde{V}_1) = m$$

をえる．□

§7. 接 合 積

7.1 群のコホモロジー群

群 G と加群 V に対し，写像 $\varphi: V \times G \to V$ で次をみたすものが与え

られているとき V は **G-加群** であるという．ただし $v \in V, a \in G$ に対し $\varphi(v, a)$ を va と表し，下で $u, v \in V, a, b, 1 \in G$ とする：

（1） $(u+v)a = ua + va$ （2） $(va)b = v(ab)$ （3） $v1 = v$.

このとき群 G は加群 V に **作用している** ともいう．

以下 V は G-加群とし，V に値をとる G 上 n 変数の関数

$$f : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n} \to V \qquad ((x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n))$$

を **n-コチェイン** とよぶ．n-コチェインの全体を $C^n(G, V)$ と表し，そこにおける加法を

$$(f+g)(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) + g(x_1, \cdots, x_n)$$

と定義すれば $C^n(G, V)$ は加群になる．

特に $n = 0$ のときは $C^0(G, V) = V$ と定義する．

さて各 $n \geq 0$ に対して写像 $\delta_n : C^n(G, V) \to C^{n+1}(G, V)$ を次のように定める：

$$(7.1) \quad \begin{cases} \delta_0 v(x) = v - vx, \\ \delta_n f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = f(x_2, \cdots, x_{n+1}) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}) \\ \qquad + (-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_n) x_{n+1} \qquad (n > 0). \end{cases}$$

このとき次が成り立つ：

$$(7.2) \qquad \delta_n(f+g) = \delta_n f + \delta_n g,$$

$$(7.3) \qquad \delta_{n+1}(\delta_n f) = 0.$$

問 7.1 上の (7.3) を示せ．

$\mathrm{Ker}\,\delta_n$ を $Z^n(G, V)$ と表し，その元を **n-コサイクル** とよぶ．また $\mathrm{Im}\delta_{n-1}$ を $B^n(G, V)$ と表し，その元を **n-コバンダリー** とよぶ．ただし $n = 0$ のときは $B^0(G, V) = 0$ とする．(7.3) から $B^n(G, V) \subset Z^n(G, V)$ となり，剰余加群 $Z^n(G, V)/B^n(G, V)$ を群 G の V 上の **n-コホモロジー群** といって $H^n(G, V)$ と表す．

二つの n-コサイクル f, g が $B^n(G, V)$ を法として合同であるとき，これらは **同伴** であるといって $f \sim g$ と表す.

例 7.2 (1) $H^0(G, V) = Z^0(G, V) = \{v \in V ; vx = v\ (\forall x \in G)\}$.

(2) $C^1(G, V) \ni f(x)$ に対し

$$\delta_1 f(x, y) = f(y) - f(xy) + f(x)y.$$

よって次が成り立つ：

$$f(x) \in Z^1(G, V) \iff f(xy) = f(x)y + f(y),$$
$$f(x) \in B^1(G, V) \iff v \in V \text{ が存在して，} f(x) = v - vx.$$

(3) $C^2(G, V) \ni f(x, y)$ に対し

$$\delta_2 f(x, y, z) = f(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y)z.$$

よって次が成り立つ：

$$(7.4)\quad \begin{cases} f(x, y) \in Z^2(G, V) \\ \qquad \iff f(xy, z) + f(x, y)z = f(y, z) + f(x, yz), \\ f(x, y) \in B^2(G, V) \\ \qquad \iff g(x) \in C^1(G, V) \text{ が存在して} \\ \qquad\qquad f(x, y) = g(y) - g(xy) + g(x)y. \end{cases}$$

2-コサイクルを特に **因子団** とよぶことがある.

定理 7.3 V は G-加群とし，$n \geq 1$ とする．このとき

(i) $H^n(G, V)$ の元の位数は $|G|$ の約数である.

(ii) $Z^n(G, V) \ni f(x_1, \cdots, x_n)$ とする．また次の写像

$$\theta : V \to V \qquad (v \mapsto |G|v)$$

は単準同型とし，任意の $x_1, \cdots, x_{n-1} \in G$ に対して

$$\sum_{x \in G} f(x, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \operatorname{Im} \theta$$

と仮定する．このとき $f \sim 0$ である.

特に θ が同型であれば $H^n(G, V) = 0$ である.

[**証明**] $Z^n(G, V) \ni f$ に対して

$$g(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \sum_{x \in G} f(x, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

とおく．このとき，$\delta_n f(x, x_1, \cdots, x_n) = 0$ より

$$f(x_1,\cdots,x_n)-f(xx_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}f(x,\cdots,x_ix_{i+1},\cdots,x_n)$$
$$+(-1)^{n+1}f(x,x_1,\cdots,x_{n-1})x_n=0.$$

この左辺で x を G 全体にわたらせて加えると次の等式がえられる：

$$|G|\,f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^ig(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\cdots,x_n)$$
$$+(-1)^ng(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n=\delta_{n-1}g(x_1,\cdots,x_n).$$

よって $|G|\,f\sim 0$ となり (i) がえられる。

また (ii) の仮定のもとで $g(x_1,\cdots,x_{n-1})=|G|\,h(x_1,\cdots,x_{n-1})$ となる $h\in C^{n-1}(G,V)$ が存在し，上の等式より $|G|\,f(x_1,\cdots,x_n)=|G|\,\delta_{n-1}h(x_1,\cdots,x_n)$ となるが，θ は単射であるから $f=\delta_{n-1}h$ をえる。(ii) の後半は明らかである。□

7.2 捩れ型の群環

群 G が環 S に作用しているとは，G から S の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,S$ の中への準同型 $\varphi:G\to\mathrm{Aut}\,S$ が与えられていることとする。このとき $a\in S, \alpha\in G$ に対して $a^{\varphi(\alpha)}$ を簡単に a^α と表す。また G のすべての元で不変な S の元の全体は S の部分環で，これを S^G と表し，S における G の**不変環**という。

さて S は可換環とし，群 G が S に作用しているとするとき，G は S の単数群 $S^\times$ に作用する。$S^\times$ は可換群であるから，加群に作用している場合と同様に n-コサイクル，n-コバンダリー等が考えられる。

例えば，$f:G\times\cdots\times G\to S^\times$ が n-コサイクルであることは

$$\delta_nf(x_1,\cdots,x_{n+1})$$
$$=f(x_2,\cdots,x_{n+1})\cdot\prod_{i=1}^{n}f(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\cdots,x_{n+1})^{(-1)^i}\cdot f(x_1,\cdots,x_n)^{(-1)^{n+1}x_{n+1}}=1$$

となることである。

定理 7.3 から次の定理がえられる。

定理 7.4 K は標数 $p>0$ の完全体とし，p-群 P が体 K に作用しているとする。このとき任意の $n\geq 1$ に対し $H^n(P,K^\times)=1$ となる。

[証明] K は標数 p の完全体であるから $\theta:K^\times\to K^\times\ (a\mapsto a^{|P|})$ は同型である（永尾 [4]，問 32,2，定理 36,14 参照）。したがって定理 7.3 が適用できる。□

群 G が環 S に作用しているとき，$\alpha: G \times G \to S^{\times}$ $((x, y) \mapsto \alpha(x, y))$ が因子団（すなわち 2-コサイクル）であることは

$$\alpha(xy, z)\alpha(x, y)^z = \alpha(y, z)\alpha(x, yz) \tag{7.5}$$

がつねに成り立つことである．また二つの因子団 α と β が同伴であるため必要十分な条件は，写像 $\gamma: G \to S^{\times}$ $(x \mapsto \gamma(x))$ が存在して

$$\alpha(x, y) = \beta(x, y)\gamma(y)\gamma(xy)^{-1}\gamma(x)^y \tag{7.6}$$

が成り立つことである．さらに α, β の積を $\alpha \cdot \beta: (x, y) \mapsto \alpha(x, y)\beta(x, y)$ と定義すれば $Z^2(G, S^{\times})$ は可換な乗法群となり，その単位元は $1: (x, y) \mapsto 1$ $(\forall x, y \in G)$ である．

問 7.5 因子団 $\alpha: G \times G \longrightarrow S^{\times}$ に対し次が成り立つ．

(i) $\alpha(1, z) = \alpha(x, 1)^z$ $(\forall x, z \in G)$.

(ii) $\alpha(1, 1) = \alpha(x, 1)$ $(\forall x \in G)$.

（ヒント：(7.5) で $y = 1$ とおくと (i) が，さらに $z = 1$ とおくと (ii) がえられる．）

因子団 $\alpha: G \times G \to S^{\times}$ が与えられたとき，文字の集合 $\{u_x ; x \in G\}$ を基とする S-自由加群

$$A = \bigoplus_{x \in G} u_x S$$

を考え，A における乗法を次のように定義する：

$$u_x u_y = u_{xy}\alpha(x, y), \qquad \gamma u_x = u_x \gamma^x \qquad (\forall \gamma \in S),$$

一般には

$$(\sum_x u_x \beta_x)(\sum_y u_y \gamma_y) = \sum_{x,y} u_{xy}\alpha(x, y){\beta_x}^y \gamma_y.$$

このとき A は環になる．実際乗法に関する結合法則は (7.5) から導かれ，$u_1\alpha(1, 1)^{-1}$ が A の単位元になることも問 7.5 から容易にわかる．その他の公理をみたすことはほとんど明らかである．この環を (S, G, α) と表し，G の S 上の **振れ型の群環** という．R が G の不変環 S^G の部分環で S と単位元を共有するときは，(S, G, α) は R 上の多元環になる．

問 7.6 上において u_x は A の正則元で，${u_x}^{-1} = u_{x^{-1}}\alpha(1, 1)^{-1}\alpha(x, x^{-1})^{-1}$ となる．

補題7.7　$A=(S,G,\alpha)=\bigoplus_{x\in G}u_xS$，$B=(S,G,\beta)=\bigoplus_{x\in G}v_xS$　は二つの捩れ型の群環とする．このとき環同型 $\varphi:A\simeq B$ で，φ は S-同型かつ $\varphi(u_xS)=v_xS$ をみたすものが存在するため必要十分な条件は $\alpha\sim\beta$ となることである．

［**証明**］　まず補題のような φ が存在するとすると　$\varphi(u_x)=v_x\gamma(x)$ $(\gamma(x)\in S^\times)$　となる．このとき　$\varphi(u_xu_y)=\varphi(u_{xy}\alpha(x,y))=\varphi(u_{xy})\alpha(x,y)=v_{xy}\gamma(xy)\alpha(x,y)$　となるが，一方　$\varphi(u_xu_y)=\varphi(u_x)\varphi(u_y)=v_x\gamma(x)v_y\gamma(y)=v_{xy}\beta(x,y)\gamma(x)^y\gamma(y)$　となるから

$$\alpha(x,y)=\beta(x,y)\gamma(y)\gamma(xy)^{-1}\gamma(x)^y,$$

したがって $\alpha\sim\beta$ である．

逆に上の等式をみたす $\gamma:G\to S^\times$ が存在するとき，写像 $\varphi:A\to B$ を　$\varphi(\sum_x u_xs_x)=\sum_x v_x\gamma(x)s_x$（ただし $s_x\in S$）　と定義すれば，これが補題の条件をみたす環同型であることは容易にわかる．□

捩れ型の群環　$A=(S,G,\alpha)=\bigoplus_x u_xS$　において　$v_1=u_1\alpha(1,1)^{-1}$，$x\neq1$ ならば $v_x=u_x$ とおけば　$A=\bigoplus_x v_xS$　となる．$v_xv_y=v_{xy}\beta(x,y)$ とすれば $\alpha\sim\beta$ で，v_1 は A の単位元であるから

$$\beta(x,1)=\beta(1,x)=1_S\qquad(\forall x\in G)$$

である．このような因子団 β は **正規化された因子団** であるという．

問7.8　正規化された因子団 α に対しては次が成り立つ：

$$\alpha(x,x^{-1})^x=\alpha(x^{-1},x).$$

（ヒント：(7.5) で $y=x^{-1},z=x$ とおけ．）

7.3　接　合　積

L は体 K の有限次 Galois 拡大とし，その Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ を G とする．また　$\alpha:G\times G\to L^\times$　を因子団とする．このとき捩れ型の群環 (L,G,α) を因子団 α に関する L と G の **接合積** とよんで，$(L/K,\alpha)$ と表す．これは K 上の多元環である．

定理7.9　L は K 上 n 次の Galois 拡大，$G=\mathrm{Gal}(L/K)$ とし，$(L/K,\alpha)$

は接合積とする．このとき次が成り立つ．

(i) $(L/K,\alpha)$ は中心的単純な K-多元環で，L はその極大可換部分体である．したがって L はこの多元環の分解体である．

(ii) $\alpha\sim 1 \Longrightarrow (L/K,\alpha)\simeq M_n(K)$.

(iii) $(L/K,\beta)$ を他の接合積とするとき

$$K\text{-多元環として } (L/K,\alpha)\simeq(L/K,\beta) \iff \alpha\sim\beta.$$

[**証明**] $A=(L/K,\alpha)=\bigoplus_x u_xL$, $u_xu_y=u_{xy}\alpha(x,y)$, $\gamma u_x=u_x\gamma^x$ とする．ここで u_1 は A の単位元であるとし，$L\subset A$ と考えてよい．

(i) $Z(A)\ni z=\sum_x u_x\zeta_x$ $(\zeta_x\in L)$ とすれば，任意の $\gamma\in L$ に対し

$$\textstyle\sum_x u_x\zeta_x\gamma=\sum_x \gamma u_x\zeta_x=\sum_x u_x\gamma^x\zeta_x$$

となり，$\zeta_x(\gamma-\gamma^x)=0$ $(\forall x\in G)$ をえる．$x\neq 1$ ならば $\gamma^x\neq\gamma$ となる $\gamma\in L$ があるから $\zeta_x=0$ となり，$z=u_1\zeta_1=\zeta_1$ である．また $zu_x=u_xz$ より $\zeta_1{}^x=\zeta_1$ $(\forall x\in G)$ となり，$\zeta_1\in K$，したがって $Z(A)=K$ である．

次に $I\neq 0$ は A のイデアルとし，I の元 $a=\sum_x u_x\alpha_x\neq 0$ $(\alpha_x\in L)$ を 0 と異なる α_x の個数が最小になるようにとる．また $I\subsetneq A$ と仮定する．このとき $u_x\alpha_x\neq 0$ ならばこれは単元であるから，少なくとも二つの α_x は 0 と異なる．また適当に $(u_x\alpha_x)^{-1}$ を a にかけて，最初から $a=1+\sum_{x\neq 1}u_x\alpha_x$ であるとしてよい．このとき任意の $\gamma\in L$ に対して

$$I\ni a\gamma-\gamma a=\textstyle\sum_{x\neq 1}u_x(\alpha_x\gamma-\gamma^x\alpha_x)$$

となり，a のとり方から $\alpha_x(\gamma-\gamma^x)=0$ $(\forall x\neq 1, \forall\gamma\in L)$ となるから $\alpha_x=0$ $(\forall x\neq 1)$ をえる．よって $a=1$ となり，これは仮定に反する．したがって A は中心的単純である．

定理 4.6(ii) より $(\dim_K L)(\dim_K C_A(L))=\dim_K A$ となるが，$\dim_K L=n$, $\dim_K A=n^2$ であるから $\dim_K C_A(L)=n$，したがって $C_A(L)=L$ となって L は A の極大可換部分体である．

(ii) $\alpha=1$ と仮定してよい．写像 $\varphi: A\to \mathrm{End}_K(L)$ を $[\varphi(\sum_x u_x\alpha_x)](\gamma)=\sum_x(\alpha_x\gamma)^{x^{-1}}$ $(\gamma\in L)$ と定義すれば，仮定よりこれが多元環としての準同型になることが容易に確かめられる．A は単純であるからこれは単準同型で，したがって次元を比較して $A\simeq\mathrm{End}_K(L)\simeq M_n(K)$ となる．

(iii) $B=(L/K,\beta)=\bigoplus_x v_xL,\ v_xv_y=v_{xy}\beta(x,y)$ とする．

(⇐) 補題7.7より明らかである．

(⇒) $f: A \simeq B$ を同型とすれば，$f(L)$ は L に同型な B の部分多元環であるから，B の内部自己同型 ρ が存在して $\rho(f(\gamma))=\gamma\ (\forall\gamma\in L)$ となる（定理4.6，(vi)）．したがって最初から $f(\gamma)=\gamma\ (\forall\gamma\in L)$ としてよい．$u_x'=f(u_x)$ とおけば $u_x'u_y'=u_{xy}'\alpha(x,y)$，$\gamma u_x'=u_x'\gamma^x$ となるが，$\gamma v_x=v_x\gamma^x$ であるから $\gamma u_x'v_x^{-1}=u_x'v_x^{-1}\gamma\ (\forall\gamma\in L)$，$u_x'v_x^{-1}\in C_B(L)=L$ となり，$u_x'=v_x\gamma(x)$ $(\gamma(x)\in L^\times)$ と表される．このとき，$\alpha(x,y)=\beta(x,y)\gamma(y)\gamma(xy)^{-1}\gamma(x)^y$ となり $\alpha\sim\beta$ である．□

上の定理で接合積は中心的単純な多元環になることを示したが，逆に任意の中心的単純な多元環はある接合積に相似であることを示す．

定理7.10 A は K 上中心的単純な多元環とし，E は K の Galois 拡大で A の分解体であるとする．このとき E を含む中心的単純多元環 B で $C_B(E)=E$，かつ $B\sim A$ となるものがあり，B はある接合積 $(E/K,\alpha)$ に同型である．

［**証明**］ 上のような E, B の存在は定理4.13，4.12で示してある．また $\dim_K E=n$ とおけば，定理4.6より $\dim_K B=n^2$ である．

定理の最後の主張を示すため $G=\mathrm{Gal}(E/K)$ とおく．$G\ni x$ とすれば E の $(K\text{-})$ 自己同型 x は B の内部自己同型に拡張できるから，$u_x\in B^\times$ が存在して $\gamma^x=u_x^{-1}\gamma u_x\ (\forall\gamma\in E)$ となる．

まず $\{u_x\,;\,x\in G\}$ は B を E-加群とみたときの基であることを示す．そのため自明でない関係式 $\sum_x u_x\gamma_x=0\ (\gamma_x\in E)$ があると仮定して，そのうち $\#\{x\in G\,;\,\gamma_x\neq 0\}$ が最小なものをとる．このとき u_x は正則元であるから少なくとも二つの x_1, x_2 に対して $\gamma_{x_1}\neq 0\neq\gamma_{x_2}$ となる．$x_1\neq x_2$ より E の元 λ で $\lambda^{x_1}\neq\lambda^{x_2}$ となるものがあり

$$0=\lambda(\sum_x u_x\gamma_x)-(\sum_x u_x\gamma_x)\lambda^{x_1}=\sum_x u_x(\lambda^x\gamma_x-\gamma_x\lambda^{x_1})$$

において u_{x_1} 係数は0，u_{x_2} の係数は0と異なるから，これは $\#\{x\in G\,;\,\gamma_x\neq 0\}$ の最小性に反する．よって $\{u_x\,;\,x\in G\}$ は E-自由で，$\dim_E B=n$ であるからこれは B の E-基である．このようにして

$$B = \bigoplus_{x \in G} u_x E, \qquad u_x{}^{-1} \gamma u_x = \gamma^x \qquad (\forall \gamma \in E)$$

となるが，$\gamma \in E$ に対し $(u_x u_y)^{-1}\gamma(u_x u_y) = \gamma^{xy}$，$u_{xy}{}^{-1}\gamma u_{xy} = \gamma^{xy}$ であるから $u_{xy}{}^{-1}u_x u_y \in C_B(E) = E$ となる．$\alpha(x, y) = u_{xy}{}^{-1}u_x u_y$ とおけば，結合法則 $(u_x u_y)u_z = u_x(u_y u_z)$ が成り立つことから，$\alpha : G \times G \to E^\times$ は因子団で，$B = (E/K, \alpha)$ となることがわかる．□

注意 E を K の拡大体とするとき，Brauer 群 $\mathcal{B}(K)$ において E を分解体にもつ多元環類の全体は部分群をつくる．これを $\mathcal{B}(E/K)$ で表す．

特に E が G を Galois 群にもつ K の有限次 Galois 拡大のときは，$\mathcal{B}(E/K)$ に属する多元環類はある接合積 $(E/K, \alpha)$ を含み，

$$(E/K, \alpha) \sim (E/K, \beta) \iff (E/K, \alpha) \simeq (E/K, \beta) \iff \alpha \sim \beta$$

であるから，$(E/K, \alpha)$ を含む多元環類に $\alpha B^2(G, E^\times)$ を対応させて $\mathcal{B}(E/K)$ と $H^2(G, E^\times)$ の間に 1 対 1 の対応がつく．

ここで $(E/K, \alpha) \otimes_K (E/K, \beta) \sim (E/K, \alpha\beta)$ となることが知られている (秋月-鈴木 [1] 6 章, § 3, 定理 4)．このことから上の対応は群同型であることがわかる．

さらに最近の話題として，$E \supsetneq K$ がともに有限次代数体のとき $\mathcal{B}(E/K)$ はつねに無限群になることが Fein-Kantor-Schacher [1] により示されたが，その証明は次の有限置換群に関する定理に基づいている．

定理 G は集合 Ω 上可移な有限置換群とし $|\Omega| > 1$ とする．このときある素数 p と G のある p 元 a が存在して，a は Ω 上固定点をもたない．

この定理の証明には有限単純群の分類結果が用いられていて，現時点では置換群論的な直接の証明が知られていないことも興味深い．

§ 8. Frobenius 多元環と対称多元環

8.1 双対加群

A は可換環 R 上の多元環とするとき，A-加群 V に対し $\mathrm{Hom}_R(V, R)$ は左 A-加群で，これを $\hat{V}$ と表して V の **双対加群** という．$V \ni v$, $\hat{V} \ni \sigma$ に対し $\sigma(v)$ $(\in R)$ を $\langle v, \sigma \rangle$ と表すことにすれば，A の $\hat{V}$ への左からの作用の定義から，$A \ni a$ に対し次が成り立つ：

$$\langle va, \sigma\rangle = \langle v, a\sigma\rangle.$$

左 A-加群 V の双対加群 $\hat{V}$ も同様に定義され，これは右 A-加群である．以下では主として右 A-加群の双対加群についてのべるが，左 A-加群の双対加群についても同様のことが成り立つ．

A-加群 V の元 v を一つきめると R-準同型　$\varphi(v) : \hat{V} \to R\ (\sigma \mapsto \langle v, \sigma\rangle)$ が定義され，したがって写像　$\varphi : V \to \hat{\hat{V}}(= \mathrm{Hom}_R(\hat{V}, R))$　がえられる．

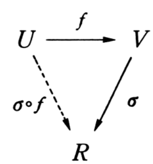
問 8.1　上の写像 φ は A-準同型である．

A-加群 V の部分集合 W に対し

$$W^{\perp} = \{\sigma \in \hat{V}\,; \langle w, \sigma\rangle = 0\ (\forall w \in W)\}$$

とおけば，$W^{\perp}$ は $\hat{V}$ の R-部分加群である．特に W が V の A-部分加群ならば $W^{\perp}$ も $\hat{V}$ の A-部分加群である．$W^{\perp}$ を W の**零化加群**とよぶ．明らかに $W_1 \subset W_2$ ならば $W_1{}^{\perp} \supset W_2{}^{\perp}$ である．また　$V^{\perp} = 0$，$0^{\perp} = \hat{V}$　が成り立つ．

$\hat{V}$ の部分集合 $\hat{W}$ に対しても　$\hat{W}^{\perp} = \{v \in V\,; \langle v, \sigma\rangle = 0\ (\forall \sigma \in \hat{W})\}$ と定義し，これを $\hat{W}$ の零化加群という．$V \supset W$ に対し $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ となることは定義から明らかである．



A-加群 U から A-加群 V への R-準同型 $f : U \to V$ が与えられたとき，$\sigma \in \hat{V}$ に対し $\sigma \circ f : U \to R$　は $\hat{U}$ の元で，したがって写像　${}^t f : \hat{V} \to \hat{U}\ (\sigma \mapsto \sigma \circ f)$ が定義される．これは R-準同型で f の**転置**とよばれる．定義から明らかに次が成り立つ：

$$\langle u, {}^t f(\sigma)\rangle = \langle f(u), \sigma\rangle \qquad (u \in U, \sigma \in \hat{V})$$

問 8.2　(i)　上の f が A-準同型ならば ${}^t f$ も A-準同型である．

(ii)　R-準同型の列　$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$　に対し　${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$　が成り立つ．

$\mathrm{Hom}_R(V, R)$ の左完全性より，完全系列

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

から次の完全系列がえられる：

$$\hat{U} \xleftarrow{{}^t f} \hat{V} \xleftarrow{{}^t g} \hat{W} \longleftarrow 0$$

特に $g : V \to W$ が全準同型ならば ${}^t g : \widehat{W} \to \widehat{V}$ は単準同型である．また g が同型ならば ${}^t g$ も同型である．

問 8.3 W を A-加群 V の A-部分加群とするとき，次の A-同型が成り立つ：

$$\widehat{V/W} \simeq W^{\perp}.$$

（ヒント： $f : V \to V/W$ を自然な全準同型とするとき，単準同型 ${}^t f : \widehat{V/W} \to \widehat{V}$ の像は $W^{\perp}$ である．）

以後

(8.1) $\underline{A\text{-加群は } R\text{-有限生成かつ } R\text{-自由である}}$

と仮定して，その双対加群を考察する．

$\{v_i\}_{1\le i\le n}$ を V の R-基とする：$V = Rv_1 \oplus \cdots \oplus Rv_n$．このとき各 i に対して $\sigma_i \in \widehat{V}$ で $\langle v_j, \sigma_i\rangle = \delta_{ij}$ をみたすものが一意的に定まる．$\{\sigma_i\}_{1\le i\le n}$ は次の定理で示すように $\widehat{V}$ の R-基でこれを $\{v_i\}$ の **双対基** という．

定理 8.4 上の仮定のもとで次が成り立つ．

(i) $\{\sigma_i\}_{1\le i\le n}$ は $\widehat{V}$ の基で，$\widehat{V} \ni \sigma$ は

(8.2) $$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, \sigma\rangle \sigma_i$$

と一意的に表される．

(ii) V_A の R-基 $\{v_i\}$ に関する A の表現と ${}_A\widehat{V}$ の R-基 $\{\sigma_i\}$ に関する表現は一致する．

(iii) $\varphi : V \to \hat{\hat{V}}$ は A-同型である．ただし　$\varphi(v) : \sigma \mapsto \langle v, \sigma\rangle$　とする．

［**証明**］ (i) 任意の v_j に対し $\langle v_j, \sum_i \langle v_i, \sigma\rangle \sigma_i\rangle = \sum_i \langle v_i, \sigma\rangle\langle v_j, \sigma_i\rangle = \langle v_j, \sigma\rangle$ となるから (8.2) が成り立つ．また　$\sum_i \alpha_i \sigma_i = 0\ (\alpha_i \in R)$　とすれば，$0 = \langle v_j, \sum_i \alpha_i \sigma_i\rangle = \alpha_j$　となるから $\{\sigma_i\}$ は R-自由である．

(ii) $A \ni a$ に対し V の基 $\{v_i\}$ に関する表現を $X(a) = (\alpha_{ij}(a))$ とすれば

$$v_i a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(a) v_j$$

となる．このとき　$\langle v_i, a\sigma_j\rangle = \langle v_i a, \sigma_j\rangle = \alpha_{ij}(a)$　であるから，(8.2) より

$$a\sigma_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(a)\sigma_i$$

となり，$\widehat{V}$ の基 $\{\sigma_i\}$ に関する a の表現は $X(a)$ に一致する ((1.4) 参照)．

(iii) $v = \sum_i \alpha_i v_i \neq 0$　とすれば $\alpha_i \neq 0$ となる i があり，このとき　$\alpha_i = \langle v, \sigma_i\rangle$

$= \varphi(v)(\sigma_i)$ であるから $\varphi(v) \neq 0$ である．よって φ は単準同型であるが，一方 $\{\varphi(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ は $\hat{V}$ の基 $\{\sigma_i\}$ の双対基であるから φ は全準同型でもある．□

上の定理 (iii) において v と $\varphi(v)$ を同一視して $V = \hat{\hat{V}}$ と考えてよい．

補題 8.5 U, V は (8.1) をみたす A-加群とし，$f : U \to V$ は R-準同型とする．このとき次が成り立つ： ${}^t({}^tf) = f$.

［**証明**］ ${}^t({}^tf) : U = \hat{\hat{U}} \to V = \hat{\hat{V}}$ において，$u \in U, \sigma \in \hat{V}$ に対し

$$\langle {}^t({}^tf)(u), \sigma\rangle = \langle u, {}^tf(\sigma)\rangle = \langle f(u), \sigma\rangle$$

となるから ${}^t({}^tf)(u) = f(u)\ (\forall u \in U)$ が成り立つ．□

補題 8.6 (8.1) をみたす A-加群 U, V について次が成り立つ．

(i) $$\widehat{U\oplus V} \simeq \hat{U}\oplus\hat{V} \qquad (A\text{-同型}).$$

特に V_A が直既約であることと ${}_A\hat{V}$ が直既約であることは同値である．

(ii) $$\mathrm{Hom}_A(U, V) \simeq \mathrm{Hom}_A(\hat{V}, \hat{U}).$$

［**証明**］ (i) 自然な同型 $\mathrm{Hom}_R(U\oplus V, R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(U, R)\oplus\mathrm{Hom}_R(V, R)$ があり，これが A-同型であることは容易に確かめられる．また後半は $\hat{\hat{V}} = V$ に注意すれば明らかである．

(ii) $t : \mathrm{Hom}_A(U, V) \to \mathrm{Hom}_A(\hat{V}, \hat{U})\ (f \mapsto {}^tf)$ は明らかに R-準同型で，補題 8.5 よりこれは単準同型である．一方，$g : \hat{V} \to \hat{U}$ (A-準同型) に対し ${}^tg : U = \hat{\hat{U}} \to V = \hat{\hat{V}}$ (A-準同型) を考えれば，${}^t({}^tg) = g$ であるから t は全準同型でもある．□

最後に R が体のときを考えよう．すなわち

(8.3) <u>A は体 K 上の多元環で，A-加群は K-有限生成</u>

と仮定する．

補題 8.7 上の仮定のもとで，W は A-加群 V の K-部分加群とする．このとき次が成り立つ．

(i) $\dim_K W + \dim_K W^{\perp} = \dim_K V$.

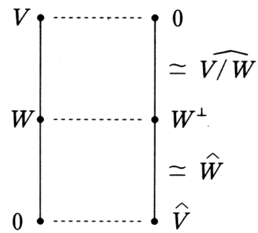
(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(iii) V の A-部分加群 W に $W^{\perp}$ を対応させれば，V の A-部分加群全体

から $\hat{V}$ の A-部分加群全体への全単射 $\perp$ がえられ，これは包含関係を逆転させる．

また次の A-同型が成り立つ：

$$_A(\widehat{V/W}) \simeq {}_A(W^{\perp}),$$
$$_A\hat{W} \simeq {}_A(\hat{V}/W^{\perp}).$$



［証明］ $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を W の基とし，これを含む V の基 $\{v_1, \cdots, v_r, \cdots v_n\}$ をとる．また $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ は $\{v_i\}$ の双対基とする．

（i） $W^{\perp} = \langle \sigma_{r+1}, \cdots, \sigma_n \rangle$ となることは容易にわかるから明らかである．

（ii） $(W^{\perp})^{\perp} \supset W$ は明らかであるが，次元を比較して等号がえられる．

(iii) 写像 $\perp$ が単射であることは (ii) から導かれる．また $\hat{V}$ の任意の A-部分加群 U に対しても $(U^{\perp})^{\perp} = U$ が成り立つから写像 $\perp$ は全射である．

後半について最初の同型は問 8.3 である．2 番目の同型については $\sigma_i (1 \leq i \leq r)$ の W への制限を考えれば $\{\sigma_i | W\}_{1 \leq i \leq r}$ は W の基 $\{v_i\}_{1 \leq i \leq r}$ の $\hat{W}$ における双対基である．一方 $\{\sigma_i + W^{\perp}\}_{1 \leq i \leq r}$ は $\hat{V}/W^{\perp}$ の基であるから，$\sigma_i|_W$ に $\sigma_i + W^{\perp}$ を対応させて K-同型 $\hat{W} \to \hat{V}/W^{\perp}$ がえられる．またこれが A-同型であることは容易に確かめられる．□

問 8.8 仮定 (8.3) のもとで U, V は A-加群，$f: U \to V$ は K-線形写像とするとき次が成り立つ：

（i） $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, {}^t f$,　　（ii） $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = \mathrm{Im}\, {}^t f$.

(注意：(i) は (8.3) の仮定なしで一般に成り立つ．)

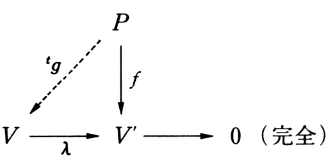
定理 8.9 仮定 (8.3) のもとで次が成り立つ．

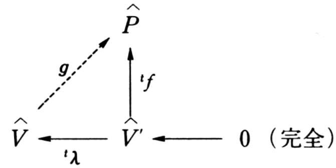
（i） P_A が射影的 $\Longleftrightarrow$ $_A\hat{P}$ が入射的．

（ii） Q_A が入射的 $\Longleftrightarrow$ $_A\hat{Q}$ が射影的．

［証明］ （i） ($\Longleftarrow$) 次ページの左の実線のような A-加群の図形から，右の実線のような左 A-加群の図形がえられる：

いま $_A\hat{P}$ が入射的とすれば，A-準同型 $g: \hat{V} \to \hat{P}$ で $g \circ {}^t\lambda = {}^t f$ をみたすものがある．このとき A-準同型　${}^t g: P = \hat{\hat{P}} \to V = \hat{\hat{V}}$ は $\lambda \circ {}^t g = f$ をみたし，P_A は射影的





である．

(i) の (⇒) と (ii) も同様に証明できる．□

8.2　Frobenius 多元環，対称多元環

以下体 K 上の K-有限生成な多元環を考え，加群もすべて K-有限生成とする．

K-多元環 A の右正則表現と左正則表現が同値であるとき，A は **Frobenius 多元環** であるという．${}_AA$ の双対加群 $\widehat{A}_A$ は A の左正則表現の（右）表現加群であるから，上のことは次の同型が成り立つことに他ならない：

(8.4)　　$A_A \simeq \widehat{A}_A.$

A_A の直既約分解を § 2 のように

$$A = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{\mu=1}^{n_i} e_{i\mu}A \qquad (e_{i\mu}A \simeq e_{j\nu}A \Longleftrightarrow i = j)$$

とし，$e_i = e_{i1}$ とおけば

(8.5)　　$A_A \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} n_i e_i A$

となる．同様に

$$ {}_AA \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} n_i A e_i$$

となり，$\widehat{A}_A$ の直既約分解

(8.6)　　$\widehat{A}_A \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} n_i (\widehat{Ae_i})_A$

がえられる．したがって A が Frobenius 多元環のときは，(8.5) と (8.6) を比較して Krull-Schmidt-東屋の定理を用いれば，$1, 2, \cdots, k$ の置換 $\pi = \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}$ が存在して

(8.7)　　$n_i = n_{\pi(i)}, \qquad e_iA \simeq (\widehat{Ae_{\pi(i)}})_A \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$

となることがわかる．ここで $J = J(A)$ とおくと，$Ae_{\pi(i)}$ は唯一つの極大な A

-部分加群 $Je_{\pi(i)}$ をもち，$Ae_{\pi(i)}/Je_{\pi(i)} = \bar{A}\bar{e}_{\pi(i)}$ であるから，$(\widehat{Ae_{\pi(i)}})_A$ は唯一つの極小な A-部分加群 $(Je_{\pi(i)})^{\perp}$ $(\simeq \widehat{\bar{A}\bar{e}_{\pi(i)}})$ をもつ．一方明らかに $(\widehat{\bar{A}\bar{e}_{\pi(i)}})_A$ は $\bar{e}_{\pi(i)}\bar{A}$ の属する $\bar{A}$ の単純因子に属する既約加群であるから $\bar{e}_{\pi(i)}\bar{A}$ に同型である．

以上をまとめて次の定理がえられる．

定理 8.10　K-多元環 A は Frobenius 多元環とし，(8.5) を A_A の直既約分解とすれば，置換 $\pi = \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}$ が存在して (8.7) が成り立つ．また

$$\mathrm{soc}(e_iA) \simeq \bar{e}_{\pi(i)}\bar{A} \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

となる．

また次は Frobenius 多元環の主要な性質である．

定理 8.11　多元環 A が Frobenius 多元環であるとき，A-加群 V が射影的であることと入射的であることは同値である．

［**証明**］ $_AA$ は射影的であるから $\widehat{A}_A \simeq A_A$ は入射的かつ射影的である（定理 8.9）．いま V_A が射影的とすれば，ある自然数 r があって $V_A | rA_A$ となるから V_A は入射的である．逆に V_A が入射的ならば $_A\widehat{V}$ は射影的で，$_A\widehat{V} | s_AA$ となる s がある．このとき $V_A = \widehat{\widehat{V}}_A | s\widehat{A}_A$ となり V_A は射影的である．□

注意　上の性質をもつ多元環を **準 Frobenius 多元環** という．

Frobenius 多元環についてもっと詳しく調べるため少し準備をしておく．

A は K-多元環とし

(8.8)
$$f : A \times A \to K$$

は K-双線形写像とする．このとき $A \ni a$ に対し K-線形写像

$$\theta_a : A \to K \qquad (x \mapsto f(a, x))$$

がえられ，したがって K-線形写像

(8.9)
$$\theta : A \to \widehat{A} \qquad (a \mapsto \theta_a)$$

がえられる．逆に (8.9) が与えられると $f(a, b) = \theta_a(b)$ とおいて K-双線形写像 (8.8) がえられる．

K-双線形写像 $f: A \times A \to K$ に対して

$$f(a, A) = 0 \implies a = 0$$

が成り立つことと (8.9) の θ が K-同型であることとは同値で，このとき f は **非退化** であるという．

問 8.12 A の K-基を $\{a_1, \cdots, a_n\}$ とするとき，K-双線形写像 $f: A \times A \to K$ について次の条件は同値である．

（1） f は非退化である．

（2） $\det(f(a_i, a_j)) \neq 0$.

（3） $f(A, b) = 0 \Longrightarrow b = 0$.

K-双線形写像 $f: A \times A \to K$ が非退化なとき，A の K-部分加群 W に対して

$$(8.10) \qquad W^{\perp(l)} = \{a \in A\,;\, f(a, W) = 0\},$$
$$W^{\perp(r)} = \{a \in A\,;\, f(W, a) = 0\}$$

とおけば，次が成り立つことは容易にわかる．

$$(8.11) \qquad \dim_K W + \dim_K W^{\perp(l)} = \dim_K A,$$

$$(8.12) \qquad \dim_K W + \dim_K W^{\perp(r)} = \dim_K A,$$

$$(8.13) \qquad (W^{\perp(l)})^{\perp(r)} = W, \qquad (W^{\perp(r)})^{\perp(l)} = W.$$

K-双線形写像 $f: A \times A \to K$ は A の任意の元 a, b, c に対して

$$f(ab, c) = f(a, bc)$$

が成り立つとき **結合的** であるという．また

$$f(a, b) = f(b, a)$$

をみたすとき **対称的** であるという．

非退化で結合的な K-双線形写像 $f: A \times A \to K$ が存在すれば，(8.9) の θ は右 A-加群としての同型となり A は Frobenius 多元環である．実際

$$\theta_{ab}(x) = f(ab, x) = f(a, bx) = \theta_a(bx) = (\theta_a b)(x)$$

となり $\theta_{ab} = \theta_a b$ をえる．

逆に A が Frobenius 多元環で $\theta: A_A \to \widehat{A}_A\ (a \mapsto \theta_a)$ が A-同型ならば，

$f(a,b)=\theta_a(b)$ とおいて非退化でかつ結合的な双線形写像がえられる．

以上のように次の定理の (1) と (2) は同値である．

定理 8.13　K-多元環 A について次の条件は同値である．

(1)　A は Frobenius 多元環である．

(2)　非退化で結合的な K-双線形写像　$f: A\times A\to K$　が存在する．

(3)　K-線形写像 $\lambda: A\to K$ で，$\mathrm{Ker}\,\lambda$ は 0 と異なる右イデアルを含まないものが存在する．

［**証明**］　(2) ⇒ (3)．$\lambda(a)=f(a,1)$ とおけばよい．実際 $\lambda(aA)=0$ とすれば，$f(aA,1)=f(a,A)=0$　となるから $a=0$ をえる．

(3) ⇒ (2)．$f(a,b)=\lambda(ab)$ とおけばよい．実際このとき f は結合的で，また $f(a,A)=0$ とすれば $\lambda(aA)=0$ となるから $a=0$ をえる．□

$\hat{A}\ni\lambda$ が上の定理の (3) の条件をみたすとき λ は **正則** であるという．また A の任意の元 a,b に対して

$$\lambda(ab)=\lambda(ba)$$

が成り立つとき λ は **対称的** であるという．

正則でかつ対称的な $\lambda\in\hat{A}$ が存在するとき A は **対称多元環** であるという．

定理 8.13 の証明のように $\lambda\in\hat{A}$ から結合的な K-双線形写像　$f: A\times A\to K$ $(f(a,b)=\lambda(ab))$　がえられ，逆に上のような f から $\lambda(a)=f(a,1)$ とおいて $\lambda\in\hat{A}$ がえられる．このことから次の定理は明らかである．

定理 8.14　K-多元環 A について次の条件は同値である．

(1)　A は対称多元環である．

(2)　非退化で結合的かつ対称的な K-線形写像　$f: A\times A\to K$　がある．

問 8.15　$\lambda\in\hat{A}$ が正則であることと，$\mathrm{Ker}\,\lambda$ が 0 と異なる左イデアルを含まないことは同値である．（ヒント：問 8.12 参照．）

対称多元環の重要な例を少しあげておこう．まず

定理 8.16　半単純な K-多元環 A は対称多元環である．

［**証明**］ 容易にわかるように A は単純多元環としてよい．$Z=Z(A)$ とおけば A は中心的単純な Z-多元環で，まず A は Z-多元環として対称多元環であることを示す．$A^0\otimes_Z A\simeq M_n(Z)$ で，これは単純であるから $A_{A^0\otimes_Z A}$ はその（同型を度外視して）唯一つの既約加群である．一方 $A^0\otimes_Z A$ の A への左からの作用を $(a^0\otimes b)x=bxa$ となるように定めれば，A は既約な左 $A^0\otimes_Z A$-加群になる．したがって $\hat{A}=\mathrm{Hom}_Z(A,Z)$ は既約な $A^0\otimes_Z A$-加群で次の同型がえられる：

$$A_{A^0\otimes_Z A}\simeq \hat{A}_{A^0\otimes_Z A}.$$

上の同型対応で $1\in A$ に対応する $\hat{A}$ の元を λ とすれば，$\lambda: A\to Z$ は正則かつ対称的な Z-線形写像になることが次のようにして示される．

まず $[\lambda(a^0\otimes b)](x)=\lambda(bxa)$ となることを注意しておく．$1(a^0\otimes 1)=a=1(1^0\otimes a)$ であるから $[\lambda(a^0\otimes 1)](b)=[\lambda(1^0\otimes a)](b)$，よって $\lambda(ba)=\lambda(ab)$ となり λ は対称的である．次に，$a=1(1^0\otimes a)\neq 0$ ならば $\lambda(1^0\otimes a)\neq 0$ であるから，$[\lambda(1^0\otimes a)](A)=\lambda(aA)=Z$ となり λ は正則である．

さて $\mu: Z\to K$ を $\mu(1)=1$ となる任意の K-線形写像とすれば，$\mu\circ\lambda: A\to K$ は K-線形で対称的である．また $A\ni a\neq 0$ ならば $\mu(\lambda(aA))=\mu(Z)=K$ であるから，$\mu\circ\lambda$ は正則である．よって A は K 上の対称多元環である．□

群 G は体 L に作用しているとし，$\alpha: G\times G\to L^\times$ を因子団とするとき，捩れ型の群環

$$(L,G,\alpha)=\bigoplus_{x\in G}u_xL\ \ (u_xu_y=u_{xy}\alpha(x,y),\ \ \gamma u_x=u_x\gamma^x\ \ (\gamma\in L))$$

は $K=L^G$ 上の多元環である．特に G が L に自明に作用しているとき，すなわち $K=L$ のとき (K,G,α) を G の K 上の（因子団 α をもつ）**一般群環**とよんで $K^{(\alpha)}G$ と表す．

定理 8.17 上の記号のもとで次が成り立つ．

(i) 捩れ型の群環 (L,G,α) は $K=L^G$ 上の対称多元環である．

(ii) $\mathrm{Char}\,K\nmid |G|$ ならば (L,G,α) は半単純である．

［**証明**］ $A=(L,G,\alpha)$ とおく．$u_1=1_A$ と仮定してよい．このとき $\alpha(x,x^{-1})^x=\alpha(x^{-1},x)$ が成り立つ（問 7.8）．

(i) G の L への作用の核を H とする： $H=\{x\in G\,;\gamma^x=\gamma\ (\forall\gamma\in L)\}$．

このとき　$\bar{G} = G/H \subset \mathrm{Aut}\,L$　と考えられ，$K = L^{\bar{G}}$ であるから L は K の Galois 拡大で $\bar{G} = \mathrm{Gal}(L/K)$ である（永尾［4］，定理 37.4）．トレース写像　$T_{L/K}$: $L \to K$ $(\gamma \mapsto \sum_{\bar{x} \in \bar{G}} \gamma^{\bar{x}})$　は K-線形写像で，L/K の分離性より $T_{L/K}(L) = K$ である（同上，問 39.9）．

さて　$A \ni a = \sum_x u_x\alpha_x$　に対し $\lambda(a) = \alpha_1$ とおけば L-準同型 $\lambda : A \to L$ がえられる．$\mu = T_{L/K}\circ\lambda : A \to K$　とおいてこれが正則かつ対称的であることを示す．

まず，$a = \sum_x u_x\alpha_x \neq 0$ とすれば $\alpha_x \neq 0$ なる x があり，$\lambda(a(u_x\alpha_x)^{-1}) = 1$ となるから $\lambda(aA) = L$ である．よって　$\mu(aA) = T_{L/K}(L) = K$　となり μ は正則である．

次に　$a = \sum_x u_x\alpha_x$，$b = \sum_y u_y\beta_y$　に対し

$$\lambda(ab) = \sum_x \alpha(x, x^{-1})\alpha_x{}^{x^{-1}}\beta_{x^{-1}}, \qquad \lambda(ba) = \sum_x \alpha(x^{-1}, x)\beta_{x^{-1}}{}^{x}\alpha_x$$

である．ここで　$(\alpha(x, x^{-1})\alpha_x{}^{x^{-1}}\beta_{x^{-1}})^x = \alpha(x^{-1}, x)\beta_{x^{-1}}{}^{x}\alpha_x$　であるからこの両辺のトレースは一致する．よって $\mu(ab) = \mu(ba)$ が成り立ち μ は対称的である．

(ii)　$|G| = n$ とおく．$A \ni a$ に対し

$$au_y = \sum_{x \in G} u_x\gamma_{x,y}(a) \qquad (\gamma_{x,y}(a) \in L)$$

として n 次の行列 $X(a) = (\gamma_{x,y}(a))$ を対応させれば，環準同型 $X : A \to M_n(L)$ がえられる．

$J(A) \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$J(A) \ni a \neq 0$ とする．必要ならば $(u_x\alpha_x)^{-1}$ の形の元をかけて，$a = 1 + \sum_{x \neq 1} u_x\beta_x$　としてよい．a はべき零であるから $X(a)$ もべき零で，したがって $\mathrm{tr}\,X(a) = 0$ である．一方 $x \neq 1$ ならば $X(u_x\beta_x)$ の対角線上の成分はすべて 0 であるから $\mathrm{tr}\,X(u_x\beta_x) = 0$，したがって　$\mathrm{tr}\,X(a) = |G|1_L \neq 0$ となり矛盾である．□

さて一般の多元環に話を戻して，多元環 A の部分集合 S に対して

$$l(S) = \{a \in A \,;\, aS = 0\}, \qquad r(S) = \{a \in A \,;\, Sa = 0\}$$

とおく．これらはそれぞれ A の左，右イデアルで，S の左，右 **零化イデアル** とよばれる．

定理 8.18　A は K 上の Frobenius 多元環とし，I, L をそれぞれ A の右，左イデアルとする．このとき次が成り立つ．

(i)　$r(l(I)) = I$,　$\dim_K I + \dim_K l(I) = \dim_K A$.

(ii)　$l(r(L)) = L$,　$\dim_K L + \dim_K r(L) = \dim_K A$.

[**証明**]　$f: A \times A \to K$ は非退化で結合的な K-双線形写像とし，$\lambda(a) = f(a, 1)$ とおけば $\lambda \in \hat{A}$ は正則である．このとき $x \in A$ に対し xI はまた右イデアルであるから

$$xI = 0 \Longleftrightarrow \lambda(xI) = 0 \Longleftrightarrow f(x, I) = 0$$

となり，(8.10) の記号を用いて $l(I) = I^{\perp(l)}$ をえる．

同様に L に対して $r(L) = L^{\perp(r)}$ となるから (8.11) ～ (8.13) から定理が導かれる．
□

注意　上の定理の性質は Frobenius 多元環を特徴づけることが中山[2]で示されている．(東屋-中山 [1]，Curtis-Reiner [1]等を参照.)

次に Frobenius 多元環の特別な自己同型について考察しよう．

A は K 上の Frobenius 多元環とし，$f: A \times A \to K$ は非退化で結合的な K-双線形写像とする．また $\lambda(a) = f(a, 1)$ とおき，$\theta_a(x) = f(a, x)$ とおくと K-同型　$\theta: A \cong \hat{A}\ (a \mapsto \theta_a)$　がえられた（(8.9) 参照.)．

同様に $a \in A$ に対し $\theta'_a(x) = f(x, a)$ とおけば，f が非退化であることから K-同型　$\theta': A \to \hat{A}\ (a \mapsto \theta'_a)$　がえられる．したがって任意の a に対し $\theta_a = \theta'_b$ となる元 b が一意的に定まる．これを a^σ と表せば全単射　$\sigma: A \to A$ $(a \mapsto a^\sigma)$　で

(8.14)　　$f(a, x) = f(x, a^\sigma)$　　あるいは　　$\lambda(ax) = \lambda(xa^\sigma)$

をみたすものが唯一つ存在する．

定理 8.19　A は Frobenius 多元環とし，$\sigma: A \to A$ を (8.14) のようにとれば

(i)　σ は多元環 A の自己同型である．

(ii)　I を A の右イデアルとすれば

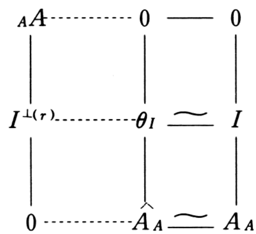
$$I_A \simeq (\widehat{A/l(I)^\sigma})_A, \qquad (A/I)_A \simeq (\widehat{l(I)^\sigma})_A.$$

(iii)　置換 $\pi = \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}$ を (8.7) をみたすようにとれば，左 A-加群として

$$Ae_{\pi(i)} \simeq Ae_i^\sigma.$$

[**証明**] (i) σ が K-加群としての自己同型であることは明らかである．また $\lambda(abx) = \lambda(x(ab)^\sigma)$，一方 $\lambda(abx) = \lambda(bxa^\sigma) = \lambda(xa^\sigma b^\sigma)$ であるから $\lambda(x(ab)^\sigma) = \lambda(xa^\sigma b^\sigma)$ となり，λ の正則性より $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ をえる．

(ii) $\theta : A_A \to \widehat{A}_A \ (a \mapsto \theta_a ; \theta_a(x) = f(a, x))$ は A-同型である．この同型で I には $\widehat{A}_A$ の A-部分加群 $\theta_I = \{\theta_a ; a \in I\}$ が対応し，その（${}_AA$ における）零化加群は $\{x \in A ; f(I, x) = 0\} = I^{\perp(r)}$ である．よって次の A-同型がえられる：



$$I \simeq \theta_I \simeq \widehat{A/I^{\perp(r)}}, \qquad A/I \simeq \widehat{A}/\theta_I \simeq \widehat{I^{\perp(r)}}.$$

したがって $I^{\perp(r)} = l(I)^\sigma$ となることを示せばよい．

明らかに $l(I)^\sigma = l(I^\sigma)$ で，xI^σ は A の右イデアルであるから

$$x \in l(I^\sigma) \Longleftrightarrow \lambda(xI^\sigma) = 0 \Longleftrightarrow \lambda(Ix) = f(I, x) = 0 \Longleftrightarrow x \in I^{\perp(r)}$$

となり，上のことが成り立つ．

(iii) 特に $I = e_iA$ とすれば，$l(I) = A(1 - e_i)$ であるから $A/l(I)^\sigma \simeq Ae_i^\sigma$，したがって $(e_iA)_A \simeq (\widehat{Ae_i^\sigma})_A$ となる．よって (8.7) より $Ae_i^\sigma \simeq Ae_{\pi(i)}$ である．□

定理 8.19 のような σ を Frobenius 多元環 A の **中山の自己同型** とよぶ．

特に A が対称多元環ならば (8.14) より $\sigma = \mathrm{id}_A$ となり，$\pi(i) = i$ であるから (8.7) と定理 8.10 より次が成り立つ．

定 理 8.20 A が対称多元環ならば，$\mathrm{pi}(A) \ni e_i$ に対し次の A-同型が成り立つ：

$$(e_iA)_A \simeq (\widehat{Ae_i})_A, \qquad \mathrm{soc}(e_iA) \simeq \mathrm{hd}(e_iA) = \bar{e}_i\bar{A}.$$

よって e_iA による A の表現と Ae_i による表現は同値である．

定 理 8.21 A は K 上分解型の対称多元環とする．このとき

(i) P_A が射影加群ならば，任意の V_A について次が成り立つ：

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(P, V) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(V, P).$$

(ii) A の Cartan 行列 $C = (c_{ij})$ は対称行列である．すなわち $c_{ij} = c_{ji}$ が成り立つ．また e_iA が既約でなければ $c_{ii} \geq 2$ である．

[**証明**] (i) P は主直既約加群としてよい．$P = e_iA$ （$e_i \in \mathrm{pi}(A)$） とおき，

$\dim_K V$ に関する帰納法で示す．まず V_A は既約とし，$V \simeq \bar{e}_j\bar{A}$ とする．このとき左辺は　$\dim_K \bar{e}_j\bar{A}\bar{e}_i = \delta_{ij}$，右辺も　$\mathrm{soc}(e_iA) \simeq \bar{e}_i\bar{A}$　より δ_{ij} となる．

次に $V \supsetneqq W \neq 0$ なる A-部分加群 W があるとして，完全系列

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow V/W \longrightarrow 0$$

を考える．このとき P は入射的でもあるから

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V/W, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(W, P) \longrightarrow 0$$

は完全系列で

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(V, P) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(W, P) + \dim_K \mathrm{Hom}_A(V/W, P)$$

となり，$W, V/W$ に帰納法の仮定を適用して V に関する等式がえられる．

(ii)　$c_{ij} = \dim_K \mathrm{Hom}_A(e_jA, e_iA) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(e_iA, e_jA) = c_{ji}$．後半は定理 8.20 より明らかである．□

一般に多元環 A に対して，その根基の零化イデアルは

$$l(J(A)) = \{a \in A \,;\, aJ(A) = 0\} = \mathrm{soc}(A_A),$$
$$r(J(A)) = \{a \in A \,;\, J(A)a = 0\} = \mathrm{soc}({}_AA)$$

となり，これらはともに A のイデアルである．

Frobenius 多元環に対しては次が成り立つ．

定理 8.22　Frobenius 多元環 A については

$$l(J(A)) = r(J(A))$$

となり，したがって $\mathrm{soc}(A_A) = \mathrm{soc}({}_AA)$ が成り立つ．

［証明］　$J = J(A)$ とおく．σ を (8.14) のような中山の自己同型とすれば $J^\sigma = J$ である．このとき

$$x \in r(J) \Longleftrightarrow \lambda(Jx) = 0 \Longleftrightarrow \lambda(xJ^\sigma) = \lambda(xJ) = 0 \Longleftrightarrow x \in l(J)$$

となり定理が成り立つ．□

最後に対称多元環の剰余環について考察する．そのため A は K 上の対称多元環とし，$\widehat{A} \ni \lambda$ は正則かつ対称的であるとする．このとき $A \ni c$ に対し

$$\lambda_c : A \to K \qquad (x \mapsto \lambda(cx))$$

は K-線形である．また λ の正則性から任意の $\mu \in \widehat{A}$ に対し $\mu = \lambda_c$ となる c

$\in A$ がある.

定理 8.23　A は K 上の対称多元環, I はそのイデアルとする. このとき次が成り立つ.

(i)　$r(I) = l(I)$ でこれは A のイデアルである.

(ii)　次の 2 条件は同値である.

(1)　A/I はまた対称多元環である.

(2)　$Z(A) \ni c$ で　$r(I) = l(I) = cA$　となるものが存在する.

(iii)　特に　$r(J(A)) = l(J(A)) = cA$　となる $c \in Z(A)$ がある.

[証明]　$\hat{A} \ni \lambda$ は正則かつ対称的であるとする. また $\bar{A} = A/I$ とおく.

(i)　$$x \in r(I) \Longleftrightarrow \lambda(Ix) = 0 \Longleftrightarrow \lambda(xI) = 0 \Longleftrightarrow x \in l(I)$$

であるから $r(I) = l(I)$ で, これはイデアルである.

(ii)　(1) ⇒ (2).　$\bar{\mu} : \bar{A} \to K$ は正則かつ対称的な K-線形写像とする. このとき $\bar{\mu}$ は　$\mu : A \to K\ (x \mapsto \bar{\mu}(\bar{x}))$　を引き起し, $c \in A$ で $\mu = \lambda_c$ となるものがある. $\bar{\mu}$ の対称性より任意の $x, y \in A$ に対し $\lambda(cxy) = \lambda(cyx)$ となる. よって

$$\lambda(cxy) = \lambda(cyx) = \lambda(xcy)$$

が任意の y について成り立ち, $cx = xc$ すなわち $c \in Z(A)$ をえる.

また　$\lambda((cA)I) = \lambda(cI) = \mu(I) = 0$　であるから $(cA)I = 0$ となり, $cA \subset l(I)$ をえる. 一方 $x \in r(cA)$ ならば $\lambda(cAx) = 0$, よって　$\mu(Ax) = \bar{\mu}(\bar{A}\bar{x}) = 0$ となり, $\bar{\mu}$ の正則性から $\bar{x} = 0$ すなわち $x \in I$ をえる. したがって　$r(cA) \subset I$, $cA = Ac = l(r(Ac)) \supset l(I)$　となり $cA = l(I)$ をえる.

(2) ⇒ (1).　$\mu = \lambda_c : x \mapsto \lambda(cx)$　とおけばこれは対称的で, $\mu(I) = \lambda(cI) = 0$ となるから　$\bar{\mu} : \bar{A} \to K\ (\bar{a} \mapsto \mu(a))$　を引き起す. $\bar{\mu}$ が正則であることを示せばよい. そのため　$\bar{\mu}(\bar{a}\bar{A}) = \mu(aA) = 0$　とすれば, $\lambda(caA) = 0$ となるから　$0 = caA = a(cA)$　となり, $a \in l(cA) = l(r(I)) = I$　をえる. よって $\bar{a} = 0$ である.

(iii)　定理 8.16 により $A/J(A)$ は対称多元環であるから明らかである. □

8.3　Frobenius 多元環と Heller 作用素

A は K-多元環とし, A-加群 V の射影被覆, 入射包絡をそれぞれ $P(V)$, $I(V)$ とすれば次の完全系列がえられる:

$$(8.15)\qquad 0 \longrightarrow \Omega(V) \xrightarrow{\iota} P(V) \xrightarrow{f} V \longrightarrow 0,$$
$$(8.16)\qquad 0 \longrightarrow V \xrightarrow{h} I(V) \xrightarrow{g} \Omega^{-1}(V) \longrightarrow 0.$$

補題 8.24 A-加群 V は K-有限生成とする．このとき次が成り立つ．

(i) $P(V), I(V)$ はともに K-有限生成で，次の同型が成り立つ：

$$\widehat{P(V)} \simeq I(\hat{V}), \qquad \widehat{\Omega(V)} \simeq \Omega^{-1}(\hat{V}),$$
$$\widehat{I(V)} \simeq P(\hat{V}), \qquad \widehat{\Omega^{-1}(V)} \simeq \Omega(\hat{V}).$$

(ii) $P(V) \xrightarrow{\lambda} V$ が全準同型ならば $\operatorname{Ker}\lambda \simeq \Omega(V)$ である．また $V \xrightarrow{\mu} I(V)$ が単準同型ならば $\operatorname{Coker}\mu \simeq \Omega^{-1}(V)$ である．

［**証明**］ (i) V_A に対し K-有限生成な A-射影加群 P と A-全準同型 $P \to V$ が存在するが，このときI, 10.18 より $P \simeq P(V) \oplus P'$ となるから $P(V)$ は K-有限生成である．また (8.15) の双対加群を考えれば，完全系列

$$0 \longleftarrow \widehat{\Omega(V)} \longleftarrow \widehat{P(V)} \xleftarrow{{}^t f} \hat{V} \longleftarrow 0$$

がえられ，f が本質的であることから ${}^t f$ が本質的な単準同型であることがわかる．したがって (i) の上段の同型が成り立つ．特に $I(V) \simeq \widehat{P(\hat{V})}$ となるから，これは K-有限生成である．

下段の同型は (8.16) の双対を考えてえられる．

(ii) 前半はI, 10.18 より，また後半は I, 10.19 より明らかである．□

問 8.25 次の同型が成り立つ：

$$\Omega(V) \simeq \widehat{\Omega^{-1}(\hat{V})}, \qquad \Omega^{-1}(V) \simeq \widehat{\Omega(\hat{V})}.$$

以下 <u>A は K 上の Frobenius 多元環</u> とし，前と同様に A-加群はすべて K-有限生成と仮定する．このとき A-加群が射影的であることと入射的であることとは同値である．

また A-加群 V が $V = U \oplus P$ と直和分解され，P が射影的ならばこれは入射的でもあるから $\Omega(V) = \Omega(U)$, $\Omega^{-1}(V) = \Omega^{-1}(U)$ となる(I, 10.17 とその上の注意参照)．したがって Heller 作用素を考えるとき，A-加群の直既約因子はすべて射影的でないとしてよい．このような A-加群を便宜上 **PF-加群** (projective-free module) とよぶことにする．

定理 8.26　A-加群 V が PF-加群であるとき次が成り立つ.

(i)　$\Omega(V), \Omega^{-1}(V)$ はいずれも PF-加群である.

(ii)　$\Omega(\Omega^{-1}(V)) \simeq V \simeq \Omega^{-1}(\Omega(V))$.

(iii)　V が直既約ならば $\Omega(V), \Omega^{-1}(V)$ も直既約である.

［**証明**］ (i)　(8.15) において ι は埋め込みとしてよい. $\Omega(V) = W \oplus P_1$, $P_1\ (\neq 0)$ は射影的と仮定すると, $P_1\ (\subset P(V))$ は入射的でもあるから　$P(V) = P_1 \oplus P_2$ と直和分解され, $f|_{P_2} : P_2 \to V$　は全準同型である. これは $P(V) \xrightarrow{f} V$ が本質的であることに矛盾する.

$\Omega^{-1}(V)$ については上と双対的に証明される.

(ii)　(8.16) において $I(V)$ は射影的でもあるから, I, 10.18 より A-加群 P' が存在して

$$I(V) \simeq P(\Omega^{-1}(V)) \oplus P', \qquad V \simeq \operatorname{Ker} g \simeq \Omega(\Omega^{-1}(V)) \oplus P'$$

となる. ここで P' は射影的で, V は PF-加群であるから $P' = 0$ となり最初の同型がえられる.

2 番目の同型は上と双対的に示される.

(iii)　(i) と (ii) から明らかである. □

問 8.27　上の定理の (i) における $\Omega^{-1}(V)$ に関する主張と, (ii) の 2 番目の同型を証明せよ.

定理 8.26 からえられる次の系は有用である.

系 8.28　A-加群の完全系列　$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\lambda} V \longrightarrow 0$　において P は射影的, V は PF-加群であるとする. このとき次の 2 条件は同値である.

(1)　P は V の射影被覆である.

(2)　P は U の入射包絡である.

［**証明**］ (1) ⇒ (2).　$P = P(V)$ とすれば補題 8.24 (ii) より $U \simeq \Omega(V)$ となり, したがって　$\Omega^{-1}(U) \simeq \Omega^{-1}(\Omega(V)) \simeq V$　となる. 一方 P は入射的であるから I, 10.19 より A-加群 Q が存在して　$P \simeq I(U) \oplus Q$, $V \simeq \operatorname{Coker} \mu \simeq \Omega^{-1}(U) \oplus Q$ となる. よって $Q = 0, P = I(U)$ をえる.

(2) ⇒ (1) は上と双対的に証明される. □

また次の定理が成り立つ．

定理 8.29　A-加群 V は PF-加群とする．このとき

(i)　$\mathrm{soc}(\Omega(V)) = \mathrm{soc}(P(V))$.

(ii)　A は対称多元環とし，$J = J(A)$ とおけば

$$\mathrm{soc}(\Omega(V)) \simeq V/VJ.$$

［**証明**］ (i)　$P = P(V)$ とおき，$P = \bigoplus_i P_i$ を直既約分解とすれば，各P_i は主直既約加群であるから $\mathrm{soc}(P_i)$ は既約である．一方，$V \simeq P/\Omega(V)$ は PF-加群であるから，任意の i に対し　$P_i \cap \Omega(V) \neq 0$，したがって $\mathrm{soc}(P_i) \subset \Omega(V)$ となり，$\mathrm{soc}(P) = \bigoplus_i \mathrm{soc}(P_i) \subset \Omega(V)$　をえる．よって $\mathrm{soc}(P) = \mathrm{soc}(\Omega(V))$ が成り立つ．

(ii)　A は対称多元環であるから $\mathrm{soc}(P) \simeq P/PJ$ となる．一方 $V \simeq P/\Omega(V)$ で，I, 10.15 (ii) より $\Omega(V) \subset PJ$ であるから $P/PJ \simeq V/VJ$ となり，(i) より (ii) の主張がえられる．□

問　題　II

以下 A は体 K 上の有限次元多元環とし，J は A の根基を表すものとする．また A-加群はすべて A-有限生成と仮定する．

1.　$A = \{a = (\alpha_{ij}) \in M_3(K)\,;\, \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0\}$　について，J および A/J を求め，既約右加群の代表系を記せ．

2.　$A \subset M_n(K)$ とする．ある $i\,(1 \leq i \leq n)$ に対し，A が $c_{ii}M_n(K)$ と $M_n(K)c_{ii}$ をともに含むならば，$c_{ii}A$ は入射加群である（c_{ii} は行列単位）．

3.　$A \subset M_n(\boldsymbol{C})$ とする．$a = (\alpha_{ij}) \in A$ に対し常に　$\tilde{a} = {}^t(\bar{\alpha}_{ij}) \in A$　が成り立つならば A は半単純である．ここで $\alpha \in \boldsymbol{C}$ に対し $\bar{\alpha}$ は α の複素共役，行列 a に対し ${}^t a$ は a の転置行列を表す．

4.　ζ_d を $\boldsymbol{C}$ における 1 の原始 d-乗根とする．G を位数 m の巡回群とすれば次の $\boldsymbol{Q}$-多元環としての同型が成り立つ：

$$\boldsymbol{Q}G \simeq \bigoplus_{d \mid m} \boldsymbol{Q}[\zeta_d].$$

5.　B は単位元をもたない K 上有限次元の多元環とする．このとき B は 0 でないべき零イデアルをもつことを次の方針にしたがって示せ．

（i）　$A = K \oplus B$ は次の積によって $(1,0)$ を単位元とする K-多元環となり，B はそのイデアルとなる：

$$(\lambda, a)(\lambda', a') = (\lambda\lambda',\ \lambda a' + \lambda' a + aa').$$

（ii）　$J(A) \neq 0$.

（iii）　$J(A) \cap B \neq 0$.

6.　K は代数的閉体，A は可換と仮定する．B は A の部分多元環で単位元の存在は仮定しない．このとき B の任意の1次元の K-表現　$\varphi : B \to K$ $(\varphi \neq 0)$　は，A の K-表現 $\tilde{\varphi} : A \to K$ で $\tilde{\varphi}(1_A) = 1$ をみたすものに拡張される．

7.　D は $\boldsymbol{R}$ 上の非可換多元体とする．

（i）　D の極大可換部分体は $\boldsymbol{C}$（と同型）であり，$\dim_{\boldsymbol{R}} D = 4$.

（ii）　$\boldsymbol{C}$ における共役写像は D の内部自己同型に拡張されることから，次の条件をみたす $j \in D$ がある（i は虚数単位）：

$$j^{-1}ij = -i, \qquad j^2 = -1.$$

（iii）　$D \simeq Q_{\boldsymbol{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ;\ \alpha,\ \beta \in \boldsymbol{C} \right\}$　　（**4元数体**）．

8.　L は K の分離拡大体とする．

（i）　$J(A^L) = J(A)^L$.

（ii）　A^L-加群 V に対し，A-加群 W があって $V | W^L$.

9.　定理6.3の仮定の下で，L を E と K の中間体とする．

（i）　$m_L(\tilde{V}) \mid m_K(\tilde{V})$.

（ii）　$m_K(\tilde{V}) \mid m_L(\tilde{V}) \dim_K L$.

10.　V は G-加群とする．T が G の部分群であるとき $f \in Z^2(G, V)$ を $T \times T$ に制限してえられる $Z^2(T, V)$ の元を f_T と表す．

$$f_T \sim 0 \qquad \text{ならば} \qquad |G : T| f \sim 0$$

であることを以下の方針にしたがって示せ．

仮定から $g : T \to V$ があって，$f(x,y) = g(y) - g(xy) + g(x)y$ $(\forall x, y \in T)$．$T\backslash G$ を固定し，$d : G \to V$ を次式で与える：

$$d(cx) = f(c,x) - g(c)x - g(1) \qquad (c \in T, x \in T\backslash G).$$

さらに　$h : G \times G \to V$　を

$$h(a,b) = f(a,b) + d(b) - d(ab) + d(a)b$$

とおけば h は f と同伴な因子団であり，次が成り立つ．

(i) $h(a,b)=0 \quad (a\in T, b\in G)$.

(ii) $h(ax,b)=h(x,b) \quad (a\in T, x\in T\backslash G, b\in G)$.

(iii) $h(xy,z)+h(x,y)z=h(y,z)+h(x,yz)$ の両辺の $\sum_{x\in T\backslash G}$ をとれば, $\rho(y)=\sum_{x\in T\backslash G} h(x,y)$ とおくことによって

$$|G:T|h(y,z)=\rho(z)-\rho(yz)+\rho(y)z.$$

11. $f\in Z^2(G,V)$ とするとき, $f\sim 0 \Longleftrightarrow |G|$ を割る任意の素数 p と $S\in \mathrm{Syl}_p(G)$ に対し $f_S\sim 0$.

12. $G=\langle x,y\,;x^5=y^{11}=1,\ x^{-1}yx=y^3\rangle$ とし, $H=\langle x\rangle$ とおく. $L=\boldsymbol{Q}[\zeta_{11}]$ とし, H を $(\boldsymbol{Z}/(11))^\times=\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ の部分群とみて, 接合積 $A=(L/K,1)\simeq M_5(K)$ を考える. ただし $K=L^H$. このとき

(i) $\varphi:\boldsymbol{Q}G\to A\ (\varphi(x)=u_x, \varphi(y)=\zeta_{11})$ は全準同型である.

(ii) $\boldsymbol{Q}G\simeq \boldsymbol{Q}\oplus\boldsymbol{Q}[\zeta_5]\oplus M_5(K)$.

13. 一般群環 $K^{(\alpha)}G$ が 1 次元の表現をもてば群環である.

14. V_A に対し, 次が成り立つ $(i\geq 0)$:

(i) $\mathrm{Hom}_K(V/S_i(V),K)=J^i\hat{V}$.

(ii) $\mathrm{Hom}_K(S_{i+1}(V)/S_i(V),K)\simeq J^i\hat{V}/J^{i+1}\hat{V}$.

15. (i) e を A のべき等元とすれば左 A-加群として次の同型が成り立つ:

$$l(J)e\simeq \mathrm{Hom}_A(eA/eJ,A).$$

(ii) A の任意の既約右加群が A の右イデアルと同型となる.

$$\Longleftrightarrow \quad r(l(J))=J.$$

16. $B=A\oplus_A \hat{A}_A$ をイデアル化の原理 (問題 I, 1) によって K-多元環と考える. このとき $\lambda:B\to K\ (\lambda(a,\varphi)=\varphi(1), \forall a\in A, \forall\varphi\in\hat{A})$ は正則かつ対称的となる. すなわち B は K 上の対称多元環である.

17. A は Frobenius 多元環とし, $\bar{A}=A/J$ とおく. $e\in \mathrm{pi}(A)$ とするとき, K が A の分解体ならば, A_A における $\bar{e}\bar{A}$ の重複度は $\dim_K eA$ に等しい.

18. A が対称多元環 $\Longleftrightarrow$ ${}_AA_A\simeq {}_A\hat{A}_A$.

19. A は対称多元環とする. このとき

(i) V_A に対し, ${}_A\hat{V}\simeq \mathrm{Hom}_A(V,A)$.

(ii) $l(J)=Ac$ となる $Z(A)$ の元 c があることを使って, $e\in\mathrm{pi}(A)$ のとき $\mathrm{hd}(eA)\simeq\mathrm{soc}(eA)$ となることの別証を与えよ.

20. (Wedderburn)　A/J が分離的ならば $A = B \oplus J$ となる部分多元環 B が存在する．

この定理を以下の方針にしたがって証明せよ．

(i)　Γ を A の basic ring とする (問題 I, 16)．このとき $\Gamma/J(\Gamma)$ も分離多元環であり，Γ について上の定理が正しければ A についても正しい．

(ii)　$\dim_K A$ に関する帰納法により，$J^2 = 0$ と仮定してよい．

(iii)　L を K の拡大体とする．もし A^L について上の定理が正しければ A についても正しい：　$A^L = A' \oplus J^L$ となる部分多元環 A' があるとする．L の K-基を考えることにより　$J^L = J \oplus W$ ($\exists_A W_A$)．このとき　$(A' \oplus W) \cap A = B$　は A の部分多元環となり，しかも $A = B \oplus J$ である．

(iv)　以上から $A = \Gamma$ かつ K は代数的閉体と仮定して上の定理を証明すればよい．

21. Λ, Γ を単項イデアル整域 R 上の多元環とし，V_Λ, W_Γ はいずれも R-有限生成自由とする．このとき次の同型が成り立つ：

$$\mathrm{End}_\Lambda(V) \otimes \mathrm{End}_\Gamma(W) \simeq \mathrm{End}_{\Lambda \otimes \Gamma}(V \otimes W)$$

(ただし $\otimes = \otimes_R$)．

III 群の表現

I, II 章の準備のもとでこの章では有限群の表現について，モジュラー表現も含めて基本的な事柄をまとめてのべる．§2 は通常表現の古典理論であるが，直交関係（定理 2.2, 2.5）や絶対既約表現の次数に関する定理（定理 2.4）には新しい証明を与えている．§3 では古典的な Clifford 理論を少し一般的にのべ，§4 では Brauer の基本定理を Isaacs [2] と同様の方法で示す．§5 は射影表現に関する Schur の理論であるが，その次数に関する定理（定理 5.6）についても定理 2.4 と同様の証明を与える．§6 ではモジュラー表現に関して，主として Brauer による指標の理論をのべる．その加群論的な考察とブロックに関する Brauer の第 1, 2, 3 主定理は V 章でのべる．

§1. 群の表現と群環

1.1 群の表現

G は群，R は可換環とする．このとき群の準同型

(1.1) $$X: G \longrightarrow GL_n(R) \qquad (x \mapsto X(x))$$

を G の **R-表現**（または R 上の表現）といい，n をその **次数** という．また R-表現の指標を **R-指標** という．

G の表現 (1.1) が与えられると，これを群環 RG に線形に拡張して RG の表現

(1.2) $$X: RG \longrightarrow M_n(R) \qquad (\textstyle\sum_x a_x x \mapsto \sum_x a_x X(x))$$

がえられる．このとき指標は上で与えた G の R-指標を RG に線形に拡張したものである．

逆に RG の表現 (1.2) が与えられると，$X(1) = I$ (単位行列) であるから G の元には正則行列が対応し，$\boldsymbol{X}$ を G に制限して G の表現 (1.1) がえられる．このように群 G の表現を考えることは，群環 RG の表現を考えることと同じことである．RG の表現 (1.2) の表現加群 V_{RG} を G の表現 (1.1) の表現加群ともいう．このとき $\boldsymbol{X}$ の指標を χ_V と表すことがある．

一般に R-加群 V に群 G が作用しているというときは，その作用は R-線形であるものとする．すなわち $\mathrm{End}_R(V)$ の単数群を $GL(V)$ と表すとき，群の準同型　$\varphi: G \to GL(V)$　が与えられていることに他ならない．このとき G の作用を線形に拡張して，V は自然に RG-加群になる．係数環が R であることが明らかなときは，RG-加群を単に G-加群とよぶ．

G-加群 V に対して

$$\mathrm{Ker}_G V = \{x \in G\,;\, vx = v \ (\forall v \in V)\}$$

とおく．これは上の準同型 $\varphi: G \to GL(V)$ の核に一致し，G の正規部分群である．$\mathrm{Ker}_G V = 1$ のとき V は **忠実な G-加群** であるという．また V が G の表現 $\boldsymbol{X}: G \to GL_n(R)$ の表現加群であるとき，$\mathrm{Ker}_G V$ は $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X}$ に一致する．$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X} = 1$ のとき，$\boldsymbol{X}$ は G の **忠実な表現** であるという．

G で不変な V の元の全体を $\mathrm{Inv}_G V$ と表す：

$$\mathrm{Inv}_G V = \{v \in V\,;\, vx = v \ (\forall x \in G)\}.$$

これは明らかに V の R-部分加群である．

注 意　(1.1) と(1.2) の忠実性は異なる概念である．すなわち RG の表現 (1.2) が忠実ならば G の表現 (1.1) も忠実であるが，この逆は必ずしも成り立たない．例えば $G = \langle a \rangle$ を位数 p (素数) の巡回群とし，$\sqrt[p]{1} \in \boldsymbol{C}$ を1の原始 p-乗根とするとき，$\boldsymbol{C}$ 上の一次の表現 $\boldsymbol{X}: G \to \boldsymbol{C}^\times$ $(a \mapsto \sqrt[p]{1})$　は G の忠実な表現であるが，$\boldsymbol{X}: \boldsymbol{C}G \to \boldsymbol{C}$ は，($\boldsymbol{C}$ 上の次元をみて) 忠実ではない．

例 1.1　G の各元に R の単位元 1_R を対応させると G の一次の表現がえられる．これを $\mathbf{1}_G$ と表して G の **単位表現** とよぶ：

$$\mathbf{1}_G: G \longrightarrow R^\times \qquad (\forall x \mapsto 1_R).$$

この表現加群は R 自身で，G の元 x の作用は $\alpha x = \alpha$ $(\forall \alpha \in R)$ となる．このよ

うに R 自身を G-加群と考えたとき，これを **自明な G-加群** といい，R_G と表すことがある．一般に G の一次の表現はその指標と同じものと考えてよい．$\mathbf{1}_G$ を指標とみるときはこれを G の **単位指標** とよぶ．

1.2 誘導加群

H は群 G の部分群とする．このとき RG-加群 V は作用域を RH に制限して RH-加群とみることができる．このように考えたとき，V_{RH} を V の H への **制限** とよんで V_H と表す．V が G の表現 $\boldsymbol{X}$ の表現加群であるときは，V_H は $\boldsymbol{X}$ を H へ制限してえられる H の表現 $\boldsymbol{X}|_H$ の表現加群である．

次に RH-加群 W に対して

(1.3) $$W^G = W \otimes_{RH} RG$$

は RG-加群で，これを W_{RH} の（G への）**誘導加群** とよぶ．左 RH-加群の誘導加群も同様に定義される．

いま G の H による右分解を $G = \sum_{i=1}^r Ht_i$ とすれば

(1.4) $$RG = \bigoplus_{i=1}^{r} (RH)t_i$$

であるから，RG は，左 RH-加群として自由である．同様に $(RG)_{RH}$ も RH-自由である．

(1.3) と (1.4) から

$$W^G = \bigoplus_{i=1}^{r} W \otimes t_i$$

となり，G の元 x はこれに次のように作用する．各 t_i に対し

(1.5) $$t_i x = h t_{i'}$$

となる $h \in H$ と $t_{i'}$ が一意的に定まるが，このとき $w \in W$ に対して

(1.6) $$(w \otimes t_i)x = w \otimes (t_i x) = w \otimes (h t_{i'}) = (wh) \otimes t_{i'}$$

となる．

特に W が H の表現加群で，その R-基 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ に関する H の表現を $\boldsymbol{Y}$ とする．このとき

$$\{w_1 \otimes t_1, \cdots, w_m \otimes t_1, \cdots, w_1 \otimes t_r, \cdots, w_m \otimes t_r\}$$

は W^G のR-基で，この基に関する G の表現を $\boldsymbol{Y}^G$ と表して，これを $\boldsymbol{Y}$ の **誘**

導表現とよぶ．

(1.5) から $h = t_i x t_{i'}^{-1} \in H, j \neq i'$ ならば $t_i x t_j^{-1} \notin H$ であるから，(1.6) より誘導表現 $\boldsymbol{Y}^G$ は次のようになる：

$$(1.7)\qquad \boldsymbol{Y}^G : x \mapsto Y^G(x) = \begin{pmatrix} Y(t_1 x t_1^{-1}) & \cdots & Y(t_1 x t_r^{-1}) \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ Y(t_r x t_1^{-1}) & \cdots & Y(t_r x t_r^{-1}) \end{pmatrix}.$$

ただし $Y(t_i x t_j^{-1})$ は，$t_i x t_j^{-1}$ が $\boldsymbol{Y}$ の定義域 H に属さないときは零行列であるとする．(1.7) から指標については次が成り立つ：

$$(1.8)\qquad \chi_{Y^G}(x) = \sum_{i=1}^{r} \chi_Y(t_i x t_i^{-1}).$$

ただし $t_i x t_i^{-1} \notin H$ のときは $\chi_Y(t_i x t_i^{-1}) = 0$ とする．

補題 1.2　$H \leq G$ とするとき W_{RH} に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{Ker}_G\, W^G = \bigcap_{a \in G} a^{-1}(\mathrm{Ker}_H\, W)\, a.$$

［**証明**］　$x \in \mathrm{Ker}_G\, W^G$ とすれば(1.6)より，(1.5)において $i' = i$, $h \in \mathrm{Ker}_H\, W$ となるから　$x \in \bigcap_i t_i^{-1}(\mathrm{Ker}_H\, W) t_i$　となる．また明らかにこの逆も成り立つから $\mathrm{Ker}_G\, W^G = \bigcap_i t_i^{-1}(\mathrm{Ker}_H\, W) t_i$　となるが，$\mathrm{Ker}_H\, W \lhd H$ であるからこの右辺は $\bigcap_{a \in G} a^{-1}(\mathrm{Ker}_H\, W) a$　に等しい．□

例 1.3　群 G が有限集合 Ω に作用しているとして，$\Omega \ni \omega$ に G の元 x を作用させた元を ωx ($\in \Omega$) と表すことにする (永尾 [4] § 12 参照)．また Ω の元を基とする R-自由加群を $R\Omega$ と表す：$R\Omega = \bigoplus_{\omega \in \Omega} R\omega$．このとき $x \in G$ の $R\Omega$ への作用を $(\sum_\omega a_\omega \omega) x = \sum_\omega a_\omega(\omega x)$　と定義して $R\Omega$ は自然に G-加群になる．このとき $R\Omega$ を G の（R上の）**置換加群**とよぶ．

いま $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ とし，$G \ni x$ に対して $\omega_i x = \omega_{i(x)}$ とおく．このとき $R\Omega$ の基 $\{\omega_i\}$ に関する G の表現を　$\boldsymbol{P}: x \mapsto P(x) = (\rho_{ij}(x))$　とすれば，$\rho_{ij}(x) = \delta_{i(x),j}$ (Kronecker の δ) となり，$P(x)$ の各行，各列には 1 がちょうど一つずつあって他の成分はすべて 0 である．このような G の表現 $\boldsymbol{P}$ を Ω 上の**置換表現**といい，G が Ω に可移に作用しているときこの置換表現は**可移**であるという．

$\Omega/G = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_t\}$を Ω における G-軌道の集合とすれば，RG-加群として

$$R\Omega = R\Omega_1 \oplus \cdots \oplus R\Omega_t$$

と直和分解されるから，$\boldsymbol{P}$はいくつかの可移な置換表現の直和に分解される．

問 1.4 例 1.3 において次が成り立つ.

(i) $\chi_{\boldsymbol{P}}(x) = \#\{\omega \in \Omega\,;\, \omega x = \omega\}\cdot 1_R$.

(ii) $\mathrm{Inv}_G(R\Omega) = \bigoplus_{i=1}^{t} R\widehat{\Omega}_i$. ただし $\widehat{\Omega}_i = \sum_{\omega\in\Omega_i}\omega$ とする.

群 G が有限集合 Ω に可移に作用しているとき, $\Omega \ni \omega$ の安定部分群 $G_\omega = \{x \in G\,;\, \omega x = \omega\}$ を H とおき, $G = \sum_{i=1}^{r} Ht_i$ とすれば $\Omega = \{\omega t_1, \cdots, \omega t_r\}$ となる.

問 1.5 上の仮定のもとで Ω 上の置換表現 $\boldsymbol{P}$ は, $H(= G_\omega)$ の単位表現の誘導表現 $(\mathbf{1}_H)^G$ に同値である. したがって次が成り立つ.

(i) $\chi_{\boldsymbol{P}}(x) = \#\{Ht \in H\backslash G\,;\, Htx = Ht\}\cdot 1_R$.

(ii) $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{P} = \bigcap_{a\in G} a^{-1}Ha$.

例 1.6 $(RG)_{RG}$ の R-基 $G = \{x_1,\cdots,x_g\}$ に関する G の表現は, 群 G の G 上の (可移な) 置換表現で, これを G の **正則表現** とよび $\boldsymbol{\Gamma}_G$ と表す. G の単位元のみからなる部分群を $\{1\}$ と表すことにすれば, $(RG)_{RG} \simeq (R_{\{1\}})^G$ で

$$\boldsymbol{\Gamma}_G = (\mathbf{1}_{\{1\}})^G : x \mapsto (\delta_{x_i x, x_j})_{i,j}$$

となる. またその指標は

$$\chi_{\boldsymbol{\Gamma}_G}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq 1 \text{ のとき} \\ |G|\cdot 1_R & : \quad x = 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.9}$$

となり, これは後で必要になる.

例 1.7 $G \ni a, x$ に対し $x^{-1}ax$ を a^x とかくことにすれば, 群 G はこの作用で G 自身に作用している. これを G の **共役による作用** という. このとき G-軌道は G の共役類で, その全体を $\mathrm{Cl}(G)$ と表す. また $\mathrm{Inv}_G(RG)$ は RG の中心 $Z(RG)$ に一致するから, $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_l\}$ とすれば

$$Z(RG) = \bigoplus_{i=1}^{l} R\widehat{C}_i$$

となる.

さて一般の誘導加群に話を戻して $H \leq K \leq G$ を部分群の列とし, W を RH-加群とする. このとき $K = \sum_i Hs_i$, $G = \sum_j Kt_j$ とすれば $G = \sum_{i,j} Hs_it_j$ となることから, 次の RG-同型が成り立つことが容易にわかる:

$$(W^K)^G \simeq W^G.$$

また RH-加群 W と $G \ni x$ に対し

$$W^x = \{w^x ; w \in W\}$$

は（写像 $w \mapsto w^x$ で）W に R-同型な加群とする．このとき W^x は次のようにして $x^{-1}Hx$-加群と考えられる：

$$w^x h^x = (wh)^x \qquad (h \in H).$$

ただし $h^x = x^{-1}hx$ とし，以後 $x^{-1}Hx$ も H^x と表すことにする．また上のようにしてえられた RH^x-加群 W^x は RH-加群 W に G-**共役**であるという．

補題 1.8 $H \leq G$，W は RH-加群，$G \ni x$ とするとき，次の RG-同型が成り立つ：

$$(W^x)^G \simeq W^G.$$

特に RG-加群 V に対しては $V^x \simeq V$（RG-同型）となる．

［**証明**］ $G = \sum_i Ht_i$ とすれば $G = \sum_i H^x t_i^x = \sum_i H^x(x^{-1}t_i)$ となる．このとき R-同型 $f: W^G = \oplus_i W \otimes t_i \to (W^x)^G = \oplus_i W^x \otimes (x^{-1}t_i)$ で $f(w \otimes t_i) = w^x \otimes (x^{-1}t_i)$ となるものがあるが，これが RG-同型になることは容易に確かめられる．

後半は $H = G$ とする前半の特別の場合で，$f: V \to V^x$（$v \mapsto v^x x^{-1}$）が RG-同型を与える．□

次の定理は有用で，これを **Mackey の分解定理** とよぶ．

定理 1.9（Mackey） H, K は G の部分群とし，G の (H, K) による両側分解を $G = \sum_{i=1}^r Ht_iK$ とする．このとき RH-加群 W に対し，W^G の K への制限は次のように直和分解される：

$$(1.10) \qquad (W^G)_K \simeq \bigoplus_{i=1}^r (W^{t_i}{}_{H^{t_i} \cap K})^K \qquad (RK\text{-同型}).$$

［**証明**］ $K = \sum_j (H^{t_i} \cap K)s_{ij}$ とすれば $G = \sum_{i,j} Ht_is_{ij}$ となり

$$W^G = \bigoplus_i (\bigoplus_j W \otimes t_is_{ij}).$$

ここで $W_i = \oplus_j W \otimes t_is_{ij}$ とおけば R-同型

$$f: W_i \longrightarrow (W^{t_i}{}_{H^{t_i} \cap K})^K = \bigoplus_j W^{t_i} \otimes s_{ij}$$

で $f(w \otimes t_is_{ij}) = w^{t_i} \otimes s_{ij}$ となるものがある．これが RK-同型であることをみるた

め $K \ni x$ に対し $s_{ij}x = h^{t_i}s_{ij'}$ ($h^{t_i} \in H^{t_i} \cap K$) とすれば

$$(w \otimes t_i s_{ij})x = w \otimes t_i h^{t_i} s_{ij'} = (wh) \otimes t_i s_{ij'},$$
$$(w^{t_i} \otimes s_{ij})x = w^{t_i} \otimes h^{t_i} s_{ij'} = (wh)^{t_i} \otimes s_{ij'}$$

となる．よって f は RK-同型で，W^G を K-加群とみれば (1.10) の同型が成り立つ．□

注意 (1.10)の右辺を $\bigoplus_{t \in H\backslash G/K}(W^t{}_{H^t \cap K})^K$ とかくことがある．このとき $\bigoplus_{t \in H\backslash G/K}$ は t が G の (H, K) による両側分解のある完全代表系をわたることを意味する．同様に $\bigoplus_{t \in H\backslash G}$ は t が G の H による右分解のある完全代表系をわたることを意味するものとする．

上の定理で $K = H, t_1 = 1$ とすれば，W^{t_1} は W に RH-同型であるから次の定理がえられる．

定理 1.10 RH-加群 W に対して

$$(W^G)_H \simeq W \oplus \Bigl(\bigoplus_{\substack{t \in H\backslash G/H \\ t \notin H}} (W^t{}_{H^t \cap H})^H \Bigr).$$

特に $W \mid (W^G)_H$ である．

1.3 Hom_R と $\otimes_R$

U, V がともに RG-加群のとき，$\mathrm{Hom}_R(U, V) \ni f$ と $G \ni x$ に対し f^x: $U \to V$ を $f^x(u) = f(ux^{-1})x$ とおいて定義すれば，$\mathrm{Hom}_R(U, V)$ は G のこの作用で G-加群になる．このとき次が成り立つ：

$$\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(U, V)) = \mathrm{Hom}_{RG}(U, V).$$

特に V_{RG} の双対加群 $\hat{V} = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ は，R を自明な G-加群とみて上の作用で G-加群になる．$\hat{V} \ni \sigma$ に対する $G \ni x$ の作用を σx と表すことにすれば

$$\langle v, \sigma x \rangle = \langle vx^{-1}, \sigma \rangle$$

となる．このようにして $\hat{V}$ を RG-加群とみるとき，これを V_{RG} の **反傾加群** という．

注意 V_{RG} に対し $\hat{V}$ は左 RG-加群で $\langle v, x\sigma \rangle = \langle vx, \sigma \rangle$ が成り立った．このとき $\hat{V}$ に対する G の右からの作用を $\hat{\sigma}x = x^{-1}\hat{\sigma}$ と定義したものが V の反傾加群である．

問 1.11 V_{RG} は表現加群で，その基 $\{v_i\}$ に関する G の表現が $X: G \to GL_n(R)$ $(x \mapsto X(x) = (\alpha_{ij}(x)))$ であるとする．このとき V の反傾加群 $\hat{V}$ における $\{v_i\}$ の双対基 $\{\sigma_i\}$ に関する G の表現は $\hat{X}: x \mapsto {}^tX(x^{-1})$ である．(ただし ${}^tX(x^{-1})$ は $X(x^{-1})$ の転置行列を表す．)

上のような G の表現 $\hat{X}$ を X の **反傾表現** とよぶ．

一般に RG-加群 V に対し $\hat{V} \simeq V$ (RG-同型) であるとき V は **自己反傾的** であるという．

補題 1.12 (i) $(RG)_{RG}$ は自己反傾的である．

(ii) V_{RG} が射影的で R-有限生成ならば，その反傾加群 $\hat{V}$ はまた RG の射影加群である．

(iii) 体 K 上の群環 KG において，G の自明な加群 K_G の射影被覆を P とすれば P は自己反傾的である．

[**証明**] (i) RG の R-基 $G = \{x_1, \cdots, x_g\}$ に関する G の (正則) 表現を Γ とおけば，$\Gamma(x){}^t\Gamma(x) = I$ $(\forall x \in G)$ が成り立ち，したがって $\hat{\Gamma}(x) = {}^t\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)$ となる．よって $\widehat{RG} \simeq RG$ (RG-同型) である．

(ii) $V \mid nRG$ のとき示せばよいが，このとき $\hat{V} \mid nRG \simeq n\widehat{RG}$ となるから明らかである $(n \geq 1)$．

(iii) $\mathrm{hd}(P) \simeq K_G$ より $\mathrm{soc}(\hat{P}) \simeq K_G$ となり，$\hat{P}$ は射影的であるから $P \simeq \hat{P}$ である．□

次に U_{RG}，V_{RG} に対し，$U \otimes_R V$ に $G \ni x$ の作用を $(u \otimes v)x = ux \otimes vx$ となるように定めることができて，この作用で $U \otimes_R V$ は G-加群になる．

問 1.13 $M_m(R) \ni A = (\alpha_{ij})$，$M_n(R) \ni B = (\beta_{ij})$ に対し，A と B のテンサー積 $A \otimes B$ は次のような mn 次の正方行列とする：

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \cdots\cdots & \alpha_{1m}B \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{m1}B & \cdots\cdots & \alpha_{mm}B \end{pmatrix}.$$

このとき次が成り立つ．

(i) $M_m(R)\otimes_R M_n(R)$ の元を（上の記号と区別するため）$\sum_i A_i \otimes_R B_i$ $(A_i \in M_m(R), B_i \in M_n(R))$ と表すことにし，これに $\sum_i A_i \otimes B_i \in M_{mn}(R)$を対応させれば同型 $M_m(R)\otimes_R M_n(R) \cong M_{mn}(R)$ がえられる．（これらを同一視して考えることが多い．）

（ヒント：$\{c_{ij}\}$, $\{d_{kl}\}$ をそれぞれ $M_m(R)$, $M_n(R)$ の行列単位とするとき，$\{c_{ij}\otimes_R d_{kl}\}$ は左辺の基，$\{c_{ij}\otimes d_{kl}\}$ は右辺の行列単位になる．）

(ii) U_{RG}, V_{RG} はともに G の表現加群で，それらの基 $\{u_i\}$, $\{v_k\}$ に関する G の表現をそれぞれ $\boldsymbol{X} : x \mapsto X(x) = (\alpha_{ij}(x))$, $\boldsymbol{Y} : x \mapsto Y(x) = (\beta_{kl}(x))$ とする．このとき $U\otimes_R V$ の基として $\{u_i \otimes v_k\}$ を (i, k) に関して辞書式順序で並べたものをとれば，この基に関する G の表現は $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y} : x \mapsto X(x)\otimes Y(x)$ となる．

上のような G の表現 $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$ を二つの**表現のテンサー積**とよぶ．指標に関しては明らかに次が成り立つ：

$$\chi_{X\otimes Y}(x) = \chi_X(x)\,\chi_Y(x).$$

定理 1.14 U, V, W はいずれも RG-加群とする．

(i) U, V がともに G の表現加群ならば

$$\widehat{U\otimes_R V} \simeq \hat{U}\otimes_R \hat{V} \qquad (RG\text{-同型}).$$

(ii) U が G の表現加群ならば次の RG-同型が成り立つ：

$$f : \hat{U}\otimes_R V \cong \mathrm{Hom}_R(U, V) \quad (\sigma\otimes v \mapsto f(\sigma\otimes v) : u \mapsto \langle u, \sigma\rangle v).$$

(iii) U, V がともに G の表現加群ならば

$$\mathrm{Hom}_{RG}(U\otimes_R V, W) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(U, \hat{V}\otimes_R W).$$

[**証明**] (i) $\hat{U}\otimes_R\hat{V} \ni \sigma\otimes\rho$ は R-準同型 $\varphi(\sigma\otimes\rho) : U\otimes_R V \to R$ $(u\otimes v \mapsto \langle u, \sigma\rangle\langle v, \rho\rangle)$ を引き起す．このとき $\varphi : \hat{U}\otimes_R\hat{V} \to \widehat{U\otimes_R V}$ が RG-準同型となることは容易に確かめられる．また U, V の R-基 $\{u_i\}, \{v_j\}$ の双対基をそれぞれ $\{\sigma_i\}, \{\rho_j\}$ とすれば，$\{\varphi(\sigma_i\otimes\rho_j)\}$ が $U\otimes_R V$ の R-基 $\{u_i\otimes v_j\}$ の双対基になるから φ は同型である．

(ii) $G \ni x$ に対し

$$f(\sigma x\otimes vx)(u) = \langle u, \sigma x\rangle vx,$$
$$f(\sigma\otimes v)^x(u) = [f(\sigma\otimes v)(ux^{-1})]x = \langle ux^{-1}, \sigma\rangle vx = \langle u, \sigma x\rangle vx$$

となるから f は RG-準同型である.

これが同型であることをみるため $\{u_i\}$ を U の R-基，$\{\sigma_i\}$ はその双対基とする. このとき $f(\sum_i \sigma_i \otimes v_i) = 0$ とすれば，任意の j に対して $0 = f(\sum_i \sigma_i \otimes v_i)(u_j) = \sum_i \langle u_j, \sigma_i \rangle v_i = v_j$ となるから f は単準同型である. また $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(U, V)$ に対し

$$f(\textstyle\sum_i \sigma_i \otimes \varphi(u_i))(u_j) = \sum_i \langle u_j, \sigma_i \rangle \varphi(u_i) = \varphi(u_j) \quad (\forall j)$$

となるから $\varphi = f(\sum_i \sigma_i \otimes \varphi(u_i))$ となり f は全準同型である.

(iii) (i), (ii) より次の RG-同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(U \otimes_R V, W) &\simeq \widehat{U \otimes_R V} \otimes_R W \simeq \hat{U} \otimes_R \hat{V} \otimes_R W \\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(U, \hat{V} \otimes_R W).\end{aligned}$$

ここで G-不変な元のつくる部分加群を考えればよい. □

補題 1.15 $H \leq G$, V_{RG}, W_{RH} に対し，次の RG-同型が成り立つ.

(i) $\hat{W}^G \simeq \widehat{W^G}$.

(ii) $V \otimes_R W^G \simeq (V_H \otimes_R W)^G$.

［証明］ $G = \sum_i Ht_i$, $t_1 = 1$ とする.

(i) $\varphi : \{\mathrm{Hom}_R(W, R)\}^G \to \mathrm{Hom}_R(W^G, R)$ で $\varphi(\sum_i f_i \otimes t_i)(\sum_i w_i \otimes t_i) = \sum_i f_i(w_i)$ となるものがあり，これが R-同型であることは容易にわかる. また $G \ni x$ に対し，$t_i x = h_i t_{i'}$ $(h_i \in H)$ とすれば

$$\begin{aligned}\varphi((\textstyle\sum_i f_i \otimes t_i)x)(\sum_i w_i \otimes t_i) &= \varphi(\textstyle\sum_i f_i^{h_i} \otimes t_{i'})(\sum_i w_i \otimes t_i) \\ &= \textstyle\sum_i f_i(w_{i'} h_i^{-1}), \\ \varphi(\textstyle\sum_i f_i \otimes t_i)^x (\sum_i w_i \otimes t_i) &= \varphi(\textstyle\sum_i f_i \otimes t_i)(\sum_i w_{i'} \otimes t_{i'} x^{-1}) \\ &= \varphi(\textstyle\sum_i f_i \otimes t_i)(\sum_i w_{i'} h_i^{-1} \otimes t_i) \\ &= \textstyle\sum_i f_i(w_{i'} h_i^{-1})\end{aligned}$$

となるから φ は RG-同型である.

(ii) R-線型写像 $\psi : V \otimes_R W^G \to (V_H \otimes_R W)^G$ で $\psi(v \otimes (w \otimes t_i)) = (vt_i^{-1} \otimes w) \otimes t_i$ をみたすものがあり，これが同型になることは容易に確かめられる. また $G \ni x$ に対し $t_i x = ht_{i'}$ $(h \in H)$ とすれば

$$\begin{aligned}\psi(vx \otimes (w \otimes t_i)x) &= \psi(vx \otimes (wh \otimes t_{i'})) = (vxt_{i'}^{-1} \otimes wh) \otimes t_{i'} \\ &= (vt_i^{-1} h \otimes wh) \otimes t_{i'} = ((vt_i^{-1} \otimes w) \otimes t_i)x\end{aligned}$$

となり，ψ は RG-同型である．□

系 1.16 P は RG-射影加群とする．このとき G の任意の表現加群 V_{RG} に対し，$V\otimes_R P$ は RG-射影的である．

［**証明**］ P が $RG\oplus\cdots\oplus RG$ の直和因子に同型ならば，$V\otimes_R P$ は $V\otimes_R(RG\oplus\cdots\oplus RG)\simeq(V\otimes_R RG)\oplus\cdots\oplus(V\otimes_R RG)$ の直和因子に同型であるから $V\otimes_R RG$ がRG-自由加群であることを示せばよい．

R を $\{1\}$-加群とみれば，その誘導加群 R^G は RG に同型である．よって

$$V\otimes_R RG\simeq V\otimes_R R^G\simeq(V_{\{1\}}\otimes_R R)^G\simeq(V_{\{1\}})^G$$

となるが，V は R-自由加群であるから $(V_{\{1\}})^G$ は RG-自由加群である．□

また補題 1.15(ii) から次の **Mackey のテンサー積定理**がえられる．

定理 1.17 (Mackey) H, K は G の部分群とするとき，U_{RH}, W_{RK} に対して次の同型が成り立つ：

$$U^G\otimes_R W^G\simeq\bigoplus_{t\in H\backslash G/K}(U^t_{H^t\cap K}\otimes_R W_{H^t\cap K})^G.$$

［**証明**］ $\otimes_R$ を $\otimes$ と略記する．$U^G\otimes W^G\simeq((U^G)_K\otimes W)^G$ であるが，Mackey の分解定理から

$$(U^G)_K\otimes W\simeq\bigoplus_{t\in H\backslash G/K}(U^t_{H^t\cap K})^K\otimes W\simeq\bigoplus_t(U^t_{H^t\cap K}\otimes W_{H^t\cap K})^K$$

となる．

よってこれらの G への誘導加群を考えれば定理がえられる．□

問 1.18 P は有限生成の RG-射影加群とする．このとき任意の表現加群 V_{RG} に対し，$\mathrm{Hom}_R(P, V)$, $\mathrm{Hom}_R(V, P)$ は RG-射影的である．

（ヒント：定理 1.14(ii) を利用せよ．）

定理 1.19 $G\geq H$ のとき，V_{RG}, W_{RH} に対し次の R-同型が成り立つ．

(i) $\mathrm{Hom}_{RH}(W, V_H)\simeq\mathrm{Hom}_{RG}(W^G, V)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{RH}(V_H, W)\simeq\mathrm{Hom}_{RG}(V, W^G)$.

［**証明**］ (i) I, 11.3 (i) において $A=RG, B=RH$ とおいてえられる．この同型では $g\in\mathrm{Hom}_{RH}(W, V_H)$ に対し，次式で定義される $g'\in\mathrm{Hom}_{RG}(W^G, V)$ が対応している．

$$g'(\sum_{t\in H\backslash G} w_t\otimes t) = \sum_t g(w_t)t.$$

(ii) $f \in \mathrm{Hom}_{RH}(V_H, W)$ に対し，$\tilde{f}: V \to W^G$ を

$$\tilde{f}(v) = \sum_{t\in H\backslash G} f(vt^{-1})\otimes t$$

によって定義する．このとき $\tilde{f}$ は RG-準同型であって，$f \mapsto \tilde{f}$ は単射であることが容易にわかる．全射であることをみるために $h \in \mathrm{Hom}_{RG}(V, W^G)$ に対し，$h(v) = \sum_{t\in H\backslash G} h_t(v)\otimes t$ とおく ($h_t(v) \in W$)．このとき h が RG-準同型であることから $h_1 \in \mathrm{Hom}_{RH}(V_H, W)$ であり，$h_t(v) = h_1(vt^{-1})$ であることがわかる ($\forall t \in H\backslash G$)．すなわち $h = \tilde{h}_1$ である．□

補題 1.20 $G \geq H, G = \sum_i Ht_i$ (ただし $t_1 = 1$) とする．このとき W_{RH} に対し次の同型が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}: \mathrm{Inv}_H(W) \cong \mathrm{Inv}_G(W^G) \qquad (w \mapsto \textstyle\sum_i w\otimes t_i).$$

[**証明**] $\mathrm{Tr}(w)$ が G-不変であることは容易に確かめられる．また Tr が単準同型であることは明らかである．これが全準同型であることをみるため $\mathrm{Inv}_G(W^G) \ni u = \sum_i w_i\otimes t_i$ とすれば，$ut_i = w_1\otimes t_i + \cdots = u$ より $w_i = w_1$ ($\forall i$) となり，$u = \mathrm{Tr}(w_1)$ をえる．また $uh = u$ ($\forall h \in H$) より $w_1 \in \mathrm{Inv}_H(W)$ である．□

問 1.21 $G \geq H, K$ とするとき U_{RH}, W_{RK} に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Hom}_{RG}(U^G, W^G) \simeq \bigoplus_{t\in H\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{R[H^t\cap K]}(U^t, W).$$

1.4 体上の群環

以下この節では体 K 上の群環について考察する．

定理 1.22 (Maschke) 群 G の体 K 上の群環 KG について次が成り立つ：

$$KG \text{ が半単純} \Longleftrightarrow \mathrm{Char}\, K \nmid |G|.$$

[**証明**] ($\Leftarrow$) II, 8.17 で示してある．

($\Rightarrow$) $\mathrm{Char}\, K = p > 0$ で $p \,|\, |G|$ と仮定する．このとき $z = \sum_{x\in G} x \in Z(KG)$ であるが，$z^2 = |G|z = 0$ となるから $z(KG)$ は 0 と異なるべき零イデアルで，したがって $J(KG) \neq 0$ である．□

体 K が KG の分解体であるとき，簡単に K は G の分解体であるという．

定理1.23 $\mathrm{Char}\,K \nmid |G|$ のとき，G の絶対既約表現の同値類の個数は G の共役類の個数に等しい．

[証明] K は G の分解体としてよい．$Z(KG)=\bigoplus_{C\in \mathrm{Cl}(G)}K\hat{C}$ であるから，II，3.14 より明らかである．□

p 群の群環については次が成り立つ．

定理1.24 G は p 群，$\mathrm{Char}\,K=p$ とするとき，群環 KG について次が成り立つ．

(i) $J(KG)=\bigoplus_{x\in G}K(x-1)=\{\sum_x \alpha_x x\,;\,\sum_x \alpha_x=0\}$.

(ii) G の既約表現は単位表現のみである．

(iii) KG は局所環である．

(iv) K-有限生成で射影的な KG-加群 V は KG-自由加群である．

[証明] $A=KG$ とおく．

(i) 2番目の等式はほとんど明らかである．これを I とおけば，I は A のイデアルで $A/I\simeq K$ となる．したがって $I\supset J(A)$．一方 $|G|=p^n$ とおけば $(x-1)^{p^n}=x^{p^n}-1=0$ となるから，II，3.7 より I はべき零イデアルで $I\subset J(A)$ をえる．

(ii),(iii) $A/J(A)\simeq K$ より明らかである．

(iv) A の主直既約加群は A 自身で，V はそれらの直和に同型である．□

注意 上の定理の (iv) で K-有限生成という仮定は実際には不要である．

II，8.17 で示したように群環 KG は対称多元環である．したがって $A=KG$, $\bar{A}=A/J(A)$ とおけば，$\mathrm{pi}(A)\ni e$ に対して

$$\mathrm{hd}(eA)\simeq \mathrm{soc}(eA)\simeq \bar{e}\bar{A}$$

となる．また $Ae, \bar{A}\bar{e}$ による G の表現はそれぞれ $eA, \bar{e}\bar{A}$ による表現に同値である．K が特に G の分解体のときは，Cartan 不変数について $c_{ij}=c_{ji}$ が成り立つ．

問1.25 $H\lhd G \Longrightarrow J(KH)KG\subset J(KG)$.

(ヒント：$J(KH)$ はべき零で，任意の $x\in G$ に対し $xJ(KH)=J(KH)x$ となる．)

さて P を KG の主直既約加群とすれば $P_H\,|\,(KG)_H$ で，$(KG)_H$ は KH-自由であるから P_H は KH-射影的となり，KH のいくつかの主直既約加群の直和に同型である．

また一般に I が KH の右イデアルであるとき，$I\cdot KG=\bigoplus_{t\in H\backslash G}It$ となり，これは I の誘導加群 I^G に KG-同型である．特に I が $(KH)_{KH}$ の直和因子ならば，I^G は $(KG)_{KG}$ の直和因子に同型である．したがって Q が KH の主直既約加群ならば $Q^G\,|\,KG$ で，Q^G は KG-射影的である．

定理 1.26 $\mathrm{Char}\,K=p>0$, $|G|=p^a g$, $(p,g)=1$ とする．このとき K-有限生成な KG の射影加群 P について次が成り立つ：

$$\dim_K P\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^a)$$

［**証明**］ 上の考察で H を G の Sylow p 群とすれば，P_H は KH-射影的，したがって KH-自由である（定理 1.24）．よって定理が成り立つ．□

以下 K は G, H の分解体であるとして，KG, KH の主直既約加群の同型類の完全代表系をそれぞれ $\{P\}_P, \{Q\}_Q$ とする．また $\bar{P}=\mathrm{hd}(P), \bar{Q}=\mathrm{hd}(Q)$ とおくとき次が成り立つ．

定理 1.27 (Frobenius-中山の相互律)

(i) $P_H\simeq\bigoplus_Q r_{PQ}Q \Longleftrightarrow \bar{Q}^G\longleftrightarrow\sum_P r_{PQ}\bar{P}$.

(ii) $Q^G\simeq\bigoplus_P s_{PQ}P \Longleftrightarrow \bar{P}_H\longleftrightarrow\sum_Q s_{PQ}\bar{Q}$.

(iii) $P_H\longleftrightarrow\sum_Q t_{PQ}\bar{Q} \Longleftrightarrow Q^G\longleftrightarrow\sum_P t_{PQ}\bar{P}$.

［**証明**］ $A=KG$, $B=KH$ とおく．$\{P\}\ni P, P'$ に対して $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P,\bar{P}')$ は $\bar{P}'$ における $\bar{P}$ の重複度であるから (II, 3.8)，$\delta_{P,P'}$ に等しい．同様に $\{Q\}\ni Q$, Q' に対して $\dim_K \mathrm{Hom}_B(Q,\bar{Q}')=\delta_{Q,Q'}$ である．

(i) 左辺を仮定すると

$$\dim_K \mathrm{Hom}_B(P_H,\bar{Q})=\sum_{Q'} r_{PQ'}\dim_K[\mathrm{Hom}_B(Q',\bar{Q})]=r_{PQ}$$

となるが，定理 1.19(ii) より $\mathrm{Hom}_B(P_H,\bar{Q})\simeq\mathrm{Hom}_A(P,\bar{Q}^G)$ となり，この次元は $\bar{Q}^G$ における $\bar{P}$ の重複度に一致する．

(ii) 左辺を仮定すると

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(Q^G, \bar{P}) = \sum_{P'} s_{P'Q} \dim_K [\mathrm{Hom}_A(P', \bar{P})] = s_{PQ}$$

となる．一方 $\mathrm{Hom}_A(Q^G, \bar{P}) \simeq \mathrm{Hom}_B(Q, \bar{P}_H)$ で，この次元は $\bar{P}_H$ における $\bar{Q}$ の重複度に等しい．

(iii) 左辺を仮定すると，II, 8.21 (i) を用いて

$$t_{PQ} = \dim_K \mathrm{Hom}_B(Q, P_H) = \dim_K \mathrm{Hom}_B(P_H, Q)$$

となる．一方 $\mathrm{Hom}_B(P_H, Q) \simeq \mathrm{Hom}_A(P, Q^G)$ で，この次元は Q^G における $\bar{P}$ の重複度に一致する．□

1.5 Schur 指数

$k \subset K$ が体の列であるとき，$K \otimes_k (kG) = (kG)^K$ は K 上の群環 KG に同型で，以後これらを同一視することにする．

このように K の任意の部分体 (例えば素体) k に対し，群環 KG が k 上の群環 kG の係数体を拡大してえられるということは群環特有の性質で，この性質を利用して例えば次のことが示される．

補題 1.28 $KG/J(KG)$ はつねに分離的である．

［**証明**］ K の任意の拡大体 L に対し $J(LG) = J(KG)^L$ を示せばよい (II, 5.1)．そのため k を K の素体とすれば，k は完全体であるから $kG/J(kG)$ は分離的である．したがって $J(KG) = J(kG)^K$, $J(LG) = J(kG)^L$ となる．一方 $J(kG)^L = (J(kG)^K)^L = J(KG)^L$ となるから $J(LG) = J(KG)^L$ をえる．□

上の補題と II, 5.1 より次が成り立つ．

系 1.29 V_{KG} が完全可約ならば，K の任意の拡大体 L に対して $(V^L)_{LG}$ も完全可約である．

群環の Schur 指数についてのべるため，II 章 §6 と同様に KG の分解体 E で K 上有限次 Galois 拡大であるものをとり $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(E/K)$ とおく．また $\tilde{V}$ は (絶対) 既約な EG-加群とし，それによる表現の指標を $\tilde{\xi}$ として，K に $\{\tilde{\xi}(x) ; x \in G\}$ を添加した体を $K(\tilde{\xi})$ と表す．

群 G の元の位数全体の最小公倍数を n とし，これを G の **指数** という．明

らかに $n\,|\,|G|$ である．

E を含む K の代数的閉包 $\tilde{K}$ において，方程式 $x^n-1=0$ の根の全体 U_n を K に添加した体を $K(U_n)$ とすれば，これは K の有限次 Abel 拡大である（永尾 [4]，定理 39.2）．$G \ni x$ に対し $\tilde{\xi}(x)$ は U_n の元の和であるから $K(\tilde{\xi}) \subset K(U_n)$ となり，$K(\tilde{\xi})$ はまた K の有限次 Abel 拡大である．

したがって，この場合 II, 6.2, 6.3, 6.4 が成り立つ．念のためこれらをまとめると次のようになる．

定理 1.30　群環 KG について $\tilde{V}, \tilde{\xi}$ 等は上と同じとし $Z_1 = K(\tilde{\xi})$ とおく．また $m_K(\tilde{V})$ は $\tilde{V}$ の K 上の Schur 指数とし，既約な V_{KG}, U_{Z_1G} をそれぞれ $\tilde{V} \mid V^E, \tilde{V} \mid U^E$ をみたすようにとる．さらに，$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{t} \mathfrak{G}_{\xi}\sigma_i$ $(\sigma_1 = 1)$ とするとき次が成り立つ．

(i)　$V^{Z_1} \simeq U^{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus U^{\sigma_t}$,　$\dim_K Z_1 = t$.

(ii)　$U^E \simeq m_K(\tilde{V})\,\tilde{V}$,

$$V^E \simeq m_K(\tilde{V})(\tilde{V}^{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{V}^{\sigma_t}).$$

(iii)　$\tilde{V}$ は Z_1 の $m_K(\tilde{V})$ 次のある拡大体 L で実現可能である．また $K \subset M \subset E$ なる中間体 M で $\tilde{V}$ が実現可能ならば $Z_1 \subset M$ で，$\dim_{Z_1} M$ は $m_K(\tilde{V})$ の倍数である．

(iv)　自然数 r に対して

$$r\tilde{V} \text{ が } K(\tilde{\xi}) \text{ で実現可能} \iff m_K(\tilde{V}) \mid r.$$

(v)　KG-加群 W に対し，W^E における $\tilde{V}$ の重複度は $m_K(\tilde{V})$ の倍数である．

Char $K = p > 0$ なる体 K 上で考えるときは，次の **Wedderburn の定理** は基本的である．（証明は永尾 [4]，定理 39.12 参照．）

定理 1.31　有限な斜体は可換体である．

この定理と最初にのべた群環特有の性質から次がえられる．

定理 1.32　Char $K = p > 0$ と仮定する．また E は KG の分解体とする．

このとき次が成り立つ.

(i) 任意の絶対既約加群 $\tilde{V}_{EG}$ に対し $m_K(\tilde{V})=1$ である. したがって, $\tilde{\xi}$ を $\tilde{V}$ による表現の指標とすれば, $\tilde{V}$ は $K(\tilde{\xi})$ で実現可能である.

(ii) n を G の指数とするとき, 1 の n 乗根をすべて K に添加した体 $K(U_n)$ は G の分解体である.

(iii) V_{KG} は既約とするとき, K の任意の拡大体 L に対し V^L は

$$V^L \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

(ただし $i \neq j$ ならば $W_i \not\simeq W_j$) と既約分解される.

(iv) 既約な KG-加群 V に対し, K の有限次拡大 L と絶対既約な LG-加群 U が存在して, U を KG-加群とみると

$$V \simeq U \qquad (KG\text{-同型})$$

となる.

［証明］ (i) K の素体を k とすれば

$$kG/J(kG) \simeq \oplus_i M_{n_i}(k_i)$$

と単純因子分解され, Wedderburn の定理から k_i はすべて有限体である. よって

$$KG/J(KG) \simeq (kG/J(kG))^K \simeq \oplus_i M_{n_i}(K \otimes_k k_i)$$

となる. ここで k_i は k 上分離的であるから $K \otimes_k k_i$ は半単純で可換な K-多元環で, $K \otimes_k k_i \simeq \oplus_j L_{ij}$ (L_{ij} は K の有限次拡大) と分解される. したがって

$$KG/J(KG) \simeq \oplus_{i,j} M_{n_i}(L_{ij})$$

となり, その単純因子 $M_{n_i}(L_{ij})$ の Schur 指数はすべて 1 である. よって (i) が成り立つ.

(ii) は (i) より明らかである.

(iii) $\bar{L}$ を L の代数的閉包とするとき, $V^{\bar{L}}$ の (絶対) 既約成分の重複度はすべて 1 である. したがって $V^{\bar{L}}=(V^L)^{\bar{L}}$ より V^L の既約成分の重複度もすべて 1 である.

(iv) 定理 1.30 と同様に E は K の有限次 Galois 拡大とし, $\tilde{V}_{EG}$ は絶対既約で $\tilde{V} \mid V^E$ をみたすとする. $\tilde{\xi}$ を $\tilde{V}$ による表現の指標とし $L=K(\tilde{\xi}), \dim_K L=t$ とおけば, 定理 1.30 (i) より

$$V^L \simeq U_1 \oplus \cdots \oplus U_t \qquad (LG\text{-同型})$$

と既約分解される. この両辺を KG-加群とみるとき, 左辺は tV に同型であるから,

右辺の各$(U_i)_{KG}$は既約でVにKG-同型である．また$m_K(\tilde{V})=1$より$(U_i)_{LG}$は絶対既約である．□

§2. 通常表現

標数0の体K上の群Gの表現を**通常表現**といい，その指標を**通常指標**という．通常表現はすべて完全可約で，表現は同値性を度外視すればその指標できまる．したがって主として指標についてのべることにする．

また特に断らない限り複素数体$\boldsymbol{C}$上の表現を考えることにする．このとき既約表現は絶対既約である．

2.1 指標の直交関係

群環$\boldsymbol{C}G$は$\boldsymbol{C}$上の全行列環の直和に同型で

$$(2.1)\qquad \boldsymbol{C}G=\bigoplus_{i=1}^{k}A_i,\qquad A_i\simeq M_{n_i}(\boldsymbol{C})$$

となり，各単純因子にはn_i次の（絶対）既約表現$\boldsymbol{F}_i$が対応する．$\chi_i=\chi_{\boldsymbol{F}_i}$とおき，これらの既約指標の全体を$\mathrm{Irr}(G)$と表す：

$$\mathrm{Irr}(G)=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_k\}.$$

このとき定理1.23で示したように$|\mathrm{Irr}(G)|=|\mathrm{Cl}(G)|$が成り立つ．また明らかに$\chi_i(1)=n_i$である．

(2.1)からGの正則表現$\boldsymbol{\Gamma}_G$は次のように分解する：

$$\boldsymbol{\Gamma}_G\sim\bigoplus_{i=1}^{k}\chi_i(1)\boldsymbol{F}_i.$$

したがって$\boldsymbol{\Gamma}_G$の指標をγ_Gで表せば

$$(2.2)\qquad \gamma_G=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)\chi_i$$

となる．一方γ_Gの値は(1.9)で求められるから次が成り立つ．

定理2.1

$$(2.3)\qquad \sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)^2=|G|.$$

$$(2.4)\qquad x\neq1\Longrightarrow\sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)\chi_i(x)=0.$$

一般に R を可換環とするとき，G 上定義された R に値をとる関数の全体を $\boldsymbol{F}_R(G)$ と表す：$\boldsymbol{F}_R(G)=\{f:G\to R\}$.

$\boldsymbol{F}_R(G)\ni f,g$，$R\ni\alpha$ に対し，和 $f+g$，積 fg，α 倍 αf を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad (fg)(x)=f(x)g(x),\qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

と定義すれば $\boldsymbol{F}_R(G)$ は R-多元環になる．$G\ni a$ に対し a では 1 の値をとり，他の元では 0 の値をとる関数を φ_a とすれば，$\{\varphi_a\,;\,a\in G\}$ は $\boldsymbol{F}_R(G)$ の R-基となり，$\mathrm{rank}_R\,\boldsymbol{F}_R(G)=|G|$ である．

特に $R=\boldsymbol{C}$ のとき，$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{C}}(G)$ を $\boldsymbol{F}(G)$ と略記する．

$\boldsymbol{F}(G)$ における **内積** $(f,g)_G$ を次のように定義する：

$$(f,g)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x)g(x^{-1}).$$

このときこれは $\boldsymbol{C}$-双線形で対称的，かつ非退化であることは容易に確かめられる．$(f,g)_G=0$ のとき f と g は **直交** するという．

G で考えていることが明らかなときには $(f,g)_G$ の G を省略することがある．

さて G の絶対既約表現 $\boldsymbol{F}_i$ において

$$F_i(x)=(\alpha_{\mu\nu}^{(i)}(x))_{\mu,\nu}$$

とおけば，その成分の関数 $\alpha_{\mu\nu}^{(i)}$ について次の直交関係が成り立つ．

定理 2.2

$$(\alpha_{\mu\nu}^{(i)},\alpha_{\rho\sigma}^{(j)})_G=\delta_{ij}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\frac{1}{\chi_i(1)}.$$

[証明]　(永尾 [1])　$\{(i,\mu,\nu)\,;\,1\le i\le k, 1\le\mu,\nu\le\chi_i(1)\}$ は $|G|$ 個あり，これを辞書式に並べて行の添字とし，G の元を適当に並べて列の添字としてできる次のような $|G|$ 次の正方行列 A,B を考える：

$$A=\left(\alpha_{\mu\nu}^{(i)}(x)\right)_{(i,\mu,\nu),x},\qquad B=\left(\frac{\chi_i(1)}{|G|}\alpha_{\nu\mu}^{(i)}(x^{-1})\right)_{(i,\mu,\nu),x}.$$

このとき ${}^tAB$ の (x,y)-成分は次のようになる：

$$\textstyle\sum_{i,\mu,\nu}\alpha_{\mu\nu}^{(i)}(x)\dfrac{\chi_i(1)}{|G|}\alpha_{\nu\mu}^{(i)}(y^{-1})$$

$$= \sum_{i,\mu} \frac{\chi_i(1)}{|G|} \alpha^{(i)}_{\mu\mu}(xy^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_i \chi_i(1)\chi_i(xy^{-1})$$

$$= \delta_{x,y}.$$

よって ${}^tAB = I$ (単位行列) となるから

$$B\,{}^tA = I$$

が成り立つ．この両辺の $((i,\mu,\nu),(j,\rho,\sigma))$-成分を比較して

$$\frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{x\in G} \alpha^{(i)}_{\nu\mu}(x^{-1})\,\alpha^{(j)}_{\rho\sigma}(x) = \delta_{(i,\mu,\nu)(j,\rho,\sigma)}$$

$$= \delta_{ij}\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}$$

となるから定理が成り立つ．□

問 2.3　$\{\alpha^{(i)}_{\mu\nu};\, 1 \le i \le k,\ 1 \le \mu, \nu \le \chi_i(1)\}$　は一次独立で，したがって $\boldsymbol{F}(G)$ の $\boldsymbol{C}$-基である．

定理 2.2 から次の重要な定理が導かれる．

定理 2.4　群 G の絶対既約表現の次数はすべて $|G|$ の約数である．

［**証明**］　有限次代数体 K で G の分解体となるものがある．K の整数環を R とし，$\mathfrak{p}$ を R の任意の素イデアルとすれば，$\mathfrak{p}$-整数の全体 $R_{\mathfrak{p}}$ は単項イデアル整域で K はその商体である．G の絶対既約表現 $\boldsymbol{F}_i$ は K-表現としてよく，したがって II, 1.6 より $\boldsymbol{F}_i$ はさらに $R_{\mathfrak{p}}$-表現であるとしてよい．すなわち $\alpha^{(i)}_{\mu\nu}(x) \in R_{\mathfrak{p}}$ としてよい．このとき定理 2.2 より

$$\sum_{x\in G} \alpha^{(i)}_{\mu\nu}(x)\,\alpha^{(i)}_{\nu\mu}(x^{-1}) = \frac{|G|}{\chi_i(1)}$$

であるから $|G|/\chi_i(1) \in R_{\mathfrak{p}}$ となる．よって $|G|/\chi_i(1) \in \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}} = R$ となるが，$|G|/\chi_i(1) (\in \boldsymbol{Q})$ は代数的整数であるから有理整数である．□

既約指標について $\chi_i(x) = \sum_\mu \alpha^{(i)}_{\mu\mu}(x)$ であるから，定理 2.2 より直ちに次の直交関係がえられる．

定理 2.5　(指標の第 1 直交関係)

$$(\chi_i, \chi_j)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} \chi_i(x)\chi_j(x^{-1}) = \delta_{ij}.$$

［**証明**］　$(\chi_i, \chi_j) = \sum_{\mu,\nu} (\alpha^{(i)}_{\mu\mu}, \alpha^{(j)}_{\nu\nu}) = \delta_{ij} \sum_{\mu} (\alpha^{(i)}_{\mu\mu}, \alpha^{(i)}_{\mu\mu})$

$$= \delta_{ij}\chi_i(1)\frac{1}{\chi_i(1)} = \delta_{ij}. \quad \Box$$

問 2.6 （一般化された直交関係） 次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_i(xy)\chi_j(x^{-1}) = \delta_{ij}\frac{\chi_i(y)}{\chi_i(1)}.$$

（ヒント：$\alpha_{\mu\mu}^{(i)}(xy) = \sum_\rho \alpha_{\mu\rho}^{(i)}(x)\alpha_{\rho\mu}^{(i)}(y)$ を用いよ．）

$\boldsymbol{F}_R(G) \ni f$ が共役元に対して同じ値をとるとき，すなわち

$$f(a^{-1}xa) = f(x) \qquad (\forall x, a \in G)$$

が成り立つとき f は G の **類関数** であるといい，類関数の全体を $\boldsymbol{CF}_R(G)$ と表す．類関数は実質的には共役類の集合 $\mathrm{Cl}(G)$ で定義された関数と考えてよい．特に $\boldsymbol{CF}_R(G)$ は階数が $k(=|\mathrm{Cl}(G)|)$ の R-自由加群である．

例 2.7 Gの表現Xの指標は類関数である．実際

$$\mathrm{tr}\, X(a^{-1}xa) = \mathrm{tr}\,(X(a)^{-1}X(x)X(a)) = \mathrm{tr}\, X(x)$$

となるから $\chi_X(a^{-1}xa) = \chi_X(x)$ が成り立つ．

以後 $\boldsymbol{CF}_C(G)$ を $\boldsymbol{CF}(G)$ と略記することにする．定理 2.5 より $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \cdots\cdots, \chi_k\}$ は $\boldsymbol{CF}(G)$ の（内積 $(\ ,\ )_G$ に関する）正規直交基で，$\boldsymbol{CF}(G) \ni f$ は

$$f = \sum_{i=1}^{k}(f, \chi_i)_G\, \chi_i$$

と表される．特に表現 X の指標 χ_X における χ_i の重複度は $(\chi_X, \chi_i)_G$ に等しい．

G の表現 X を巡回部分群 $\langle x\rangle$ に制限すれば，これは一次の表現の直和に同値である．したがって $P \in GL_n(\boldsymbol{C})$ を適当にとれば

$$P^{-1}X(x)P = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

となり

$$(2.5) \qquad \chi_X(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n$$

となる．ここで $x^m = 1$ とすれば $\varepsilon_i{}^m = 1$ となり，ε_i はすべて 1 のべき根であ

る．したがって特に $\chi_X(x)$ は代数的整数である．

また $\varepsilon_i^{-1} = \bar{\varepsilon}_i$ (ε_i の共役複素数) であるから，$\chi_X(x^{-1}) = \sum_i \varepsilon_i^{-1} = \overline{\chi_X(x)}$ となる．よって $\overline{\chi_X(x)}$ は $\boldsymbol{X}$ の反傾表現 $\hat{\boldsymbol{X}}: x \mapsto {}^tX(x^{-1})$ の指標に一致する．

上の注意から指標の第1直交関係は次のようにも表される：

(2.6) $$\sum_{x\in G}\chi_i(x)\overline{\chi_j(x)} = \delta_{ij}\,|G|.$$

また n を $\boldsymbol{X}$ の次数とするとき，(2.5) より

$$|\chi_X(x)| \leq n$$

が成り立つ．(ここで| |は複素数の絶対値を表す．)

問 2.8 (i) $|\chi_X(x)| = n \Longleftrightarrow X(x) = \varepsilon I$ (スカラー行列).

(ヒント：(2.5) で $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ なる i, j があれば $|\chi_X(x)| < n$.)

(ii) 自然な準同型 $G \to \bar{G} = G/\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X}$ において，中心 $Z(\bar{G})$ の逆像を $Z_G(\bar{G})$ と表す：$Z_G(\bar{G}) = \{x \in G\,;\,\bar{x} \in Z(\bar{G})\}$．このとき $\boldsymbol{X}$ が既約表現ならば

$$|\chi_X(x)| = n \Longleftrightarrow x \in Z_G(G/\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X}).$$

(iii) $\chi_X(x) = n \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X}$.

注意 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{X}$ を $\mathrm{Ker}\,\chi_X$ と表すことがある：$\mathrm{Ker}\,\chi_X = \{x \in G\,;\,\chi_X(x) = \chi_X(1)\}$.

$\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, C_2, \cdots\cdots, C_k\}$ の各共役類 C_ρ の代表元 x_ρ をとると，$|C_\rho| = |G|\,/\,|C_G(x_\rho)|$ である．(ここで $C_G(x_\rho)$ は x_ρ の G における中心化群である．) また χ_i は類関数であるから，(2.6) より次が成り立つ：

(2.7) $$\sum_{\rho=1}^{k}\frac{1}{|C_G(x_\rho)|}\chi_i(x_\rho)\overline{\chi_j(x_\rho)} = \delta_{ij}.$$

k 次の正方行列

$$X = (\chi_i(x_j))_{i,j}$$

を G の **指標表** とよぶ．これに対して

$$Y = \left(\frac{1}{|C_G(x_j)|}\overline{\chi_i(x_j)}\right)_{i,j}$$

とおけば，(2.7) は $X\,{}^tY = I$ (単位行列) と表される．したがって X は正則行列で，また ${}^tYX = I$ となり次がえられる．

定理 2.9 (指標の第2直交関係)

$$\sum_{i=1}^{k}\overline{\chi_i(x_\rho)}\chi_i(x_\sigma) = \delta_{\rho\sigma}|C_G(x_\rho)|.$$

2.2 指標環と制限写像, 誘導写像

$\boldsymbol{CF}(G)$ は明らかに $\boldsymbol{F}(G)$ の部分環である. また

$$X(G) = \boldsymbol{Z}\chi_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}\chi_k$$

は $\boldsymbol{CF}(G)$ の部分環で, これを G の **指標環** とよび, $X(G)$ の元を G の **一般指標** という. 一般指標 $\chi = \sum_i m_i\chi_i$ ($\neq 0$) は $m_i \geq 0$ ($\forall i$) のとき (ある表現の) 指標になっている. 次の補題は指標の直交関係から導かれる.

補題 2.10 G の一般指標 χ が G の既約指標であるため必要十分な条件は, 次が成り立つことである:

(1) $(\chi, \chi)_G = 1$ (2) $\chi(1) > 0$.

[**証明**] 必要性は明らかである. 十分性は $\chi = \sum_i m_i\chi_i$ とするとき, (1) より $\sum_i m_i^2 = 1$. よってある i に対し $\chi = \pm\chi_i$ となる. このとき (2) より $\chi = \chi_i$ をえる. □

問 2.11 $\bar{\chi}_i = \chi_{i'}$ とすれば

$$\chi_i\chi_j = \sum_\nu m_{ij\nu}\chi_\nu \Longleftrightarrow \chi_{i'}\chi_\nu = \sum_j m_{ij\nu}\chi_j.$$

さて H は G の部分群とするとき, G の類関数 φ の H への制限 φ_H はまた H の類関数で, $\boldsymbol{C}$-線形写像

$$\mathrm{Res}_H^G: \boldsymbol{CF}(G) \longrightarrow \boldsymbol{CF}(H) \qquad (\varphi \mapsto \varphi_H)$$

がえられる. これを G から H への **制限写像** とよぶ.

また H の類関数 θ に対し, G 上の関数 θ^G を次のように定義する:

$$\theta^G(x) = \sum_{t\in H\backslash G}\theta(txt^{-1}). \tag{2.8}$$

(ただし $txt^{-1} \notin H$ のときは $\theta(txt^{-1}) = 0$ とする.)

また θ が H の類関数であることから, (2.8) は次のようにも表される:

$$\theta^G(x) = \frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}\theta(txt^{-1}). \tag{2.9}$$

上の式より θ^G は G の類関数で，$\boldsymbol{C}$-線形写像

$$\mathrm{Ind}_H^G \colon \boldsymbol{CF}(H) \longrightarrow \boldsymbol{CF}(G) \qquad (\theta \mapsto \theta^G)$$

がえられる．これを H から G への **誘導写像** という．定義から明らかなように，x が H のどの元とも G-共役でないときは $\theta^G(x) = 0$ である．

φ, θ がそれぞれ G, H の表現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ の指標ならば φ_H は $\boldsymbol{X}_H$ の指標，また (1.8) より θ^G は誘導表現 $\boldsymbol{Y}^G$ の指標である．したがって制限写像，誘導写像はそれぞれ指標環の間の写像

$$\mathrm{Res}_H^G \colon X(G) \longrightarrow X(H), \qquad \mathrm{Ind}_H^G \colon X(H) \longrightarrow X(G)$$

を引き起す．

問 2.12　$H \leq K \leq G$ を部分群の列とするとき，$\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)$，$\theta \in \boldsymbol{CF}(H)$ に対し次が成り立つ：

$$(\varphi_K)_H = \varphi_H, \qquad (\theta^K)^G = \theta^G.$$

定理 1.27 において，いま考えている場合は $\boldsymbol{C}G$ が半単純であるから $P = \bar{P}, Q = \bar{Q}$ となり，次の定理がえられる．

定 理 2.13　(Frobenius の相互律)

(i)　$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$，$\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$　とするとき

$$\chi_H = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)} r_{\chi,\theta}\theta \Longleftrightarrow \zeta^G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} r_{\chi,\zeta}\chi.$$

(ii)　$\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)$，$\theta \in \boldsymbol{CF}(H)$　とするとき

(2.10)　$$(\varphi_H, \theta)_H = (\varphi, \theta^G)_G.$$

[**証 明**]　(i) は定理 1.27 より明らかである．

(ii)　$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，$\zeta \in \mathrm{Irr}(H)$ のとき，(i) は $(\chi_H, \zeta)_H = (\chi, \zeta^G)_G$ が成り立つことを示している．$\varphi = \sum_\chi m_\chi \chi$，$\theta = \sum_\zeta n_\zeta \zeta$ ($m_\chi, n_\zeta \in \boldsymbol{C}$) と表されるから，(2.10) は明らかである．□

定 理 2.14　$\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)$，$\theta \in \boldsymbol{CF}(H)$　とするとき

(i)　$(\varphi_H \theta)^G = \varphi\theta^G$.

(ii)　特に $(\varphi_H)^G = \varphi(1_H)^G$.

(iii)　$\mathrm{Ind}_H^G(\boldsymbol{CF}(H))$，$\mathrm{Ind}_H^G(X(H))$ はそれぞれ $\boldsymbol{CF}(G)$，$X(G)$ のイデアル

である．

［証明］ (i) φ, θ はそれぞれ G, H の指標の一次結合であるから，それらが指標のとき示せばよい．そのときは補題 1.15 (ii) より明らかである．

(ii) (i) で $\theta = \mathbf{1}_H$ とおけばよい．

(iii) (i) より明らかである．□

$\boldsymbol{CF}(H) \ni \theta, G \ni t$ に対し H^t の類関数 θ^t が次のように定義される：

$$\theta^t(x) = \theta(txt^{-1}) \qquad (x \in H^t = t^{-1}Ht).$$

θ が H の表現加群 W による表現の指標のときは，θ^t は H^t の表現加群 W^t による表現の指標である．

Mackey の定理から次がえられる．

定理 2.15 H, K は G の部分群で，$\theta \in \boldsymbol{CF}(H), \eta \in \boldsymbol{CF}(K)$ とするとき

(i) $$(\theta^G)_K = \sum_{t \in H\backslash G/K} (\theta^t{}_{H^t \cap K})^K.$$

(ii) $$(\theta^G, \eta^G)_G = \sum_{t \in H\backslash G/K} (\theta^t{}_{H^t \cap K}, \eta_{H^t \cap K})_{H^t \cap K}.$$

［証明］ θ, η がそれぞれ H, K の指標のとき示せばよい．

(i) 定理 1.9 より明らかである．

(ii) Frobenius の相互律を 2 度用いて

$$(\theta^G, \eta^G)_G = ((\theta^G)_K, \eta)_K = \sum_{t \in H\backslash G/K} ((\theta^t{}_{H^t \cap K})^K, \eta)_K$$
$$= \sum_t (\theta^t{}_{H^t \cap K}, \eta_{H^t \cap K})_{H^t \cap K}. \ \square$$

問 2.16 $\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$ に対し ζ^G が G の既約指標であるため必要十分な条件は，任意の $t \in G-H$ に対して $\zeta_{H^t \cap H}$ と $\zeta^t{}_{H^t \cap H}$ が共通の既約成分をもたないことである．

（ヒント：上の定理の (ii) を用いよ．）

G が有限集合 Ω に作用しているとき，$\boldsymbol{C}\Omega$ を表現加群とする G の置換表現の指標を ρ_Ω と表し，これを Ω 上の G の **置換指標** という．$G \ni x$ に対し $\rho_\Omega(x)$ は x の固定点の個数に等しい（問 1.4）．また G が Ω 上可移であるとき，$\Omega \ni \omega$ の安定部分群 G_ω の Ω 上の軌道の個数 r を G の **階数** といい，r

$=2$のとき G は Ω 上**2重可移**であるという．

注意 $\{\omega\}$ は G_ω の軌道の一つであるから，$|\Omega|>1$ のときはつねに $r\geq 2$ である．また G が2重可移であることは，G_ω が $\Omega-\{\omega\}$ 上可移であることに他ならない．

定理 2.17 G が有限集合 Ω に作用しているとき次が成り立つ．

(i) $$(\rho_\Omega, \mathbf{1}_G)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_\Omega(x)=\ (G\text{-}\ 軌道の個数).$$

(すなわち G の元の固定点の個数の平均は G- 軌道の個数に等しい.)

特に

$$G が \Omega 上可移 \Longleftrightarrow (\rho_\Omega, \mathbf{1}_G)_G=1.$$

(ii) G が Ω 上可移であるとき，$\Omega\ni\omega$ に対し $H=G_\omega$ とおけば

$$r=|H\backslash G/H|=(\rho_\Omega, \rho_\Omega)_G.$$

(すなわち G の元の固定点の個数の平方の平均は階数 r に等しい.)

特に G が Ω 上2重可移であるため必要十分な条件は，$\rho_\Omega=\mathbf{1}_G+\chi$ $(\mathbf{1}_G\neq\chi\in \mathrm{Irr}(G))$ と ρ_Ω が既約分解されることである．

[**証明**] (i) $\{\Omega_1, \cdots, \Omega_t\}$ を G- 軌道の集合とすれば $\rho_\Omega=\sum_i\rho_{\Omega_i}$ となる．$\Omega_i\ni\omega_i$ に対し $G_{\omega_i}=H_i$ とおけば，$\rho_{\Omega_i}=(\mathbf{1}_{H_i})^G$ であるから

$$(\rho_{\Omega_i}, \mathbf{1}_G)_G=((\mathbf{1}_{H_i})^G, \mathbf{1}_G)_G=(\mathbf{1}_{H_i}, \mathbf{1}_{H_i})_{H_i}=1$$

となる．したがって $(\rho_\Omega, \mathbf{1}_G)_G=\sum_{i=1}^t(\rho_{\Omega_i}, \mathbf{1}_G)_G=t$ をえる．

(ii) $(\rho_\Omega, \rho_\Omega)_G=(\rho_\Omega, (\mathbf{1}_H)^G)_G=((\rho_\Omega)_H, \mathbf{1}_H)_H=r$．また

$$(\rho_\Omega, \rho_\Omega)_G=((\mathbf{1}_H)^G, (\mathbf{1}_H)^G)_G=\sum_{t\in H\backslash G/H}(\mathbf{1}_{H^t\cap H}, \mathbf{1}_{H^t\cap H})_{H^t\cap H}=|H\backslash G/H|$$

となる．

後半は G が可移であるから ρ_Ω の既約分解は $\rho_\Omega=\mathbf{1}_G+\sum_{\chi\neq\mathbf{1}_G}m_\chi\chi$ となり，$r=1+\sum_\chi {m_\chi}^2$ となることから明らかである．□

2.3 Brauer の置換補題

ここで簡単ではあるが有用な Brauer の補題とその応用例についてのべておこう．

集合 Ω 上の対称群を S^Ω と表す．このとき群 G の Ω 上の置換表現は準同型

$\mu: G \to S^{\Omega}$ と考えてよい．いま $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，$\mu(x) = \binom{i}{i^{\mu(x)}} \in S^{\Omega}$ とすれば，対応する行列表現は

$$\boldsymbol{P}_{\mu}: x \longmapsto P_{\mu}(x) = (p_{ij}^{(\mu)}(x)),$$

$$p_{ij}^{(\mu)}(x) = \begin{cases} 1: & j = i^{\mu(x)} \text{のとき}, \\ 0: & j \neq i^{\mu(x)} \text{のとき} \end{cases}$$

となり，その指標を $\rho_{\mu}(x)$ と表すことにすれば

$$\rho_{\mu}(x) = \# \{i \in \Omega \mid i^{\mu(x)} = i\}$$

である．

補題 2.18 (Brauer) $\mu: G \to S^{\Omega}$ と $\nu: G \to S^{\Omega}$ は $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上の二つの置換表現とする．また $GL_n(\boldsymbol{C}) \ni B = (\beta_{ij})$ は正則行列とし，$G \ni x$ は B の第 i 行を第 $i^{\mu(x)}$ 行に，また第 j 列を第 $j^{\nu(x)}$ 列にうつす行，ならびに列の置換を引き起すと考える．このとき任意の i, j に対して

$$\beta_{i^{\mu(x)} j^{\nu(x)}} = \beta_{ij} \qquad (\forall x \in G)$$

が成り立てば次のことがいえる．

(i) 任意の $x \in G$ に対し $\mu(x)$ で固定される行の個数と $\nu(x)$ で固定される列の個数は一致する．

(ii) B の行における G- 軌道の個数は列における G- 軌道の個数に等しい．

［**証明**］ $\rho_{\mu}(x) = \rho_{\nu}(x)$ $(\forall x \in G)$ を示せばよい（定理 2.17 参照）．$\beta_{i^{\mu(x)} j^{\nu(x)}}$ を (i, j)- 成分とする行列は $P_{\mu}(x)BP_{\nu}(x^{-1})$ で，仮定により $P_{\mu}(x)BP_{\nu}(x^{-1}) = B$ であるから $B^{-1}P_{\mu}(x)B = P_{\nu}(x)$ となり $\rho_{\mu}(x) = \rho_{\nu}(x)$ をえる．□

注意 上の定理で B の行を $\mu(x)$ で置換した行列と，B の列を $\nu(x)$ で置換した行列がつねに一致するとき，すなわち

$$\beta_{i^{\mu(x)}j} = \beta_{ij^{\nu(x)}} \qquad (\forall x \in G)$$

であるときも定理の結論 (i)，(ii) が成り立つ．実際このとき $P_{\mu}(x)B = BP_{\nu}(x^{-1})$，$B^{-1}P_{\mu}(x)B = P_{\nu}(x^{-1})$ となるから $\rho_{\mu}(x) = \rho_{\nu}(x^{-1}) = \rho_{\nu}(x)$ をえる．

上の補題を **Brauer の置換補題** とよぶ．この補題を用いて例えば次のようなことがいえる．

補題 2.19 群 A は $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$，ならびに $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \cdots, C_k\}$

に作用しているとし，$C_j \ni x_j$ とする．また $A \ni a$ による χ_i の像を $\chi_i{}^a$, C_j の像を $C_j{}^a$ とし，$C_j{}^a$ の代表元を $x_j{}^a$ と表す．このとき任意の i, j に対して

$$\chi_i{}^a(x_j{}^a) = \chi_i(x_j)$$

が成り立てば

(i) 任意の $a \in A$ によって固定される既約指標の個数と共役類の個数は一致する．

(ii) A の $\mathrm{Irr}(G)$ における軌道の個数は $\mathrm{Cl}(G)$ における軌道の個数に等しい．

［**証明**］ G の指標表 $X = (\chi_i(x_j))$ は正則行列で，A はその行，ならびに列に作用する．このとき仮定により補題 2.18 の条件が成り立つから上の主張がいえる．□

例えば群 A が群 G に作用しているとき，すなわち準同型 $A \to \mathrm{Aut}(G)$（G の自己同型群）が与えられているとき A は $\mathrm{Irr}(G)$，ならびに $\mathrm{Cl}(G)$ に自然に作用し，上の補題の仮定が成り立つ（ただし $\chi_i{}^a(x) = \chi_i(x^{a^{-1}})$）．したがって上の (i), (ii) が成り立つ．

$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi_i$ は $\bar{\chi}_i = \chi_i$ であるとき **実の既約指標** といい，$G \ni x$ は x^{-1} と G-共役であるとき実であるという．また $\mathrm{Cl}(G) \ni C_j$ が実の元からなるとき C_j は **実の共役類** であるという．このとき次が成り立つ．

系 2.20 G の実の既約指標と実の共役類の個数は等しい．

［**証明**］ $A = \langle a \rangle$ は位数 2 の群とし，$\chi_i{}^a = \bar{\chi}_i$，$C_j{}^a = \{x^{-1}; x \in C_j\}$ とおけば A は $\mathrm{Irr}(G)$，ならびに $\mathrm{Cl}(G)$ に作用する．このとき $\bar{\chi}_i(x_j{}^{-1}) = \chi_i(x_j)$ であるから補題 2.19 の仮定が成り立つ．□

2.4 群環の中心的べき等元

$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ を与える既約 $\boldsymbol{C}G$-加群の属する $\boldsymbol{C}G$ の単純因子を A_χ とし，その単位元を e_χ とする．このとき

$$\boldsymbol{C}G = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} A_\chi, \qquad A_\chi \simeq M_{\chi(1)}(\boldsymbol{C}), \tag{2.11}$$

$$Z(\boldsymbol{C}G) = \bigoplus_{\chi} \boldsymbol{C}e_\chi \tag{2.12}$$

となり，$\{e_\chi ; \chi \in \mathrm{Irr}(G)\} = \mathrm{pi}(Z(CG))$ である．

中心的原始べき等元 e_χ の形を求めるため，まず次の補題を示す．

補題 2.21 (Fourier の反転公式) $CG \ni u$ に対し次が成り立つ：

$$u = \sum_{x \in G} \alpha_x x \Longrightarrow \alpha_x = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1) \chi(ux^{-1}).$$

(ただし $\chi(ux^{-1})$ における χ は G の既約指標 χ を CG に線形に拡張したものである．)

［証明］

$$ux^{-1} = \alpha_x 1 + \sum_{y \neq x} \alpha_y y x^{-1}.$$

この両辺の正則表現の指標の値を考えれば (2.2) と定理 2.1 より

$$\sum_\chi \chi(1) \chi(ux^{-1}) = \alpha_x |G|. \ \square$$

定理 2.22

(2.13)
$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} x.$$

［証明］ $e_\chi = \sum_{x \in G} \alpha_x x$ とおけば，上の補題より

$$\alpha_x = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi' \in \mathrm{Irr}(G)} \chi'(1) \chi'(e_\chi x^{-1}).$$

ここで $\chi'(e_\chi x^{-1}) = \delta_{\chi,\chi'} \chi(x^{-1}) = \delta_{\chi,\chi'} \overline{\chi(x)}$ であるから(2.13)が成り立つ．$\square$

2.5 $Z(CG)$ の表現

$Z(CG) \ni z$ が (2.12) において

$$z = \sum_\chi \omega_\chi(z) e_\chi \qquad (\omega_\chi(z) \in C)$$

と表されているとする．このとき

$$z e_\chi = \omega_\chi(z) e_\chi$$

となる．また $\omega_\chi : Z(CG) \to C$ は $Z(CG)$ の一次の表現で，$Z(CG)$ の（絶対）既約表現はこれらでつくされる．ω_χ を χ に対応する $Z(CG)$ の一次表現という．

$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対応する CG の表現を F_χ とすれば，$Z(CG) \ni z$ に対し

$$F_\chi(z) = F_\chi(\omega_\chi(z) e_\chi) = \omega_\chi(z) I \qquad (I : \text{単位行列})$$

となり，両辺のトレースをとって

$$\chi(z) = \chi(1)\omega_\chi(z) \tag{2.14}$$

をえる．特に $\mathrm{Cl}(G) \ni C_i \ni x_i$ とするとき

$$\chi(\hat{C}_i) = |C_i|\chi(x_i) = \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}\chi(x_i)$$

となるから(2.14)より次が成り立つ．

定理 2.23　$$\omega_\chi(\hat{C}_i) = \frac{|G|\chi(x_i)}{|C_G(x_i)|\chi(1)} = \frac{\chi(\hat{C}_i)}{\chi(1)}.$$

各 $C_i \in \mathrm{Cl}(G)$ の代表元 x_i をきめておく．このとき

$$\hat{C}_i\hat{C}_j = \sum\nolimits_k t_{ijk}\hat{C}_k \tag{2.15}$$

とすれば，両辺における x_k の係数をみて

$$t_{ijk} = \#\{(a, b) \in C_i \times C_j\,;\, ab = x_k\} \tag{2.16}$$

となり，これは負でない有理整数である．

また ω_χ は $Z(\boldsymbol{C}G)$ の一次の表現であるから (2.15) より

$$\omega_\chi(\hat{C}_i)\omega_\chi(\hat{C}_j) = \sum\nolimits_k t_{ijk}\omega_\chi(\hat{C}_k) \tag{2.17}$$

となる．このことから次の定理がえられる．

定理 2.24　$$t_{ijk} = \frac{|C_i||C_j|}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\frac{\chi(x_i)\chi(x_j)\overline{\chi(x_k)}}{\chi(1)}.$$

［証明］　(2.17) と定理 2.23 より，

$$\frac{|C_i|\chi(x_i)}{\chi(1)}\frac{|C_j|\chi(x_j)}{\chi(1)} = \sum\nolimits_k t_{ijk}\frac{|C_k|\chi(x_k)}{\chi(1)},$$

よって

$$|C_i||C_j|\frac{\chi(x_i)\chi(x_j)}{\chi(1)} = \sum\nolimits_k t_{ijk}|C_k|\chi(x_k).$$

この両辺に $\overline{\chi(x_k)}$ を掛けて χ について加えると，第 2 直交関係より

$$|C_i||C_j|\sum_\chi\frac{\chi(x_i)\chi(x_j)\overline{\chi(x_k)}}{\chi(1)} = t_{ijk}|C_k|\frac{|G|}{|C_k|}$$

となり，定理が成り立つ．□

注意　t_{ijk} は (2.16) のように群論的に定まる整数で，上の定理は指標と群の構造を関係づける式とみることができる．

(2.17) からえられる次の定理は重要である．

定理 2.25 $\omega_\chi(\hat{C}_i)$ は代数的整数である．

［**証明**］ $S=\sum_i \boldsymbol{Z}\omega_\chi(\hat{C}_i)$ は (2.17) より $\boldsymbol{C}$ の部分環で，$\boldsymbol{Z}$ 上有限生成である．したがってその元はすべて代数的整数である（I, 13.2 参照）．

この定理を応用して定理 2.4 は次のようにも証明できる．

［**定理 2.4 の別証**］ $\mathrm{Irr}(G)\ni\chi$ とすれば，

$$\sum_i \omega_\chi(\hat{C}_i)\overline{\chi(x_i)} = \sum_i \frac{|C_i|\chi(x_i)\overline{\chi(x_i)}}{\chi(1)}$$
$$= \frac{1}{\chi(1)}\sum_{x\in G}\chi(x)\overline{\chi(x)} = \frac{|G|}{\chi(1)}.$$

この左辺で $\omega_\chi(\hat{C}_i)$ は代数的整数，また $\overline{\chi(x_i)}$ も代数的整数である．したがって $\boldsymbol{Q}\ni |G|/\chi(1)$ は代数的整数となり，$\boldsymbol{Z}$ の整閉性によりこれは有理整数である．□

2.6 Burnside の定理

指標の理論の応用として Burnside の "$p^a q^b$ 定理" を示す．そのための補題を二つ準備しておく．

補題 2.26 $\mathrm{Irr}(G)\ni\chi$ とし，対応する既約表現を $\boldsymbol{F}$ とする．また $\mathrm{Cl}(G)\ni C$，$C\ni x$ とする．このとき $(\chi(1),|C|)=1$ ならば $F(x)=\varepsilon I$（スカラー行列）となるか，または $\chi(x)=0$ となる．

（注意：問 2.8 によれば　$F(x)=\varepsilon I \Longleftrightarrow x\in Z_G(G/\mathrm{Ker}\,\chi)$　である．）

［**証明**］ $(\chi(1),|C|)=1$ より $r|C|+s\chi(1)=1$ となる有理整数 r,s がある．このとき

$$r\frac{|C|\chi(x)}{\chi(1)}+s\chi(x)=\frac{\chi(x)}{\chi(1)}$$

となり，$|C|\chi(x)/\chi(1)$ と $\chi(x)$ はともに代数的整数であるから $\xi=\chi(x)/\chi(1)$ は代数的整数である．

いま $F(x)$ がスカラー行列でないと仮定すれば，問 2.8 より $|\xi|<1$ である．$m=o(x)$ とおき，$\boldsymbol{Q}$ に 1 の原始 m 乗根を添加した体を E として $\mathfrak{G}=\mathrm{Gal}(E/\boldsymbol{Q})$ とおく．$\chi(x)$ は $\chi(1)$ 個の 1 の m 乗根の和であるから，任意の $\sigma\in\mathfrak{G}$ に対し $\chi(x)^\sigma$ もそうな

り，したがって $|\xi^\sigma|=|\chi(x)^\sigma|/\chi(1)\leq 1$ である．よって

$$|\prod_{\sigma\in\mathfrak{G}}\xi^\sigma|<1$$

となる．一方 $\eta=\prod_{\sigma\in\mathfrak{G}}\xi^\sigma\in\boldsymbol{Q}$ で，また $f(t)\in\boldsymbol{Q}[t]$，$f(\xi)=0$ ならば $f(\xi^\sigma)=0$ であるから ξ^σ は代数的整数，したがって η も代数的整数で $\eta\in\boldsymbol{Z}$ をえる．よって $|\eta|<1$ より $\eta=0$ となり $\xi=0$，したがって $\chi(x)=0$ である．□

補題 2.27 G が非可換な単純群ならば，任意の $C\in\mathrm{Cl}(G)$，$C\neq\{1\}$ に対し $|C|$ が素数べきになることはない．

［**証明**］ $|C|=p^r$ (p は素数)，$C\neq\{1\}$ と仮定して矛盾を導く．$C\ni x(\neq 1)$ に対し正則表現の指標 γ_G を考えれば

$$0=\gamma_G(x)=1+\sum_{\mathrm{Irr}(G)\ni\chi\neq 1_G}\chi(1)\chi(x) \tag{2.18}$$

となる．ここで G は単純群であるから $\mathrm{Irr}(G)\ni\chi\neq\mathbf{1}_G$ に対し $\mathrm{Ker}\,\chi=1$ である．また G は非可換であるから $Z(G)=Z_G(G/\mathrm{Ker}\,\chi)=1$ である．よって $p\nmid\chi(1)$ ならば $(|C|,\chi(1))=1$ となるから，補題 2.26 より $\chi(x)=0$ である．したがって $\alpha=\sum_{\chi\neq 1_G}(\chi(1)/p)\chi(x)$ とおけばこれは代数的整数であるが，一方 (2.18) より $\alpha=-1/p$ となり矛盾である．□

次が目的とした定理である．

定理 2.28 (Burnside) $|G|=p^aq^b$, p と q は素数とすれば G は可解群である．

［**証明**］ G は Abel 群でないとしてよい．また G が単純群でないことを示せば，位数に関する帰納法で定理は証明される．よって G は非可換な単純群と仮定して矛盾を導く．そのため $\mathrm{Syl}_p(G)\ni P\neq 1$ とし，$Z(P)\ni x\neq 1$, C は x を含む G の共役類とすれば，$C_G(x)\supset P$ より $|C|=|G:C_G(x)|$ は q べきとなり補題 2.27 に反する．□

注意 定理 2.28 を指標を用いないで群論的に証明することは長い間懸案であったが，1970 年 Goldschmidt[1]によって奇数位数の場合が，また 1973 年松山広[1]によって偶数位数の場合が解決された．

§3. Clifford 理論

$G \triangleright H$ として，まず任意の体 K 上での G と H の既約加群の間の関係について Clifford の定理を示す．

W を KH-加群とするとき，$G \ni t$ に対し W^t はまた $H(=H^t)$-加群である．また

$$T(W) = \{t \in G\,;\, W^t \simeq W \ (KH\text{-同型})\}$$

は H を含む G の部分群で，これを W の（G における）**惰性群**とよぶ．W に G-共役な H-加群の同型類の個数は $|G:T(W)|$ に等しい．

以後，既約な KG-加群の同型類の完全代表系を $\mathrm{IRR}(KG)$ と表すことにする．ただし V_{KG} が既約なとき，（同型なものを同一視して）$V \in \mathrm{IRR}(KG)$ とかく．

定理 3.1 (Clifford)　$G \triangleright H, V \in \mathrm{IRR}(KG)$ とし，W は V_H の既約な H-部分加群とする．また $T = T(W)$ とおくとき次が成り立つ．

(i)　自然数 e が存在して

(3.1)
$$V_H \simeq e(\bigoplus_{a \in T\backslash G} W^a)$$

となる．特に V_H は完全可約である．

(ii)　$U \in \mathrm{IRR}(KT)$ が存在して $U_H \simeq eW$ かつ $U^G \simeq V$ となる．

［**証明**］　$G \ni x$ に対し V_H の部分加群 Wx は W^x に KH-同型で，したがって既約である．$\sum_{x\in G} Wx$ は V の G-部分加群であるから，V の既約性より $V = \sum_x Wx$ となり V_H は完全可約である．$V_H = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ を等質分解とすれば $r = |G:T|$ で，$G = \sum_{i=1}^r Ta_i$ $(a_1 = 1)$ とするとき $Wa_i \subset U_i$ $(1 \leq i \leq r)$ としてよい．このとき $U_i = U_1 a_i$ となり，$U_1 \simeq eW$ とすれば $U_i \simeq eW^{a_i}$ となって (3.1) がえられる．

また U_1 は T-加群で，$U_1{}^G \simeq V$ となる．□

(3.1) における自然数 e を V の H に関する **分岐指数** とよぶ．

$\mathrm{IRR}(KH) \ni W$ に対して

$$\mathrm{IRR}(KG\,|\,W) = \{V \in \mathrm{IRR}(KG)\,;\, W | V_H\}$$

とおく.

定理 3.2 $G \triangleright H, \mathrm{IRR}(KH) \ni W$ とし, $T = T(W)$ とおく. このとき

(i) $\mathrm{IRR}(KT|W) \ni U \Longrightarrow U^G$ は既約.

(ii) 写像 $\mathrm{Ind}_T^G : \mathrm{IRR}(KT|W) \longrightarrow \mathrm{IRR}(KG|W)$ $(U \mapsto U^G)$ は全単射である. また $U(\in \mathrm{IRR}(KT|W))$ と U^G の H に関する分岐指数は一致する.

[**証明**] (i) $G \triangleright H$ であるから Mackey の分解定理より

$$(U^G)_H \simeq U_H \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{a \in T\backslash G \\ a \notin T}} U_H{}^a \Big)$$

となり, $U_H \simeq eW$ ならば $U_H{}^a \simeq eW^a$ である. よって $(U^G)_H$ は完全可約である.

いま U^G の既約な G-部分加群 V をとれば, $V_H | (U^G)_H \simeq e(\bigoplus_{a\in T\backslash G} W^a)$ より $V \in \mathrm{IRR}(KG|W)$ となり, 定理 3.1(ii) より $V = U_1{}^G, U_1 \in \mathrm{IRR}(KT|W)$ となる. さて $\mathrm{Hom}_{KG}(V, U^G) \neq 0$ であるが, 一方, 問 1.21 より

$$(3.2)\quad \mathrm{Hom}_{KG}(U_1{}^G, U^G) \simeq \mathrm{Hom}_{KT}(U_1, U) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{a \in T\backslash G/T \\ a \notin T}} \mathrm{Hom}_{K(T^a \cap T)}(U_1{}^a, U) \Big)$$

である. ここで $(U_1)_H \simeq fW$ とすれば $(U_1{}^a)_H \simeq fW^a$ であるから, $a \notin T$ ならば $\mathrm{Hom}_{KH}((U_1{}^a)_H, U_H) = 0$ となり, (3.2) の右辺は $\mathrm{Hom}_{KT}(U_1, U) \neq 0$ となる. よって既約性より $U_1 \simeq U, U^G \simeq V \in \mathrm{IRR}(KG|W)$ をえる.

(ii) 定理 3.1 より Ind_T^G は全射である. また上の (i) の証明でこれが単射であることも示されている. 分岐指数が一致することは明らかである. □

上の定理の特別な場合として次の系がえられる.

系 3.3 $G \triangleright H, \mathrm{IRR}(KH) \ni W$ に対し

$$T(W) = H \Longrightarrow W^G \text{ は既約.}$$

問 3.4 定理 3.2 と同じ仮定のもとで $T(W) \le X \le G$ とすれば, 写像

$$\mathrm{Ind}_X^G : \mathrm{IRR}(KX|W) \longrightarrow \mathrm{IRR}(KG|W) \qquad (U \mapsto U^G)$$

は全単射で, U と U^G の H に関する分岐指数は一致する.

KG-加群 V に対し, G の真部分群 H と KH-加群 W があって $V \simeq W^G$

となるとき V は **非原始的** であるといい，そうでないとき **原始的** であるという．対応する表現についても同じ用語を使うことにする．

次は非原始性の判定に有用である．

定理 3.5 $G \triangleright A$, A は Abel 群で G の中心 $Z(G)$ に含まれないとする．また K は代数的閉体で，V_{KG} は既約で忠実な G-加群とする（すなわち $\mathrm{Ker}_G V = 1$）．このとき W を V_A の既約因子とすれば，$T(W) \lneqq G$ で V は非原始的である．

［証明］ $T(W) = G$ とすれば $V_A \simeq eW$ となる．ここで K は代数的閉体であるから $\dim_K W = 1$ で，V のある基に関する表現 $\boldsymbol{X}$ で $X(a)$ （$\forall a \in A$）はスカラー行列である．したがって $X(A) \subset Z(X(G))$ となり，$\boldsymbol{X}$ の忠実性からこれは仮定に反する．よって $T(W) \neq G$ で，ある $U \in \mathrm{IRR}(KT \mid W)$ に対し $U^G \simeq V$ となる．□

KG-加群 V に対し，G のある部分群 H と W_{KH} で $\dim_K W = 1$ となるものがあって，$V \simeq W^G$ となるとき V は **単項加群** であるという．また対応する表現を **単項表現** という．

べき零群に対して定理 3.5 の応用をのべるため，補題を一つ準備しておく．

補題 3.6 G はべき零群で Abel 群ではないとする．このとき G の正規 Abel 部分群 A で $A \nleqq Z(G)$ となるものがある．

［証明］ G の昇中心列を $Z_0(G) = 1 \lneqq Z_1(G) \lneqq Z_2(G) \lneqq \cdots \lneqq Z_c(G) = G$ とすれば，仮定により $c \geq 2$ である．$Z_2(G) - Z_1(G) \ni a$ を一つとり，$A = Z_1(G)\langle a \rangle$ とおけばよい．□

定理 3.7 G はべき零群で K は代数的閉体とする．このとき任意の既約な KG-加群 V は単項加群である．

［証明］ $|G|$ に関する帰納法による．$\bar{G} = G/\mathrm{Ker}_G V$ とおけば，V は忠実な $\bar{G}$-加群である．$\bar{G}$ はまたべき零群で，$\bar{G}$ が Abel 群ならば $\dim_K V = 1$ であるから V_{KG} はもちろん単項加群である．$\bar{G}$ が Abel 群でないときは，補題 3.6 と定理 3.5 より $\bar{T} \lneqq \bar{G}$ と $U_{K\bar{T}}$ があって $V \simeq U^{\bar{G}}$ となる．いま準同型 $G \to \bar{G}$ における $\bar{T}$ の逆像を T とおけば，U は T-加群と考えることができて $V \simeq U^G$ となる．$T \lneqq G$ である

から U_{KT} に帰納法の仮定を適用すればよい. □

さて $\boldsymbol{C}$ 上の表現の指標について, 以上の結果から次の諸定理がえられる.

§2 と同様に $\mathrm{Irr}(G)$ は G の $\boldsymbol{C}$ 上の既約指標の全体とする. また $H \lhd G$, $\theta \in \boldsymbol{CF}(H)$ のときは $T(\theta) = \{t \in G\,;\, \theta^t = \theta\}$ とおき, これを θ の **惰性群** とよぶ. ただし $\theta^t(h) = \theta(tht^{-1})$ である.

$G \rhd H$, $\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$ のとき

$$\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G)\,;\, (\chi_H, \zeta)_H \neq 0 \text{ すなわち } (\chi, \zeta^G)_G \neq 0\}$$

とおけば, まず定理 3.1, 3.2, 系 3.3, 問 3.4 から次がえられる.

定理 3.8 (Clifford)　$G \rhd H$, $\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$ とし $T = T(\zeta)$ とおく.

(i)　$\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) \ni \chi$ ならば χ_H は次のように既約分解される：

$$\chi_H = e\Big(\sum_{a \in T\backslash G} \zeta^a\Big).$$

(上の e を χ の H に関する **分岐指数** という.)

(ii)　$\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) \ni \chi$ に対して $\eta \in \mathrm{Irr}(T \mid \zeta)$ が唯一つ存在して

$$\eta^G = \chi, \qquad \eta_H = e\zeta$$

となる. また　$\mathrm{Ind}_T^G \colon \mathrm{Irr}(T \mid \zeta) \to \mathrm{Irr}(G \mid \zeta)$ $(\eta \mapsto \eta^G)$　は全単射である.

(iii)　$T \leq X \leq G$ ならば $\mathrm{Ind}_X^G \colon \mathrm{Irr}(X \mid \zeta) \to \mathrm{Irr}(G \mid \zeta)$ $(\eta \mapsto \eta^G)$ は全単射である.

(iv)　$T(\zeta) = H \Longrightarrow \zeta^G \in \mathrm{Irr}(G)$.

単項表現の指標を **単項指標** とよぶ. また任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ が単項指標であるとき, すなわち $H \leq G$ と $\lambda \in \mathrm{Irr}(H)$ で $\lambda(1) = 1$ となるものがあって $\chi = \lambda^G$ となるとき G は **M 群** であるという. 定理 3.7 から次がえられる.

定理 3.9　べき零群は M 群である.

注意　次節で必要なのは上の定理であるが, M 群については様々なことが知られている. (Issacs [2] 参照). 例えば M 群は可解群である (竹田清). M 群の群論的特徴づけについては Parks [1] の結果がある.

§4. Brauerの諸定理

この節では特に断らない限り $\boldsymbol{C}$ 上の表現と指標を考えることとし，定理をのべる前に定義を一つのべておく．

群 E が p 群 P と巡回群 C の直積として

$$E = P \times C \tag{4.1}$$

と分解されるとき，E は (p-) **基本群** であるという．基本群は明らかにべき零群である．また (4.1) で C は p'-群，すなわち $(|C|, p) = 1$ としてよい．実際 $\mathrm{Syl}_p(C) \ni C_p \neq 1$ ならば $C = C_p \times C_{p'}$ と分解し，$P \times C_p$ と $C_{p'}$ を改めてそれぞれ P, C とおけばよい．

問 4.1 $G = P \times C, (|P|, |C|) = 1$ ならば，G の任意の部分群は P の部分群と C の部分群の直積である．特に G が p-基本群ならば，その部分群や剰余群はまた p-基本群である．

G の基本部分群の全体を $\mathcal{E}(G)$ と表す．また§2と同様 $X(G)$ は G の指標環とする．$X(G)$ の元は G の一般指標である．このとき **Brauerの基本定理** は次のようにのべられる．

定理 4.2 (Brauer)

(i) (一般指標の特徴づけ) $\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)$ について次が成り立つ．

$$\varphi \in X(G) \Longleftrightarrow \varphi_E \in X(E) \qquad (\forall E \in \mathcal{E}(G)).$$

(ii) (誘導定理) $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ は，$\boldsymbol{Z} \ni a_i$ と $\mathcal{E}(G) \ni E_i$ の一次指標 λ_i を用いて

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i{}^G$$

と表される．

上の定理を証明するため準備をしておく．簡単のため $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ とおき，

$$R(G, \mathcal{E}) = \{\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)\,;\, \varphi_E \in X(E) \quad (\forall E \in \mathcal{E})\},$$

$$I(G, \mathscr{E}) = \{\varphi \in \boldsymbol{CF}(G)\,;\, \varphi = \textstyle\sum_i a_i \zeta_i{}^G,\, a_i \in \boldsymbol{Z},\, \zeta_i \in \mathrm{Irr}(E_i),\ E_i \in \mathscr{E}\}$$

とする．このとき明らかに次が成り立つ：

$$I(G, \mathscr{E}) \subset X(G) \subset R(G, \mathscr{E}).$$

また $R(G, \mathscr{E})$ は $\boldsymbol{CF}(G)$ の部分環で $\mathbf{1}_G \in R(G, \mathscr{E})$ である．

補題 4.3 (i) $I(G, \mathscr{E})$ は $R(G, \mathscr{E})$ のイデアルである．

(ii) $I(G, \mathscr{E})$ は次の形で表される G の類関数 φ の全体である：

$$\varphi = \textstyle\sum_i a_i \lambda_i{}^G\,;\, a_i \in \boldsymbol{Z},\ \lambda_i \text{ は } E_i \in \mathscr{E} \text{ の一次指標.}$$

[**証明**] (i) $\mathscr{E} \ni E$, $\mathrm{Irr}(E) \ni \zeta$ と $R(G, \mathscr{E}) \ni \theta$ に対し，$\zeta^G\theta = (\zeta\theta_E)^G \in I(G, \mathscr{E})$ をいえばよいが，仮定より $\theta_E \in X(E)$ であるからこれは明らかである．

(ii) $\mathscr{E} \ni E_i$ はべき零群であるから，$\mathrm{Irr}(E_i) \ni \zeta_i$ に対し E_i の部分群 H_i と H_i の一次指標 λ_i で $\zeta_i = \lambda_i{}^{E_i}$ となるものがある．このとき $\zeta_i{}^G = \lambda_i{}^G$ で $H_i \in \mathscr{E}$ であるから (ii) が成り立つ．□

さて次のことが示されれば，定理 4.2 の二つの主張は同時に証明される．

定理 4.4 (Brauer) $\qquad I(G, \mathscr{E}) \ni \mathbf{1}_G.$

実際この定理と補題 4.3(i) から $I(G, \mathscr{E}) = X(G) = R(G, \mathscr{E})$ がえられる．この最初の等式と補題 4.3(ii) から誘導定理が，また 2 番目の等式から一般指標の特徴づけが示される．

置換指標についても定理 4.4 と類似の Solomon の結果があり，それ自身興味がある．ここではまず Solomon の定理を証明し，それを用いて Isaacs [2] に従って Brauer の定理を示す．

注意 Brauer の定理については，ここでのべる証明の他に，例えば Brauer-Tate [1], 浅野 [1] による証明 (これらは独立にえられたが，本質的には同じ証明である)，また Roquette [1] の結果を用いた太刀川 [1] の証明等がある．

Solomon の定理をのべるため定義と記号の説明をしておく．

素数 p に対し，群 G の部分群 Q が p' 群で，$|G : Q|$ が p のべきであると

き，Q は G の **p 補群** であるという．このとき $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とすれば $G = PQ, P \cap Q = 1$ となる．特に p 補群 Q が G の正規部分群ならば，Q は G の p' 元（すなわち位数が p と素な元）の全体で G の特性部分群である．

群 H が正規 p 補群 C で巡回群であるものをもつとき，H は (p-) **準基本群** であるという．このとき $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ とすれば

$$(4.2)\qquad H = PC, \qquad P \cap C = 1, \qquad H \rhd C$$
$$(C\text{ は巡回 }p'\text{ 群，}P\text{ は }p\text{ 群})$$

となる．p-準基本群の部分群はまた p-準基本群である．群 G の準基本部分群の全体を $\mathscr{E}'(G)$ と表し，p-準基本部分群の全体を $\mathscr{E}_p'(G)$ と表す．

注意 一般に (4.2) が成り立つとき，H は正規部分群 C と部分群 P の **半直積** であるといい，$H = P \ltimes C$ または $H = C \rtimes P$ と表す．

群 G の指標環 $X(G)$ において，$\{(\mathbf{1}_H)^G ; H \leq G\}$ の生成する部分加群を $P(G)$ と表す：$P(G) = \sum_{H \leq G} \boldsymbol{Z}(\mathbf{1}_H)^G$.

Mackey のテンサー積定理 1.17 から次がえられる．

補題 4.5 $G \geq H, K$ に対して次が成り立つ：

$$(4.3)\qquad (\mathbf{1}_H)^G(\mathbf{1}_K)^G = \sum_{t \in H\backslash G/K} (\mathbf{1}_{H^t \cap K})^G.$$

上の補題から $P(G)$ は $X(G)$ の部分環で，また明らかに $\mathbf{1}_G \in P(G)$ である．

一般に G の部分群の集合 $\mathscr{H}$ に対し

$$P(G, \mathscr{H}) = \sum_{H \in \mathscr{H}} \boldsymbol{Z}(\mathbf{1}_H)^G$$

とおく．また簡単のため $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(G)$, $\mathscr{E}_p' = \mathscr{E}_p'(G)$ とおくとき次が成り立つ．

補題 4.6 $P(G, \mathscr{E}_p'), P(G, \mathscr{E}')$ はともに $P(G)$ のイデアルである．

［**証明**］ (4.3) で $H \in \mathscr{E}_p'$ ならば $H^t \cap K \in \mathscr{E}_p'$ であるから明らかである．□

定理 4.7 (Solomon)

(i) $\mathbf{1}_G \in P(G, \mathcal{E}')$. したがって $P(G, \mathcal{E}') = P(G)$.

(ii) p が素数のとき，p と素な自然数 m が存在して $m\mathbf{1}_G \in P(G, \mathcal{E}_p')$ となる．したがって $P(G)/P(G, \mathcal{E}_p')$ は，加群とみて位数が p と素な有限群である．

上の定理の証明のため補題を二つ示しておく．

補題 4.8 (Banaschewski) $X(\neq \phi)$ は有限集合とし，X 上定義され $\boldsymbol{Z}$ に値をとる関数全体のつくる環を $\boldsymbol{F_Z}(X)$ とする．またその単位元を $\mathbf{1}_X$ と表す ($\mathbf{1}_X : x \mapsto 1$)．このとき $\boldsymbol{F_Z}(X)$ の（必ずしも単位元をもつとは限らない）部分環 R が $\mathbf{1}_X$ を含まないならば，$X \ni x_0$ と素数 p が存在して $p \mid f(x_0)$ $(\forall f \in R)$ となる．

［証明］ $X \ni x$ に対し $I_x = \{f(x) ; f \in R\}$ とおけば，I_x は $\boldsymbol{Z}$ のイデアルである．ある $x_0 \in X$ に対し $I_{x_0} \subsetneqq \boldsymbol{Z}$ ならば，素数 p で $I_{x_0} \subset (p)$ となるものがあり補題が成り立つ．したがって任意の $x \in X$ に対し $I_x = \boldsymbol{Z}$ と仮定して矛盾を導く．このとき各 x に対し $f_x \in R$ で $f_x(x) = 1$ となるものがあり

$$\prod_{x \in X} (f_x - \mathbf{1}_X) = 0$$

となる．この左辺を展開すると $\mathbf{1}_X$ が f_x のいくつかの積の有理整係数の一次結合で表されることがわかり，したがって $\mathbf{1}_X \in R$ となって矛盾である．□

補題 4.9 p は素数とする．このとき G の元 a に対し $H \in \mathcal{E}_p'(G)$ で

(4.4) $$(\mathbf{1}_H)^G(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

となるものがある．

［証明］ $a_p, a_{p'}$ は a の p 部分，p' 部分とし，$C = \langle a_{p'} \rangle, N = N_G(C)$ とおく．このとき $N \ni a$ で，$\bar{N} = N/C \ni \bar{a}$ は p 元であるから，$\bar{a}$ を含む $\bar{H} \in \mathrm{Syl}_p(\bar{N})$ がある．準同型 $N \to \bar{N}$ における $\bar{H}$ の逆像を H とすれば，C は H の正規 p 補群であるから $H \in \mathcal{E}_p'(G)$ である．この H に対し (4.4) が成り立つことを示す．

まず $(\mathbf{1}_H)^G(a) = \sharp\{Ht \in H\backslash G ; Hta = Ht\}$ である．ここで $Hta = Ht$ とすれば $tat^{-1} \in H$，したがって $ta_{p'}t^{-1} \in H$ となるが，このとき $C = \langle a_{p'} \rangle$ は H の正規 p 補群であることから $tCt^{-1} = C$，$t \in N$ をえる．よって

$$(\mathbf{1}_H)^G(a) = \sharp\{Ht \in H\backslash N ; Hta = Ht\}$$

となる．ここで $N \ni t$ ならば $Hta_{p'} = Ht$ となるから，$Hta = Ht \Longleftrightarrow Hta_p = Ht$ となり，$(\mathbf{1}_H)^G(a) = (\mathbf{1}_H)^N(a_p)$ である．p 群 $\langle a_p \rangle$ の $H\backslash N$ への作用を考えると，その軌道の長さは 1 か p のべき (>1) であるから

$$|N : H| \equiv (\mathbf{1}_H)^N(a_p) \equiv (\mathbf{1}_H)^G(a) \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

をえる．この左辺は p と素であるから (4.4) が成り立つ．□

上の準備のもとで Solomon の定理は容易に示される．

[定理 4.7 の証明]　(i)　$P(G, \mathcal{E}')$ は $\boldsymbol{F_Z}(G)$ の部分環であるから，$\mathbf{1}_G \notin P(G, \mathcal{E}')$ と仮定すれば補題 4.8 から $G \ni a$ と素数 p が存在して $p \mid \varphi(a)$ $(\forall \varphi \in P(G, \mathcal{E}'))$ となる．これは補題 4.9 に矛盾する．

(ii)　$R = P(G, \mathcal{E}_p') + \boldsymbol{Z}(p\mathbf{1}_G)$ は $\boldsymbol{F_Z}(G)$ の部分環である．いま，$\mathbf{1}_G \notin R$ と仮定すれば，$G \ni a$ と素数 q で $q \mid \varphi(a)$ $(\forall \varphi \in R)$ となるものがある．このとき $p\mathbf{1}_G(a) = p$ であるから $q = p$ となり補題 4.9 に反する．よって $\mathbf{1}_G \in R$ となり，ある $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $(1 - np)\mathbf{1}_G \in P(G, \mathcal{E}_p')$ となる．よって $\pm(1 - np)$ の正の値を m とおけばよい．

また後半は $P(G)$ が $\boldsymbol{Z}$-有限生成で，$mP(G) = (m\mathbf{1}_G)P(G) \subset P(G, \mathcal{E}_p')$ より明らかである．□

さて Brauer の定理 4.4 は定理 4.7(i) から次のように示される．

[定理 4.4 の証明]　$|G|$ に関する帰納法による．

(1)　G が準基本群でないとき：任意の $H \in \mathcal{E}'$ に対し $|H| < |G|$ であるから，帰納法の仮定より $\mathbf{1}_H \in I(H, \mathcal{E}(H))$ である．したがって $(\mathbf{1}_H)^G \in I(G, \mathcal{E})$ となり，定理 4.7 より

$$\mathbf{1}_G \in P(G, \mathcal{E}') = \sum_{H \in \mathcal{E}'} \boldsymbol{Z}(\mathbf{1}_H)^G \subset I(G, \mathcal{E})$$

となる．

(2)　G が準基本群のとき：$G = P \ltimes C, P \in \mathrm{Syl}_p(G), G \triangleright C$ は巡回 p' 群とする．また C における P の中心化群 $\{c \in C ; ac = ca\ (\forall a \in P)\}$ を $D, PD = E$ とおけば，$D \leq Z(G)$，$E = P \times D \in \mathcal{E}$ である．$E = G$ のときは自明であるから $E \lneqq G$ としてよい．また

$$(\mathbf{1}_E)^G = \mathbf{1}_G + \varphi \tag{4.5}$$

とおくとき，φ の任意の既約成分 χ が $I(G, \mathcal{E})$ に含まれることを示せばよい．

$G=EC, E\cap C=D$ であるから，(4.5) の C への制限を考えて

$$\mathbf{1}_C+\varphi_C=((\mathbf{1}_E)^G)_C=(\mathbf{1}_D)^C$$

となる．ここで $((\mathbf{1}_D)^C,\mathbf{1}_C)_C=1$ であるから $(\varphi_C,\mathbf{1}_C)_C=0$，よって $(\chi_C,\mathbf{1}_C)_C=0$ である．

いま λ を χ_C の一つの既約成分とすれば，$\lambda(1)=1$，$\lambda\neq\mathbf{1}_C$ である．$T=T(\lambda)$ を λ の G における惰性群とする．$T\lneqq G$ とすれば $\mathrm{Irr}(T\,|\,\lambda)\ni\eta$ で $\eta^G=\chi$ となるものがあり，帰納法の仮定から $\eta\in I(T,\mathcal{E}(T))$ であるから $\eta^G=\chi\in I(G,\mathcal{E})$ となる．

よって $T=G$ と仮定して矛盾を導けばよい．このとき $K=\mathrm{Ker}\,\lambda$ とおけば $K\lhd G$ で，$\lambda\neq\mathbf{1}_C$ より $K\lneqq C$，また $C\ni x,y$ に対し $Kx\neq Ky$ ならば $\lambda(x)\neq\lambda(y)$ である．よって $C\ni x$，$P\ni a$ に対し $\lambda(x)=\lambda^{a^{-1}}(x)=\lambda(a^{-1}xa)$ より $Kx=Kx^a=(Kx)^a$ となり，P の元は Kx 上の置換を引き起す．ここで P の軌道を考えれば，$|Kx|=|K|$ は p と素であるから長さ 1 の軌道をもち $Kx\cap D\neq\phi$，よって $KD=C$ をえる．

一方 $D\leq Z(G)$ であるから $D\leq\bigcap_{t\in G}E^t=\mathrm{Ker}(\mathbf{1}_E)^G$ で，λ は $((\mathbf{1}_E)^G)_C$ の既約成分であるから $D\leq\mathrm{Ker}\,\lambda=K$，よって $C=KD=K$ となり，これは $K\lneqq C$ に矛盾する．□

Brauer の基本定理は重要な応用を多くもつが，ここでは群 G の分解体に関する定理を一つ証明しよう．

まず定理 1.30(v) から次がえられる．

補題 4.10 K は $\boldsymbol{C}$ の部分体とするとき，G の任意の K-指標 ζ と $\mathrm{Irr}(G)\ni\chi$ に対し次が成り立つ：

$$m_K(\chi)\,|\,(\zeta,\chi)_G.$$

自然数 n に対し（$\boldsymbol{C}$ における）1 の原始 n 乗根の一つを $\sqrt[n]{1}$ と表すことにする．このとき次が成り立つ．

定理 4.11 (Brauer の分解体定理) n を群 G の指数とすれば，$\boldsymbol{Q}(\sqrt[n]{1})$ は G の分解体である．したがって $\boldsymbol{Q}(\sqrt[|G|]{1})$ も G の分解体である．

［**証明**］ $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt[n]{1})$ とする．また $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対し

$$\chi = \sum_i a_i \lambda_i{}^G$$

（ただし $a_i \in \boldsymbol{Z}$，λ_i は $E_i \in \mathcal{E}(G)$ の一次指標）とする．このとき E_i の一次表現 λ_i の G への誘導表現は K-表現で，その指標が $\lambda_i{}^G$ であるから，上の補題より

$$1 = (\chi, \chi) = \sum_i a_i(\lambda_i{}^G, \chi) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ m_K(\chi)).$$

よって $m_K(\chi) = 1$ となり，明らかに $K = K(\chi)$ であるから χ はある K-表現の指標である．このようにして G の任意の絶対既約表現は K で実現可能であるから，K は G の分解体である．□

§5. 射影表現

5.1 射影表現と一般群環

群 G から体 K 上の一般線形群 $GL_n(K)$ への写像

$$\boldsymbol{X}: G \longrightarrow GL_n(K) \qquad (x \mapsto X(x))$$

が次の (5.1) をみたすとき $\boldsymbol{X}$ は G の (K-) **射影表現** であるといい，n をその **次数** とよぶ：

(5.1) $$X(x)X(y) = \alpha(x, y)X(xy) \qquad (\alpha(x, y) \in K^{\times}).$$

問 5.1 上のとき $\alpha: G\times G \longrightarrow K^{\times}$ $((x, y) \mapsto \alpha(x, y))$ は因子団である．ただし G は $K^{\times}$ に自明に作用しているものとする．

（ヒント：G と $GL_n(K)$ における結合法則を用いよ.）

射影表現 $\boldsymbol{X}$ に対し (5.1) が成り立つとき，$\boldsymbol{X}$ は因子団 α をもつ，あるいは因子団 α は $\boldsymbol{X}$ に**付随する**という．付随する因子団 α を明記したいときは射影表現を $(\boldsymbol{X}, \alpha)$ と表す．特に $\alpha = 1$ のときは今まで考察してきた普通の表現で，これを射影表現と区別したいときは G の **線形表現** とよぶ．

注意 (5.1) において $X(1)X(1) = \alpha(1, 1)X(1)$ であるから $X(1) = \alpha(1, 1)I$ となり，これはスカラー行列である．

$(\boldsymbol{X}, \alpha)$ を n 次の射影表現とするとき，$P \in GL_n(K)$ と写像 $\gamma: G \rightarrow K^{\times}$ に

よってきまる写像

$$(5.2)\qquad \boldsymbol{Y}: G \longrightarrow GL_n(K) \qquad (x \mapsto Y(x) = \gamma(x)P^{-1}X(x)P)$$

はまた G の射影表現である．

問 5.2　$\beta(x,y) = \alpha(x,y)\gamma(y)\gamma(xy)^{-1}\gamma(x)$　とおくとき，上の $\boldsymbol{Y}$ は因子団 β をもつ G の射影表現である．

(5.2) のような射影表現 $(\boldsymbol{Y},\beta)$ は $(\boldsymbol{X},\alpha)$ に **同値** であるといって $(\boldsymbol{X},\alpha) \sim (\boldsymbol{Y},\beta)$ と表す．このとき二つの因子団 α,β は同伴である．

群の射影表現はまた次のように考えてもよい．一般線形群 $GL_n(K)$ の中心はスカラー行列の全体である．それによる剰余群 $GL_n(K)/Z(GL_n(K))$ を $PGL_n(K)$ とかいて，これを K 上 n 次の **一般射影変換群** とよぶ．また $GL_n(K) \ni X$ を含む剰余類をここでは $\bar{X}$ と表すことにする．

さて群 G の射影表現 $\boldsymbol{X}: G \to GL_n(K)$ が与えられると，$G \ni x$ に $\overline{X(x)}$ を対応させて準同型

$$\bar{\boldsymbol{X}}: G \longrightarrow PGL_n(K)$$

がえられる．逆に上のような準同型 $\bar{\boldsymbol{X}}$ が与えられると，各剰余類 $\bar{X}(x)$ から代表元 $X(x)$ を選んで G の射影表現 $\boldsymbol{X}: G \to GL_n(K)$ $(x \mapsto X(x))$ がえられる．ここで代表元の選び方を変えると同値な射影表現がえられる．

また G の二つの射影表現 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ が同値であることは，対応する準同型 $\bar{\boldsymbol{X}}, \bar{\boldsymbol{Y}}$ について，$P \in GL_n(K)$ が存在して

$$\bar{P}^{-1}\overline{X(x)}\bar{P} = \overline{Y(x)} \qquad (\forall x \in G)$$

が成り立つことに他ならない．

群の表現と群環の表現が実質的には同じであったように，群の射影表現と一般群環の表現は次のように対応する．

以後，この節では G は K に自明に作用しているものとして，因子団 α をもつ一般群環を

$$A = K^{(\alpha)}G = \bigoplus_{x \in G} Ku_x, \qquad u_x u_y = \alpha(x,y)\,u_{xy}$$

とする．このとき G の射影表現 $(\boldsymbol{X},\alpha)$ に対し，K-多元環 A の表現　$\boldsymbol{X}'$:

$\sum_x a_x u_x \mapsto \sum_x a_x X(x)$ がえられる．逆に A の表現 $X':A\to M_n(K)$ に対しては，因子団 α をもつ G の射影表現 $X: x\mapsto X'(u_x)$ が対応し，このようにして A の表現と因子団 α をもつ G の射影表現が1対1に対応する．また A の別の基 $\{v_x=\gamma_x u_x\,;\,x\in G\}$ $(\gamma_x\in K^\times)$ をとれば，G の射影表現 $Y: x\mapsto X'(v_x)=\gamma_x X'(u_x)$ がえられるが，このとき Y は X に同値である．

群の射影表現は，それに対応する一般群環の表現が既約であるとき既約であるという．他の表現論的概念についても同様である．

以上の考察から次の定理は明らかである．

定理 5.3 (i) G の任意の因子団 $\alpha: G\times G\to K^\times$ に対して，α を因子団にもつ既約な K-射影表現が存在し，その同値類の個数は有限である．

(ii) Char $K\nmid |G|$ ならば，G の任意の K-射影表現は完全可約である (II, 8.17 (ii))．

後での必要上，因子団について次の補題を示しておく．

補題 5.4 K は代数的閉体とする．このとき次が成り立つ．

(i) $\alpha: G\times G\to K^\times$ は正規化された因子団で $\alpha^n\sim 1$ とする．このとき正規化された因子団 β で $\beta\sim\alpha$，$\beta(x,y)^n=1$ $(\forall x,y\in G)$ となるものがある．

また正規化された因子団 γ で $\gamma\sim\alpha, \gamma(x,y)^{2n}=1$，$\gamma(x,x^{-1})=1$ $(\forall x, y\in G)$ となるものがある．

(ii) $H^2(G,K^\times)$ は有限群である．特に Char $K=p>0$ ならば $H^2(G,K^\times)$ は p' 群である．

(iii) G が巡回群ならば $H^2(G,K^\times)=1$ である．

[**証明**] (i) $\rho: G\to K^\times$ があって $\alpha(x,y)^n=\rho(y)\rho(xy)^{-1}\rho(x)$ と仮定する．このとき $\alpha(1,y)=1$ より $\rho(1)=1$ となる．各 x に対し $\mu(x)^n=\rho(x)^{-1}$ となる $\mu(x)\in K^\times$ をとる．ただし $\mu(1)=1$ とする．このとき $\beta(x,y)=\alpha(x,y)\mu(y)\mu(xy)^{-1}\mu(x)$ とおけば，因子団 β は補題の条件をみたす．

また $\nu: G\to K^\times$ を $x=1$ のときは $\nu(1)=1$ とおき，$x\neq 1$ のときは $\nu(x)^2=\beta(x,x^{-1})^{-1}$，$\nu(x)=\nu(x^{-1})$ となる $\nu(x)\in K^\times$ をとって定まる写像とし，$\gamma(x,y)$

$=\beta(x,y)\nu(y)\nu(xy)^{-1}\nu(x)$ とおけば，因子団 γ は補題の条件をみたす．(注意：β は正規化されているから $\beta(x,x^{-1})=\beta(x^{-1},x)$ である．)

(ii) II, 7.3 (i) より任意の因子団 α に対し $\alpha^{|G|}\sim 1$ となる．よって $H^2(G,K^\times)=Z^2(G,K^\times)\,/\,B^2(G,K^\times)$ の各剰余類は $\beta(x,y)^{|G|}=1$ $(\forall x,y\in G)$ となる因子団 β を含む．$U=\{\varepsilon\in K^\times;\varepsilon^{|G|}=1\}$ とすれば，写像 $f:G\times G\to U$ の全体は有限集合であるから $H^2(G,K^\times)$ は有限群である．

Char $K=p>0$ のときは，$K\ni\varepsilon$ に対し $\varepsilon^{p^r m}=1$ ならば $\varepsilon^m=1$ となるから，$H^2(G,K^\times)$ の各元の位数は p と素で，したがって $H^2(G,K^\times)$ は p' 群である．

(iii) α は任意の因子団とし，考えやすくするため一般群環 $K^{(\alpha)}G=\bigoplus_{i=0}^{n-1}Ku_{x^i}$ $(u_{x^i}u_{x^j}=\alpha(x^i,x^j)u_{x^{i+j}})$ を考える．ただし $G=\langle x\rangle$，$n=|G|$，$u_1=1$ とする．$u_x{}^n=\gamma u_1$ $(\gamma\in K^\times)$ とするとき，$\rho^n=\gamma^{-1}$ となる $\rho\in K^\times$ をとり，$v_x=\rho u_x$ とおけば $v_x{}^n=u_1$ となる．したがって $w_1=u_1$，$w_{x^i}=v_x{}^i$ $(1\leq i\leq n-1)$ とおけば $0\leq i,j\leq n-1$ に対し $w_{x^i}w_{x^j}=w_{x^{i+j}}$ となる．このとき $\mu:G\to K^\times$ を $\mu(1)=1$，$w_{x^i}=\mu(x^i)u_{x^i}$ $(1\leq i\leq n-1)$ として定まる写像とすれば
$\alpha(x^i,x^j)\mu(x^i)\mu(x^{i+j})^{-1}\mu(x^j)=1$ となり，$\alpha\sim 1$ である．□

さて複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上で因子団 $\alpha:G\times G\longrightarrow\boldsymbol{C}^\times$ をもつ既約な射影表現について考えよう．そのためには一般群環 $\boldsymbol{C}^{(\alpha)}G$ の既約表現を考えればよい．ここで $\boldsymbol{C}^{(\alpha)}G$ は半単純である．

また補題 5.4 (i) より α は正規化された因子団で，さらに $\alpha(x,y)^{2|G|}=1$，$\alpha(x,x^{-1})=1$ $(\forall x,y\in G)$ をみたすと仮定してよい．このとき有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に $U_{2|G|}=\{\varepsilon\in\boldsymbol{C};\varepsilon^{2|G|}=1\}$ を添加した体を k とすれば，$\alpha:G\times G\to k^\times$ と考えて $k^{(\alpha)}G$ が定義でき，$\boldsymbol{C}^{(\alpha)}G$ は $k^{(\alpha)}G$ の係数体 k を $\boldsymbol{C}$ に拡大したものである．さらに $k^{(\alpha)}G$ の分解体 K で k の有限次拡大となるものをとれば，K は有限次代数体で

(5.3) $$A=K^{(\alpha)}G=\bigoplus_{i=1}^{l}A_i,\qquad A_i\simeq M_{n_i}(K)$$

と直和分解される．ここで各単純因子 A_i に属する絶対既約表現を

(5.4) $$\boldsymbol{F}_i:a\mapsto F_i(a)=(\beta_{\mu\nu}^{(i)}(a))_{\mu,\nu}\qquad(a\in A)$$

とし，その指標 χ_{F_i} を ζ_i と略記することにする．また

$$A = \bigoplus_{x\in G} Ku_x, \qquad u_x u_y = \alpha(x, y)\, u_{xy}$$

として，A の K-基 $\{u_x\}$ に関する正則表現を $\boldsymbol{\Gamma}$ とすれば，その指標 $\chi_{\boldsymbol{\Gamma}}$ は (5.3) より

$$(5.5) \qquad \chi_{\boldsymbol{\Gamma}} = \sum_{i=1}^{l} \zeta_i(u_1)\zeta_i$$

となる．ここで $\chi_{\boldsymbol{\Gamma}}(u_1) = |G|$，$x \neq 1$ ならば $\boldsymbol{\Gamma}(u_x)$ の対角線上の成分はすべて 0 となるから $\chi_{\boldsymbol{\Gamma}}(u_x) = 0$ である．よって (5.5) から次がえられる：

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \zeta_i(u_1)^2 = |G|, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \zeta_i(u_1)\zeta_i(u_x) = 0 \qquad (x \neq 1). \end{cases}$$

問 5.5 上の仮定のもとで次が成り立つ：

$$(5.7) \qquad \sum_{x\in G} \beta_{\mu\nu}^{(i)}(u_x)\beta_{\rho\sigma}^{(j)}(u_{x^{-1}}) = \delta_{ij}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\frac{|G|}{\zeta_i(u_1)}.$$

（ヒント：定理 2.2 と同様に $A = (\beta_{\mu\nu}^{(i)}(u_x))_{(i,\mu,\nu),x}$，$B = \left(\dfrac{\zeta_i(u_1)}{|G|}\beta_{\nu\mu}^{(i)}(u_{x^{-1}})\right)_{(i,\mu,\nu),x}$ とおけば，(5.6) より ${}^tAB = I$ （単位行列）となり，したがって $B{}^tA = I$ をえる．）

いま K の整数環を R とし，$\mathfrak{p}$ は R の素イデアル，$R_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$-整数の全体とすれば，仮定により $\alpha(x, y) \in R_{\mathfrak{p}}$ である．したがって $A_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_x R_{\mathfrak{p}}u_x$ は $R_{\mathfrak{p}}$ 上の多元環で，$A = K\otimes_{R_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}$ であると考えてよい．このとき定理 2.4 と同様にして次の定理が証明できる．

定理 5.6 G の（$\boldsymbol{C}$ 上の）絶対既約な射影表現の次数は $|G|$ の約数である．

［**証明**］ II，1.6 より (5.4) の $\boldsymbol{F}_i$ は $R_{\mathfrak{p}}$ 上の表現であるとしてよい．すなわち $\beta_{\mu\nu}^{(i)}(u_x) \in R_{\mathfrak{p}}$ としてよい．このとき (5.7) より $|G|/\zeta_i(u_1) \in R_{\mathfrak{p}}$ となり，これは任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成り立つから $|G|/\zeta_i(u_1) \in \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}} = R$ をえる．したがって $|G|/\zeta_i(u_1)$ $(\in \boldsymbol{Q})$ は代数的整数で，したがって有理整数である．□

5.2 射影表現と Clifford 理論

以後この節では K は代数的閉体と仮定する．また便宜上，加群の代りに表現を主に考えることにして，G の既約な K 上の線形表現の同値類の完全代表系

を $\mathrm{IRR}_K(G)$ と表すことにする.

群の射影表現は以下でのべるように Clifford 理論と密接な関係がある.

いま $G \rhd H$ とし, $\boldsymbol{Y}$ は H の既約な K-表現とする. このとき $G \ni x$ に対し $\boldsymbol{Y}$ に**共役**な表現 $\boldsymbol{Y}^x : h \mapsto Y(xhx^{-1})$ がえられる. 加群の場合と同様に $T(\boldsymbol{Y}) = \{t \in G\,;\, \boldsymbol{Y}^t \sim \boldsymbol{Y}\}$ を $\boldsymbol{Y}$ の**惰性群**とよぶ. Clifford の定理から $\mathrm{IRR}_K(G) \ni \boldsymbol{X}$ ならば $\boldsymbol{X}_H$ は完全可約である. $\boldsymbol{X}_H$ が $\boldsymbol{Y}$ を既約因子に含むような $\boldsymbol{X} \in \mathrm{IRR}_K(G)$ の全体を $\mathrm{IRR}_K(G \mid \boldsymbol{Y})$ と表す.

$T(\boldsymbol{Y}) \lneqq G$ ならば, $\mathrm{IRR}_K(G \mid \boldsymbol{Y}) \ni \boldsymbol{X}$ に対し $\mathrm{IRR}_K(T(\boldsymbol{Y}) \mid \boldsymbol{Y}) \ni \boldsymbol{Z}$ で $\boldsymbol{Z}^G = \boldsymbol{X}$ となるものがある. $T(\boldsymbol{Y}) = G$ のときはこのような都合のよい定理はないが, 下の定理 5.8 のように射影表現を考えることにより $\boldsymbol{X}$ より次数の低い表現の問題に帰着できる場合がある.

まず次の定理を示す.

定理 5.7 $G \rhd H$ とし, $\boldsymbol{Y}$ は H の n 次の (絶対) 既約な K-表現とする. このとき $T(\boldsymbol{Y}) = G$ ならば次が成り立つ.

(i) $\boldsymbol{Y}$ は G の射影表現 $\boldsymbol{X}$ で次の (a), (b) をみたすものに拡張できる: $H \ni h, G \ni x$ に対し

(a) $X(hx) = X(h)\,X(x)$, (b) $X(xh) = X(x)\,X(h)$.

(ii) $\boldsymbol{X}'$ を (i) のような $\boldsymbol{Y}$ の他の拡張とすると, 写像 $\bar{\gamma} : \bar{G} = G/H \to K^\times$ が存在して $X'(x) = \bar{\gamma}(\bar{x})X(x)$ $(\forall x \in G)$ となる.

(iii) α を (i) の射影表現 $\boldsymbol{X}$ に付随する因子団とするとき, $\alpha(hx, ky) = \alpha(x, y)$ $(\forall h, k \in H)$ が成り立つ. したがって $\bar{\alpha} : \bar{G} \times \bar{G} \to K^\times$ $((\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \alpha(x, y))$ が定義され, $\bar{\alpha}$ は $\bar{G}$ の因子団で次が成り立つ:

$$\bar{\alpha}^{n|H|} \sim 1,\ \text{特に}\ \mathrm{Char}\, K = 0\ \text{ならば}\ \bar{\alpha}^{|H|^2} \sim 1.$$

また $\boldsymbol{Y}$ が G の線形表現に拡張できるための必要十分条件は $\bar{\alpha} \sim 1$ となることである.

特に $H^2(\bar{G}, K^\times) = 1$ ならば $\boldsymbol{Y}$ はつねに G の線形表現に拡張できる.

[証明] (i) T を G/H の剰余類の完全代表系とする. ただし $1 \in T$ とする.

仮定により $T \ni t$ に対し $\boldsymbol{Y}^t \sim \boldsymbol{Y}$ であるから，$X(t) \in GL_n(K)$ が存在して $Y(tht^{-1}) = X(t)Y(h)X(t)^{-1}$ $(\forall h \in H)$ となる．ここで $X(1) = I$ (単位行列) としてよい．G の元は ht $(h \in H, t \in T)$ と一意的に表されるから，写像 $\boldsymbol{X}: G \to GL_n(K)$ $(ht \mapsto Y(h)X(t))$ が定義されるが，これが求めるものであることを示す．まず $\boldsymbol{X}$ が $\boldsymbol{Y}$ の拡張であることは明らかである．また $h \in H, x = kt$ $(k \in H, t \in T)$ であるとき，

$$X(hx) = X(hkt) = Y(hk)X(t) = Y(h)Y(k)X(t),$$
$$X(h)X(x) = Y(h)Y(k)X(t)$$

であるから (a) が成り立つ．次に $xh = kth = k(tht^{-1})t$ であるから

$$\begin{aligned} X(xh) &= Y(k)Y(tht^{-1})X(t) \\ &= Y(k)X(t)Y(h)X(t)^{-1}X(t) \\ &= Y(k)X(t)Y(h) \end{aligned}$$

となるが，一方 $X(x)X(h) = Y(k)X(t)X(h)$ であるから (b) が成り立つ．最後に $\boldsymbol{X}$ が G の射影表現であることをみるためまず次のことを注意しておく．(b) より $X(xh^x) = X(x)Y(h^x)$ となるが，この左辺は $X(hx) = Y(h)X(x)$ に等しいから

$$X(x)^{-1}Y(h)X(x) = Y(h^x)$$

が成り立つ．したがって $G \ni x, y$ に対し

$$\begin{aligned} &X(xy)X(y)^{-1}X(x)^{-1}Y(h)X(x)X(y)X(xy)^{-1} \\ &= X(xy)Y(h^{xy})X(xy)^{-1} = Y(h) \qquad (\forall h \in H) \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{Y}$ の絶対既約性から $X(x)X(y)X(xy)^{-1}$ はスカラー行列 $\alpha(x,y)I$ になる．よって $X(x)X(y) = \alpha(x,y)X(xy)$ をえる．

(ii) $X'(x)X(x)^{-1}Y(h)X(x)X'(x)^{-1} = X'(x)Y(h^x)X'(x)^{-1} = Y(h)$ $(\forall h \in H)$ であるから，$X'(x) = \gamma(x)X(x)$ $(\gamma(x) \in K^\times)$ となる．ここで $h \in H$ のとき $X'(hx) = Y(h)X'(x) = \gamma(x)Y(h)X(x) = \gamma(x)X(hx)$ となるが，一方 $X'(hx) = \gamma(hx)X(hx)$ で，$X(hx)$ は正則行列であるから $\gamma(hx) = \gamma(x)$ となる．よって $\bar{\gamma}: \bar{G} \to K^\times$ $(\bar{x} \mapsto \gamma(x))$ が定義できて (ii) が成り立つ．

(iii) $X(hx)X(ky) = \alpha(hx, ky)X(hxky)$ であるが，一方

$$\begin{aligned} X(hx)X(ky) &= X(h)X(x)X(k)X(y) = X(h)X(k^{x^{-1}})X(x)X(y) \\ &= \alpha(x,y)X(hk^{x^{-1}})X(xy) \\ &= \alpha(x,y)X(hk^{x^{-1}}xy) = \alpha(x,y)X(hxky) \end{aligned}$$

となるから $\alpha(hx, ky) = \alpha(x, y)$ が成り立つ．よって $\bar{\alpha}: \bar{G} \times \bar{G} \to K^{\times}$ が定義できるが，これが $\bar{G}$ の因子団になることは明らかである．

ここで $\delta(x) = \det X(x)$ とおけば，$X(x)X(y) = \alpha(x, y)X(xy)$ より $\alpha(x, y)^n = \delta(x)\delta(y)\delta(xy)^{-1}$ となる．$h \in H$ ならば $X(hx) = X(h)X(x)$ であるから $\delta(hx)^{|H|} = \delta(h)^{|H|}\delta(x)^{|H|} = \delta(x)^{|H|}$ である．したがって $\bar{\gamma}: \bar{G} \longrightarrow K^{\times}$ ($\bar{x} \mapsto \delta(x)^{|H|}$) が定義できて，$\alpha(x, y)^{n|H|} = \bar{\gamma}(x)\bar{\gamma}(y)\bar{\gamma}(xy)^{-1}$ となり，$\bar{\alpha}^{n|H|} \sim 1$ をえる．もし $\mathrm{Char}\, K = 0$ ならば $n \mid |H|$ であるから $\bar{\alpha}^{|H|^2} \sim 1$ である．

最後に $\boldsymbol{Y}$ が G の線形表現 $\boldsymbol{X}'$ に拡張できれば，(ii) より $\bar{\alpha} \sim 1$ となることが容易にわかる．逆に $\bar{\gamma}: \bar{G} \to K^{\times}$ が存在して $\bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\gamma}(\bar{y})\bar{\gamma}(\bar{x}\bar{y})^{-1}\bar{\gamma}(\bar{x})$ となれば，$\boldsymbol{X}': x \mapsto \bar{\gamma}(\bar{x})^{-1}X(x)$ は G の線形表現になる．□

注意　上の定理の (iii) において，$\alpha \sim 1$ という条件では $\boldsymbol{Y}$ が G の線形表現に拡張できるための十分条件ではない (Issacs [2]，p. 179 参照)．

$G \rhd H, \bar{G} = G/H$ とする．このとき $(\bar{\boldsymbol{X}}, \bar{\alpha})$ が $\bar{G}$ の射影表現ならば，$\bar{\boldsymbol{X}}$ から自然にえられる写像 $\boldsymbol{X}: x \mapsto \bar{X}(\bar{x})$ は G の射影表現で，それに付随する因子団は $\bar{\alpha}$ から自然にえられる写像 $\alpha: G \times G \to K^{\times}$ $((x, y) \mapsto \bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}))$ である．

定理 5.8　$G \rhd H, \bar{G} = G/H$ とし，$\mathrm{IRR}_K(H) \ni \boldsymbol{Y}$ に対し $T(\boldsymbol{Y}) = G$ と仮定する．また定理 5.7 のように $\boldsymbol{Y}$ を G の射影表現に拡張したものを同じ記号 $\boldsymbol{Y}$ で表し，それに付随する因子団を α とする．このとき次が成り立つ．

(i)　$\mathrm{IRR}_K(G \mid \boldsymbol{Y}) \ni \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_H \sim e\boldsymbol{Y}$ とするとき，$\bar{G}$ の e 次の既約な射影表現 $(\bar{\boldsymbol{Z}}, \bar{\alpha}^{-1})$ が存在して，$\boldsymbol{X}$ は次の表現に同値になる：

(5.8)　$$\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Y}: x \mapsto Z(x) \otimes Y(x) \qquad (x \in G).$$

(ただし $\bar{\alpha}$ は α からえられる $\bar{G}$ の因子団で，$\boldsymbol{Z}$ は $\bar{\boldsymbol{Z}}$ から自然にえられる G の射影表現とする．)

(ii)　逆に $(\bar{\boldsymbol{Z}}, \bar{\alpha}^{-1})$ を $\bar{G}$ の任意の既約な射影表現とするとき，(5.8) は G の既約表現で，$\mathrm{IRR}_K(G \mid \boldsymbol{Y})$ のある表現に同値である．また $\bar{\boldsymbol{Z}}$ の次数を e とすれば，$(\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Y})_H \sim e\boldsymbol{Y}$ となる．

［証明］ Y の次数を n とする．問 1.13(i) のように，$M_e(K)\otimes_K M_n(K)$ の元 $A\otimes B$ を二つの行列 A, B のテンサー積と同一視して $M_e(K)\otimes_K M_n(K)=M_{en}(K)$ としてよい．I_e, I_n でそれぞれ e 次，n 次の単位行列を表すことにし，また $\otimes_K$ の K を省略しておく．

（i） $X_H=eY$ としてよい．このとき $H\ni h$ に対し $X(h)=I_e\otimes Y(h)$ となる．$G\ni x$ に対し

$$X(h^x)=X(x)^{-1}X(h)X(x)=X(x)^{-1}(I_e\otimes Y(h))X(x)$$

となるが，一方 $Y(h^x)=Y(x)^{-1}Y(h)Y(x)$ であるから

$$X(h^x)=I_e\otimes Y(h^x)=(I_e\otimes Y(x))^{-1}(I_e\otimes Y(h))(I_e\otimes Y(x))$$

となり，$X(x)(I_e\otimes Y(x))^{-1}$ は $I_e\otimes Y(h)(\forall h\in H)$ と可換である．ここで Y の絶対既約性から $\{Y(h)\mid h\in H\}$ は $M_n(K)$ を生成し，したがって $X(x)(I_e\otimes Y(x))^{-1}\in C_{M_{en}(K)}(KI_e\otimes M_n(K))=M_e(K)\otimes KI_n$ (II, 4.1) となり，$Z(x)\in M_e(K)$ があって

$$X(x)=Z(x)\otimes Y(x)$$

と表される．$X(x)X(y)=X(xy)$ と $Y(x)Y(y)=\alpha(x,y)Y(xy)$ より $Z(x)Z(y)=\alpha(x,y)^{-1}Z(xy)$ が導かれ，また $Z(hx)=Z(x)$ $(\forall h\in H)$ も容易に示される．よって $\bar{Z}:\bar{x}\mapsto Z(x)$ が定義できて，$(\bar{Z},\bar{\alpha}^{-1})$ は $\bar{G}$ の射影表現であり，Z は $\bar{Z}$ から自然にえられる G の射影表現である．Z が可約ならば X も可約になるから，仮定により Z は既約である．

（ii） 因子団 $\bar{\alpha}^{-1}$ できまる $\bar{G}$ の一般群環を $B=\bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}}Ku_{\bar{x}}$ $(u_{\bar{x}}u_{\bar{y}}=\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})^{-1}u_{\overline{xy}})$ とし，多元環 $B\otimes_K M_n(K)$ を A とおく．このとき $f:KG\to A$ $(G\ni x\mapsto u_{\bar{x}}\otimes Y(x))$ は多元環の準同型である．まずこれが全準同型であることを示す．$u_{\bar{1}}=1_B$ としてよい．このとき $H\ni h$ に対し $f(h)=u_{\bar{1}}\otimes Y(h)$ で，$\{Y(h)\mid h\in H\}$ は $M_n(K)$ を生成するから $\mathrm{Im}\,f\supset u_{\bar{1}}\otimes M_n(K)$ である．したがって任意の $x\in G$ に対し $u_{\bar{x}}\otimes I_n=(u_{\bar{x}}\otimes Y(x))(u_{\bar{1}}\otimes Y(x)^{-1})\in \mathrm{Im}\,f$ となり $\mathrm{Im}\,f=A$ をえる．

さて $\bar{Z}$ は B の（絶対）既約表現を与え，また $M_n(K)$ の元にそれ自身を対応させる写像を ι とすれば，これはもちろん（絶対）既約表現であるから，$\bar{Z}\otimes\iota$ は A の（絶対）既約表現である (II, 3.15)．そして $(\bar{Z}\otimes\iota)\circ f:KG\to M_{en}(K)$ が (5.8) の表現を与えるから，f が全射であることにより (5.8) は G の既約表現で，これが $\mathrm{IRR}_K(G\mid Y)$ のある表現に同値であることは明らかである．また最後の主張も明らかである．□

系 5.9　定理5.8と同じ仮定のもとで，H の既約表現 $\boldsymbol{Y}$ は G の線形表現 $\boldsymbol{X}$ に拡張できるとする．このとき $\mathrm{IRR}_K(G\,|\,\boldsymbol{Y}) \ni \boldsymbol{M}$ に対し $\bar{\boldsymbol{Z}} \in \mathrm{IRR}_K(\bar{G})$ が唯一つ定まって，$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{Z}\otimes\boldsymbol{X}$ に同値になる．(ただし $\boldsymbol{Z}$ は $\bar{\boldsymbol{Z}}$ から自然にえられる G の表現とする．) したがって

$$\mathrm{IRR}_K(G\,|\,\boldsymbol{Y}) = \{\boldsymbol{Z}\otimes\boldsymbol{X}\,;\,\bar{\boldsymbol{Z}} \in \mathrm{IRR}_K(\bar{G})\}$$

としてよい．

［**証 明**］ $\boldsymbol{Z}\otimes\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Z}'\otimes\boldsymbol{X}$ ならば $\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{Z}'$ を示せばよい．そのため $P^{-1}(Z(x)\otimes X(x))P = Z'(x)\otimes X(x)$ $(\forall x \in G)$ とすれば，特に $P^{-1}(I_e \otimes Y(h))P = I_e\otimes Y(h)$ $(\forall h \in H)$ であるから $P = Q\otimes I_n$ となる．このとき $Q^{-1}Z(x)Q = Z'(x)$ となり $\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{Z}'$ をえる．□

二つの群の直積 $G = H_1 \times H_2$ において $\boldsymbol{X}_i$ $(i = 1,2)$ を H_i の表現とするとき，$G \ni (h_1, h_2) \mapsto X_1(h_1)\otimes X_2(h_2)$ は G の表現を与える．これを $\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2$ と表し，その指標を $\chi_{\boldsymbol{X}_1} \times \chi_{\boldsymbol{X}_2}$ とかく．明らかに

$$(\chi_{\boldsymbol{X}_1} \times \chi_{\boldsymbol{X}_2})(h_1, h_2) = \chi_{\boldsymbol{X}_1}(h_1)\chi_{\boldsymbol{X}_2}(h_2).$$

系 5.10　$G = H_1 \times H_2$ のとき次が成り立つ：

$$\{\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2\,;\,\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{IRR}_K(H_i)\ (i = 1,2)\} = \mathrm{IRR}_K(G).$$

［**証 明**］ $\mathrm{IRR}_K(H_2) \ni \boldsymbol{X}_2$ ならばもちろん $T(\boldsymbol{X}_2) = G$ で，これは G の表現 $\boldsymbol{X}_2$: $(h_1, h_2) \mapsto X_2(h_2)$ に拡張できる．また $\bar{G} = G/H_2 \simeq H_1$ で，これらを同一視すればその既約表現 $\boldsymbol{X}_1 \in \mathrm{IRR}_K(H_1)$ から自然にえられる G の表現は $(h_1, h_2) \mapsto X_1(h_1)$ である．したがって系5.9より $\mathrm{IRR}_K(H_2) \ni \boldsymbol{X}_2$ に対し $\{\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2\,;\,\boldsymbol{X}_1 \in \mathrm{IRR}_K(H_1)\} = \mathrm{IRR}_K(G\,|\,\boldsymbol{X}_2)$ となり，$\mathrm{IRR}_K(G) = \bigcup_{\boldsymbol{X}_2}\mathrm{IRR}_K(G\,|\,\boldsymbol{X}_2)$ から系の主張が成り立つ．□

系5.9と関連して，正規部分群の既約表現の拡張可能性について次が成り立つ．

定理 5.11　$G \triangleright H$ とし，$\mathrm{IRR}_K(H) \ni \boldsymbol{Y}$ に対し $T(\boldsymbol{Y}) = G$ と仮定する．このとき次のいずれの場合も $\boldsymbol{Y}$ は G の線形表現に拡張できる．

(i)　G/H が巡回群のとき．

(ii) $\mathrm{Char}\, K = p > 0$ で G/H が p 群のとき．

(iii) (Gallagher) $\mathrm{Char}\, K = 0$ で $(|H|, |G/H|) = 1$ のとき．

[証明] $\bar{G} = G/H$ とおく．

(i) 補題 5.4 (iii) より $H^2(\bar{G}, K^\times) = 1$ であるから，定理 5.7(iii) より主張が成り立つ．

(ii) 補題 5.4(ii) より $H^2(\bar{G}, K^\times)$ は p' 群であるが，一方その各元の位数は $|\bar{G}|$ の約数で p べきであるから $H^2(\bar{G}, K^\times) = 1$ となる．よって (ii) が成り立つ．

(iii) $\boldsymbol{Y}$ の次数を n とする．$\boldsymbol{Y}$ は定理 5.7(i) のような G の射影表現 $(\boldsymbol{X}, \alpha)$ に拡張できる．ここで α は $\bar{\alpha} \in Z^2(\bar{G}, K^\times)$ から自然にえられる G の因子団で $\bar{\alpha}^{|H|^2} \sim 1$ である．一方 $\bar{\alpha}^{|\bar{G}|} \sim 1$ であるから仮定により $\bar{\alpha} \sim 1$ となり，$\boldsymbol{Y}$ は G の線形表現に拡張できる．□

特に $\boldsymbol{C}$ 上の表現の指標については次のことが成り立つ．

定理 5.12 $G \triangleright H$，$\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$ とし，ζ の惰性群を $T = T(\zeta)$ とおく．

(i) $\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) \ni \chi$ の H に関する分岐指数 $e = (\chi_H, \zeta)_H$ は $|T : H|$ の約数である．

(ii) ζ は T の既約指標 η に拡張できると仮定する．このとき次が成り立つ．

(a) $\mathrm{Irr}(T \mid \zeta) = \{\theta\eta\,;\, \bar{\theta} \in \mathrm{Irr}(T/H)\}$,

$\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) = \{(\theta\eta)^G\,;\, \bar{\theta} \in \mathrm{Irr}(T/H)\}$.

(b) $\zeta^G = \sum_{\bar{\theta} \in \mathrm{Irr}(T/H)} \theta(1)(\theta\eta)^G$.

[証明] (i) 定理 3.8(ii) より $\mathrm{Irr}(T \mid \zeta) \ni \eta$ で $e = (\eta_H, \zeta)_H$ となるものがある．このとき定理 5.8 より T/H の既約な射影表現で次数が e のものがあり，定理 5.6 より $e \mid |T : H|$ である．

(ii) (a) は系 5.9 と定理 3.8 より明らかである．(b) は $\theta(1) = ((\theta\eta)_H, \zeta)_H = (\theta\eta, \zeta^T)_T$ より $\zeta^T = \sum_\theta \theta(1)(\theta\eta)$ となることからわかる．□

上の定理の (i) から次がえられる．

定理 5.13 $G \triangleright H$ とするとき

(i)　$\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$, $\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) \ni \chi \Longrightarrow \chi(1) \mid |G:H| \zeta(1)$.

(ii)　(伊藤昇)　H が Abel 群ならば，任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し $\chi(1) \mid |G:H|$ となる．

［**証明**］(i)　$T = T(\zeta)$とおくとき$\mathrm{Irr}(T \mid \zeta) \ni \eta$ で$\eta^G = \chi$となるものがある．$\eta_H = e\zeta$ とおけば $e \mid |T:H|$ であるから，$\chi(1) = |G:T| \eta(1) \mid |G:T||T:H| \zeta(1) = |G:H| \zeta(1)$　となる．

(ii)　H が Abel 群ならば，任意の $\zeta \in \mathrm{Irr}(H)$ に対し $\zeta(1) = 1$ であるから明らかである．□

5.3　射影表現と中心拡大

群の準同型 $\pi: \tilde{G} \to G$ が全準同型で，$\mathrm{Ker}\,\pi$ が $\tilde{G}$ の中心 $Z(\tilde{G})$ に含まれるとき，$\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ は G の **中心拡大** であるという．$\mathrm{Ker}\,\pi = H$ のとき $\tilde{G}$ は G の H による中心拡大ということもある．

$\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ が中心拡大で $\mathrm{Ker}\,\pi = H$ であるとき

$$H \leq Z(\tilde{G}), \qquad \tilde{G}/H \simeq G$$

となる．$\tilde{G} = \sum_{a \in G} Ht_a$ (ただし $\pi(t_a) = a$) とし，

$$t_a t_b = z(a, b) t_{ab} \qquad (z(a, b) \in H)$$

とするとき次が成り立つ．

問 5.14　(i)　$z(a, b)z(ab, c) = z(b, c)z(a, bc)$ が成り立ち，したがって $z: G \times G \to H$ $((a, b) \mapsto z(a, b))$ は H 上の因子団である．(ただし G は H に自明に作用しているものとする．)

(ii)　$\tilde{G}/H$ の別の代表系 $\{t'_a\}$ (ただし $\pi(t'_a) = a$) をとり，$t'_a t'_b = z'(a, b) t'_{ab}$ とおけば，二つの因子団 z, z' は同伴である．

逆にまた次が成り立つ．

補題 5.15　群 G と Abel 群 H が与えられているとする．このとき (G は H に自明に作用しているとして) $z: G \times G \to H$ を因子団とすれば，H の G による中心拡大 $\tilde{G}$ で

(5.9)　$$\tilde{G} = \sum_{a \in G} Ht_a, \qquad t_a t_b = z(a, b) t_{ab}$$

となるものがある.

［**証明**］ 集合としての直積 $\tilde{G} = H \times G = \{(h, a) ; h \in H,\ a \in G\}$ において乗法を次のように定義する：

$$(h, a)(k, b) = (hkz(a, b), ab).$$

このとき $z(a, 1) = z(1, a) = z(1, 1)$ (II, 7.5) であるから

$$(h, a)(z(1, 1)^{-1}, 1) = (z(1, 1)^{-1}, 1)(h, a) = (h, a)$$

となり，$\tilde{G}$ は $(z(1, 1)^{-1}, 1)$ を単位元にもつ群になることが容易に確かめられる．また $H \times 1 = \{(h, 1) ; h \in H\} \subset Z(\tilde{G})$ となる．

写像 $\zeta : H \to H \times 1$ $(h \mapsto (hz(1, 1)^{-1}, 1))$ は同型で，h と $\zeta(h)$ を同一視して $H \leq Z(\tilde{G})$ と考える．このとき $t_a = (1, a)$ とおけば　$ht_a = (hz(1, 1)^{-1}, 1)(1,\ a) = (hz(1, 1)^{-1}z(1, a), a) = (h, a)$　となり，また $t_a t_b = (z(a, b), ab) = z(a, b)t_{ab}$ となるから (5.9) が成り立つ．□

さて G の中心拡大の表現と G の射影表現は次のように自然に関係している．

補題 5.16　$\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ は G の中心拡大とし，$H = \mathrm{Ker}\,\pi$，$\tilde{G} = \sum_{a \in G} Ht_a$（ただし $\pi(t_a) = a$）とする．また $\tilde{G}$ の表現 $\tilde{\boldsymbol{X}} : \tilde{G} \to GL_n(K)$ において，$H \ni h$ に対しては $\tilde{X}(h)$ はすべてスカラー行列 $\lambda(h)I$（I は単位行列）であると仮定する．このとき $\boldsymbol{X} : G \to GL_n(K)$ $(a \mapsto \tilde{X}(t_a))$ は G の射影表現である．また $\tilde{G} \ni x = ht_a$ に対し $\tilde{X}(x) = \lambda(h)X(\pi(x))$ が成り立つ．

［**証明**］ $t_a t_b = z(a, b)t_{ab}$ とすれば，$\tilde{X}(t_a)\tilde{X}(t_b) = \lambda(z(a, b))\tilde{X}(t_{ab})$ であるから $\boldsymbol{X}$ は因子団 $\{\lambda(z(a, b))\}$ をもつ G の射影表現である．また後半は明らかである．□

注意　$\tilde{\boldsymbol{X}}$ が（絶対）既約ならば補題の仮定は自動的にみたされている．

問 5.17　上の補題において $\tilde{G} = \sum_a Ht'_a$（ただし $\pi(t'_a) = a$）と $\tilde{G}/H$ の別の代表系 $\{t'_a\}$ をとれば，$\boldsymbol{X}' : G \to GL_n(K)$ $(a \mapsto \tilde{X}(t'_a))$ は $\boldsymbol{X}$ に同値な射影表現である．

補題 5.16 と関連して $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ は中心拡大とし，$\boldsymbol{X} : G \to GL_n(K)$ が G の射影表現であるとき，$\tilde{G}$ の線形表現 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ と写像 $\lambda : \tilde{G} \to K^{\times}$ が存在して

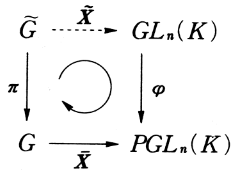
$$\tilde{X}(x) = \lambda(x)X(\pi(x)) \qquad (\forall x \in \tilde{G}) \tag{5.10}$$

が成り立つならば，G の射影表現 $\boldsymbol{X}$ は $\tilde{G}$ の線形表現 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ に **持ち上げ可能** であ

るという．

注意　(5.10) において $\mathrm{Ker}\,\pi \ni h$ に対しては $\tilde{X}(h) = \lambda(h)X(1)$ で，これは問 5.1 の下の注意によりスカラー行列である．

上のことは次のように考えてもよい．すなわち $\varphi: GL_n(K) \to PGL_n(K)$ は自然な準同型で，また $\bar{X}: G \to PGL_n(K)$ は射影表現 X の引き起す準同型とするとき，右の図形が可換になるような準同型 $\tilde{X}$ が存在することに他ならない．



中心拡大 $\tilde{G} \to G$ において，G の任意の射影表現が $\tilde{G}$ の線形表現に持ち上げ可能であるとき，この中心拡大は G の射影表現に関して **持ち上げ可能性** をもつという．

G の射影表現に関して持ち上げ可能性をもつ中心拡大がつねに存在するという Schur の結果を示すため，少し準備をしておく．

Abel 群 H の一次の K-表現の全体を $\hat{H}$ とかく：$\hat{H} = \{\lambda : H \to K^\times$ (群準同型)$\}$．$\hat{H} \ni \lambda, \mu$ の積を $(\lambda\mu)(h) = \lambda(h)\mu(h)$ と定義すれば $\hat{H}$ はまた Abel 群になる．$\hat{H}$ を H の（K 上の）**指標群** とよぶ．

補題 5.18　H は Abel 群とし，$\mathrm{Char}\,K \nmid |H|$ と仮定する．このとき次が成り立つ．

(i)　$\hat{H} \simeq H$.

(ii)　H の部分群 A に対し $A^\perp = \{\lambda \in \hat{H}\,;\, A \leq \mathrm{Ker}\,\lambda\}$ とすれば

(a)　$A^\perp \simeq \widehat{H/A}$,　　(b)　$\hat{A} \simeq \hat{H}/A^\perp$.

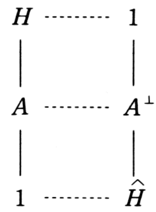
特に $\hat{A} \ni \lambda_0 : A \to K^\times$ は $\hat{H} \ni \lambda : H \to K^\times$ に拡張できる：$\lambda_A = \lambda_0$.

(iii)　$H \ni h$ に対し $\hat{H}$ の元 $\chi_h : \hat{H} \to K^\times$ $(\lambda \mapsto \lambda(h))$ を対応させて同型 $\chi: H \to \hat{\hat{H}}$ がえられる．

［**証明**］(i)　$H = \langle h_1 \rangle \times \cdots\cdots \times \langle h_r \rangle$ と巡回群の直積に分解して各 h_i の位数は n_i とする．仮定により $\mathrm{Char}\,K \nmid n_i$ であるから 1 の原始 n_i 乗根 $\varepsilon_i \in K$ が存在する．すなわち $\langle \varepsilon_i \rangle$ の位数は n_i である．$\hat{H} \ni \lambda_i$ を $\lambda_i(h_j) = \varepsilon_i{}^{\delta_{ij}}$ となるように定め

ると $\hat{H} = \langle\lambda_1\rangle \times \cdots\cdots \times \langle\lambda_r\rangle$ となり，各 λ_i の位数は n_i であるから (i) が成り立つ．

(ii) $\bar{H} = H/A$ とおく．このとき $A^\perp \ni \lambda$ は準同型 $\bar{\lambda}: \bar{H} \to K^\times$ $(\bar{h} \mapsto \lambda(h))$ を引き起す．逆に任意の準同型 $\lambda': \bar{H} \to K^\times$ は自然に準同型 $\lambda: H \to K^\times$ $(h \mapsto \lambda'(\bar{h}))$ を引き起し，$\lambda \in A^\perp, \bar{\lambda} = \lambda'$ となる．このようにしてえられる全単射 $f: A^\perp \to \hat{\bar{H}}$ $(\lambda \mapsto \bar{\lambda})$ は同型である．



特に $|H/A| = |A^\perp|$，したがって $|A| = |\hat{H}/A^\perp|$ となる．Res^H_A: $\hat{H} \to \hat{A}$ $(\lambda \mapsto \lambda_A)$ の核は $A^\perp$ に一致するから，$\hat{H}/A^\perp$ は $\hat{A}$ の部分群に同型であるが，位数を比較して Res^H_A が全準同型であることがわかる．よって $\hat{H}/A^\perp \simeq \hat{A}$ となり，またこれは $\hat{A} \ni \lambda_0$ が $\hat{H} \ni \lambda$ に拡張可能であることを示している．

(iii) χ が準同型であることは明らかである．また $H \ni h = h_1^{t_1}\cdots\cdots h_r^{t_r} \neq 1$ として $h_i^{t_i} \neq 1$ なる i をとれば，$\chi_h(\lambda_i) = \lambda_i(h) = \varepsilon_i^{t_i} \neq 1$ であるから χ は単準同型で，したがって位数を比較して同型であることがわかる．□

$\mathrm{Char}\,K \nmid |H|$ のとき，上の補題の χ_h を h と同一視して $\hat{\hat{H}} = H$ と考えてよい．

$H^2(G, K^\times)$ を Schur にしたがって G の（K 上の）**乗法因子群**とよび $M_K(G)$ と表す．また因子団 α を含む剰余類 $\alpha B^2(G, K^\times)$ $(\in M_K(G))$ を α^* と表すことにする．

補題 5.19 $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ は中心拡大で，$H = \mathrm{Ker}\,\pi$, $\tilde{G} = \sum_{a\in G} Ht_a$（ただし $\pi(t_a) = a$）とし，$t_a t_b = z(a, b) t_{ab}$ とする．

(i) $\hat{H} \ni \lambda$ に対し $\tau_\lambda: G \times G \to K^\times$ $((a, b) \mapsto \lambda(z(a, b)))$ は因子団で，準同型 $\tau^*: \hat{H} \to M_K(G)$ $(\lambda \mapsto \tau_\lambda^*)$ がえられる．またこの τ^* は $\tilde{G}/H$ の完全代表系 $\{t_a\}$ のとり方によらず定まる．

(ii) $\mathrm{Ker}\,\tau^* = (H \cap \tilde{G}')^\perp = \{\lambda \in \hat{H}\,;\, H \cap \tilde{G}' \leq \mathrm{Ker}\,\lambda\}$．したがって次が成り立つ：

$$\tau^* \text{ が単準同型} \Longleftrightarrow H \subset \tilde{G}'.$$

ただし $\tilde{G}'$ は $\tilde{G}$ の交換子群とする．

(iii) G の射影表現 (X, α) が $\tilde{G}$ の線形表現に持ち上げ可能であるため必要

十分な条件は，$\alpha^* \in \operatorname{Im} \tau^*$ となることである．

よって G の任意の射影表現が $\tilde{G}$ の線形表現に持ち上げ可能であるため必要十分な条件は τ^* が全準同型であることである．

［**証明**］（i） 前半はほとんど明らかである．後半を示すため $\{t'_a\}$ を別の完全代表系として $t'_a = h_a t_a$ $(h_a \in H)$，$t'_a t'_b = z'(a,b) t'_{ab}$ とする．このとき $z'(a,b) = z(a,b) h_b h_{ab}{}^{-1} h_a$ となる．したがって $\hat{H} \ni \lambda$ に対し $\gamma(a) = \lambda(h_a)$ とおき，代表系 $\{t'_a\}$ に関して λ に対応する因子団を τ'_λ とすれば

$$\tau'_\lambda(a,b) = \lambda(z'(a,b)) = \tau_\lambda(a,b)\gamma(b)\gamma(ab)^{-1}\gamma(a)$$

となるから $\tau'_\lambda \sim \tau_\lambda$ である．

（ii） まず $\lambda \in (H \cap \tilde{G}')^\perp$ とする．このとき λ は $H/H \cap \tilde{G}'$ の一次表現を引き起し，したがって準同型 $\bar{\lambda}: H\tilde{G}'/\tilde{G}' \to K^\times$ $(h\tilde{G}' \mapsto \lambda(h))$ を引き起す．さらに $\bar{\lambda}$ は準同型 $\tilde{G}/\tilde{G}' \to K^\times$ に拡張されるから，$\tilde{G}$ の一次表現 $\tilde{\lambda}: \tilde{G} \to K^\times$ で $\tilde{\lambda}(h) = \lambda(h)$ $(\forall h \in H)$ となるものがある．このとき

$$\tilde{\lambda}(t_a)\tilde{\lambda}(t_b) = \lambda(z(a,b))\tilde{\lambda}(t_{ab})$$

となるから $\tau_\lambda \sim 1$ となり，$\lambda \in \operatorname{Ker} \tau^*$ をえる．

逆に $\lambda \in \operatorname{Ker} \tau^*$，すなわち $\tau_\lambda \sim 1$ と仮定すれば，写像 $\gamma: G \to K^\times$ があって

$$\lambda(z(a,b)) = \gamma(b)\gamma(ab)^{-1}\gamma(a)$$

となる．このとき $\tilde{\lambda}: \tilde{G} \to K^\times$ を $\tilde{G} \ni x = ht_a$ $(h \in H)$ に対して $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(h)\gamma(a)$ とおいて定義すれば，これが準同型であることは容易に確かめられる．また $t_1 t_1 = z(1,1) t_1$ より $t_1 = z(1,1)$，したがって $\lambda(t_1) = \lambda(z(1,1)) = \gamma(1)$ であることに注意すれば，$\tilde{\lambda}(h) = \tilde{\lambda}((ht_1{}^{-1})t_1) = \lambda(ht_1{}^{-1})\gamma(1) = \lambda(h)\lambda(t_1)^{-1}\gamma(1) = \lambda(h)$ となり，$\tilde{\lambda}$ は λ の拡張である．明らかに $\tilde{G}' \leq \operatorname{Ker} \tilde{\lambda}$ であるから $H \cap \tilde{G}' \leq \operatorname{Ker} \lambda$ となり，$\lambda \in (H \cap \tilde{G}')^\perp$ をえる．後半は $(H \cap \tilde{G}')^\perp = 1 \Longleftrightarrow H \cap \tilde{G}' = H$ より明らかである．

（iii） （必要性） 必要ならば同値な表現をとって $X(1) = I$（単位行列）と仮定してよい．$\tilde{G}$ の表現 $\tilde{X}$ と写像 $\tilde{\lambda}: \tilde{G} \to K^\times$ が存在して $\tilde{X}(x) = \tilde{\lambda}(x) X(\pi(x))$ $(\forall x \in \tilde{G})$ とする．このとき $H \ni h$，$\tilde{G} \ni x$ に対し $\tilde{X}(hx) = \tilde{X}(h)\tilde{X}(x)$ より $\tilde{\lambda}(hx) = \tilde{\lambda}(h)\tilde{\lambda}(x)$ が成り立つことがわかる．特に $\tilde{\lambda}$ の H への制限を λ と表せば，$\lambda \in \hat{H}$ である．$G \ni a, b$ に対し

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t_a t_b) &= \tilde{X}(z(a,b) t_{ab}) = \lambda(z(a,b))\tilde{\lambda}(t_{ab}) X(ab) \\ &= \tau_\lambda(a,b)\tilde{\lambda}(t_{ab}) X(ab)\end{aligned}$$

であるが，一方

$$\tilde{X}(t_a t_b) = \tilde{X}(t_a)\tilde{X}(t_b) = \tilde{\lambda}(t_a)\tilde{\lambda}(t_b)X(a)X(b)$$
$$= \tilde{\lambda}(t_a)\tilde{\lambda}(t_b)\alpha(a,b)X(ab)$$

となるから　$\tau_\lambda(a,b) = \alpha(a,b)\tilde{\lambda}(t_b)\tilde{\lambda}(t_{ab})^{-1}\tilde{\lambda}(t_a)$　となり，$\tau_\lambda \sim \alpha$，したがって $\alpha^* \in \mathrm{Im}\,\tau^*$ である．

（十分性）　ある $\lambda \in \hat{H}$ に対し $\tau_\lambda \sim \alpha$ とする．すなわち $\gamma: G \to K^\times$ が存在して $\lambda(z(a,b)) = \alpha(a,b)\gamma(b)\gamma(ab)^{-1}\gamma(a)$ が成り立つとする．このとき $\tilde{X}: \tilde{G} \to GL_n(K)$ を $\tilde{G} \ni ht_a$ $(h \in H)$ に対して $\tilde{X}(ht_a) = \lambda(h)\gamma(a)X(a)$ とおいて定義すれば，$\tilde{X}((ht_a)(kt_b)) = \tilde{X}(ht_a)\tilde{X}(kt_b)$ となることが容易に確かめられる．したがって $\tilde{X}$ は $\tilde{G}$ の表現で，$x = ht_a$ に対し $\mu(x) = \lambda(h)\gamma(a)$ とおけば $\tilde{X}(x) = \mu(x)X(\pi(x))$ が成り立つ．□

上の補題 (i) で定義された準同型 $\tau^*: \hat{H} \to M_K(G)$ を**転入写像**とよぶ．

最後に次の補題が必要である．

補題 5.20　2-コバンダリーの全体 $B^2(G, K^\times)$ は可除な Abel 群である．したがって $Z^2(G, K^\times)$ の部分群 M が存在して

$$Z^2(G, K^\times) = B^2(G, K^\times) \times M, \qquad M \simeq M_K(G)$$

となる．

［証明］　$\gamma: G \to K^\times$ に対し　$B^2(G, K^\times) \ni \delta\gamma : (a,b) \mapsto \gamma(b)\gamma(ab)^{-1}\gamma(a)$　を考える．また $n \neq 0$ を任意の有理整数とする．このとき各 $a \in G$ に対し $\rho(a)^n = \gamma(a)$ となる $\rho(a) \in K^\times$ をとれば，$\rho: G \to K^\times$ が定義できて $(\delta\rho)^n = \delta\gamma$ となる．したがって（乗法群を考えていることに注意して）$B^2(G, K^\times)$ は可除である．後半は I, 12.4 より明らかである．□

上の補題において $\mathrm{Char}\,K \nmid |M|$（補題 5.4）であるから $\hat{M} \simeq M$ となる．また $\hat{M} = M$ と考えてよい．さらに $M \ni \alpha$ と α^* を同一視して $M = M_K(G)$ と考えてよい．

さて $G \times G \ni (a,b)$ をきめると準同型 $z(a,b): M \to K^\times$ $(\alpha \mapsto \alpha(a,b))$ が定まる．すなわち $z(a,b) \in \hat{M}$ で $z(a,b)(\alpha) = \alpha(a,b)$ となるものが定まり，

$z: G \times G \to \hat{M}$ は $\hat{M}$ 上の因子団である．よって G の中心拡大 $E \xrightarrow{\pi} G$ で $\mathrm{Ker}\,\pi = \hat{M}$，かつ

$$E = \sum_{a \in G} \hat{M} t_a, \qquad t_a t_b = z(a, b) t_{ab}$$

となるものが定まる．これに対して補題 5.19 の転入写像 τ^* は次のようになる．$\hat{\hat{M}} = M \ni \alpha$ に対し　$\tau_\alpha(a, b) = \alpha(z(a, b)) = z(a, b)(\alpha) = \alpha(a, b)$　であるから $\tau_\alpha = \alpha$ となり，$\tau^*: M = \hat{\hat{M}} \to M_K(G) = M$ は恒等写像である．よって補題 5.19 (iii) から次の定理がえられる．

定理 5.21 (Schur)　群 G に対して中心拡大 $E \xrightarrow{\pi} G$ で $\mathrm{Ker}\,\pi \simeq M_K(G)$ となるものが存在して，G の射影表現に関して持ち上げ可能性をもつ．またこの E は G の射影表現に関して持ち上げ可能性をもつ中心拡大のうち位数が最小のものである．

群 G の射影表現に関して持ち上げ可能性をもつ中心拡大のうち位数が最小のものを，Schur にしたがって G の **表現群** とよぶ．この位数は上の定理から $|G| \cdot |M_K(G)|$ に等しい．

表現群は群論的に次のように特徴づけられる．

定理 5.22　$\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ が G の中心拡大で $\mathrm{Ker}\,\pi = H$ であるとき，これが G の表現群であるため必要十分な条件は次の 2 条件がみたされることである：

(a)　$H \leq \tilde{G}'$,　　　(b)　$|H| = |M_K(G)|$.

またこのとき $H \simeq M_K(G)$ となる．

[証明]　中心拡大 $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ に対し補題 5.19 のような転入写像 $\tau^*: \hat{H} \to M_K(G)$ を考える．このときこの中心拡大が表現群であれば補題 5.19 (iii) より τ^* は全準同型で，したがって位数の最小性より同型である．よって $H \simeq \hat{H} \simeq M_K(G)$ となり，また同じ補題の (ii) より (a) が成り立つ．

逆に (a), (b) を仮定すれば，補題 5.19 (ii) より τ^* は単準同型で，したがって (b) より同型である．よって $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ は G の表現群である．□

§6. モジュラー表現序論

標数が $p>0$ の体上の群の表現を (p-) **モジュラー表現** といい，その指標を **モジュラー指標** とよぶ．

この節では素数 p を一つきめて，p-モジュラー表現に関する基本的な事柄についてのべる．

R は完備な離散付値環とし，その商体 K の標数は 0 とする．また (π) を R の極大イデアルとし，剰余体 $F=R/(\pi)$ は標数 p の体であると仮定する．このような仮定のもとで (K,R,F) を **p-モジュラー系** とよぶ．K の付値 ν としては $\nu(p)=1$ となるものをとり，自然な準同型 $R\to F=R/(\pi)$ による $R\ni\alpha$ の像を α^* と表すことにする．

また K の素体は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ であるとし，K における $\boldsymbol{Q}$ の代数的閉包を K_0 とする．このとき（体としての）単準同型 $f:K_0\to\boldsymbol{C}$ があるが，f で対応する元を同一視して $K_0\subset\boldsymbol{C}$ と考える．$K_0\ni\alpha$ に対し $\bar{\alpha}$ はその共役複素数を表す．

この節では群 G と p-モジュラー系 (K,R,F) を固定し

K は 1 の $|G|$ 乗根をすべて含む

ものと仮定する．このとき K も F も G の任意の部分群の分解体である（定理 1.32 (ii)，定理 4.11）．モジュラー表現といえば F-表現を意味するものとする．

6.1 Brauer 指標

以後この節では $|G|_p=p^a$ とする．$G\ni x=x_px_{p'}$ を x の p-部分 x_p と p'-部分 $x_{p'}$ の積への分解とするとき $x_p, x_{p'}\in\langle x\rangle$ である．$\boldsymbol{T}:G\to GL_n(F)$ を G のモジュラー表現とすれば，その $\langle x\rangle$ への制限の既約分解を考えて，$P\in GL_n(F)$ を適当にとれば

$$P^{-1}T(x)P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

となることがわかる．ここで各 λ_i は 1 の $o(x)$ 乗根である．このとき $P^{-1}T(x_p)P, P^{-1}T(x_{p'})P$ はともに下半三角行列で，F における 1 の p^a 乗根は 1 に限ることに注意すれば

$$P^{-1}T(x_p)P = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}T(x_{p'})P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となり，指標について次が成り立つ：

(6.1)
$$\chi_T(x) = \chi_T(x_{p'}).$$

群 G の p' 元の全体を $G_{p'}$ と表す．上の (6.1) のようにモジュラー指標は $G_{p'}$ における値で定まる．

さて K, F における 1 の $|G|_{p'}$ 乗根の全体はともに位数が $|G|_{p'}$ の巡回群で，したがって写像 $R \xrightarrow{*} F = R/(\pi)$ でこれらは 1 対 1 に対応する．$G_{p'} \ni x$ に対し $T(x)$ の固有値を上のように $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ とすれば，これらはすべて 1 の $|G|_{p'}$ 乗根であるから，各 λ_i に対し R における 1 の $|G|_{p'}$ 乗根 μ_i で $\mu_i{}^* = \lambda_i$ となるものが一意的に定まる．そこで

$$\varphi_T(x) = \mu_1 + \cdots + \mu_n$$

とおいて，φ_T をモジュラー表現 T の **Brauer 指標**とよぶ．$G_{p'} \ni x, y$ が G-共役ならば $T(x)$ と $T(y)$ の固有値の集合は一致するから $\varphi_T(x) = \varphi_T(y)$ が成り立つ．この意味で Brauer 指標は $G_{p'}$ 上で定義された複素数値の類関数である．また $\varphi_T(x^{-1}) = \overline{\varphi_T(x)}$ が成り立つ．

定義から明らかに次が成り立つ．

補題 6.1　S, T 等は G のモジュラー表現とする．このとき

(i)
$$S \sim T \Longrightarrow \varphi_S = \varphi_T.$$

(ii)　$\varphi_T{}^*(x) = \varphi_T(x_{p'})^*$ と $\varphi_T{}^*$ を定義すれば，$\varphi_T{}^*$ は T のモジュラー指標 χ_T に一致する．

(iii)
$$T \sim \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ * & T_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varphi_T = \varphi_{T_1} + \varphi_{T_2}.$$

G の既約なモジュラー表現の同値類の完全代表系を $\{T_1, \cdots, T_l\}$ とし，各 T_i

の Brauer 指標を φ_i と表してこれを**既約な Brauer 指標**とよぶ．また G の既約な Brauer 指標の全体を $\mathrm{IBr}(G)$ と表す：$\mathrm{IBr}(G)=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_l\}$．上の補題の (iii) から任意の Brauer 指標は $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_l\}$ の有理整係数 (≥ 0) の一次結合で表される．また $\{\varphi_1{}^*,\cdots,\varphi_l{}^*\}$ は G の既約なモジュラー指標の全体である．

定理 6.2 $\mathrm{IBr}(G)=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_l\}$ は K 上一次独立である．

[**証明**] 自明でない一次関係式

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\varphi_i=0 \qquad (\alpha_i\in K)$$

があるとする．このとき $\{\nu(\alpha_i);\,\alpha_i\neq 0\}$ の最小値が $\nu(\alpha_{i_0})$ であるとして $\alpha_{i_0}{}^{-1}$ を両辺にかければ，$\beta_i=\alpha_{i_0}{}^{-1}\alpha_i$ とおいて

$$\sum_i\beta_i\varphi_i=0\,; \qquad \beta_i\in R, \quad \beta_{i_0}=1$$

をえる．よって F 上の自明でない関係式

$$\sum_i\beta_i{}^*\varphi_i{}^*=0$$

をえるが，これは $\{\varphi_i{}^*\}$ の一次独立性 (II, 3.13) に反する．□

上の定理から直ちに次がえられる．

系 6.3 G の二つの F-表現 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ について次が成り立つ：

$$\boldsymbol{S}\longleftrightarrow\boldsymbol{T}\Longleftrightarrow\varphi_{\boldsymbol{S}}=\varphi_{\boldsymbol{T}}.$$

6.2 分解定数

$\boldsymbol{X}$ を G の K-表現とするとき，II, 1.6(ii) より $\boldsymbol{X}$ はある R-表現 $\boldsymbol{X}_1$ に K-同値である．したがって G のモジュラー表現 $\boldsymbol{X}_1{}^*$ がえられる．$G_{p'}\ni x$ に対し $X_1(x)$ の固有値 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ はすべて 1 の $|G|_{p'}$ 乗根で，これらは t に関する R 上の固有方程式 $\det(tI-X_1(x))=0$ の根である．この方程式の係数を (π) を法として考えれば $X_1(x)^*$ の固有方程式 $\det(tI-X_1(x)^*)=0$ がえられるから $\mu_1{}^*,\cdots,\mu_n{}^*$ が $X_1{}^*(x)$ の固有値になる．したがって $\chi_{\boldsymbol{X}_1}(x)=\sum_i\mu_i$ は $\boldsymbol{X}_1{}^*$ の Brauer 指標 $\varphi_{\boldsymbol{X}_1{}^*}(x)$ に一致する．よって次が成り立つ．

補題 6.4 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ を G の R-表現とするとき

(i)　$\chi_{X_1}|_{G_{p'}} = \varphi_{X_1^*}$.

(ii)　$X_1 \underset{K}{\sim} X_2 \Longrightarrow \varphi_{X_1^*} = \varphi_{X_2^*}$.

注意　II 章でものべたように，G の K-表現 X からそれに K-同値な R-表現 X_1 を通してえられるモジュラー表現 X_1^* は X_1 のとり方に依存し，F-同値を度外視しても一意的に定まるものではない．しかし上の補題の (ii) のようにその Brauer 指標は一意的に定まり，これは II, 1.9 が成り立つことを意味している．

さて　$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$, $\mathrm{IBr}(G) = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_l\}$　とするとき，$\chi_i|_{G_{p'}}$ は Brauer 指標であるから

(6.2)
$$\chi_i|_{G_{p'}} = \sum_{j=1}^{l} d_{ij}\varphi_j$$

となる $\boldsymbol{Z} \ni d_{ij} \geq 0$ が一意的に定まる．これを **分解定数** とよび，$k \times l$ 行列 $D = (d_{ij})$ を G の **分解行列** という．d_{ij} を $d_{\chi_i\varphi_j}$ とかくこともある．

G の p' 元からなる共役類の全体を $\mathrm{Cl}(G_{p'}) = \{C_1, \cdots, C_m\}$ とし，各共役類の代表元 $x_i \in C_i$ $(1 \leq i \leq m)$ をえらんでおく．このとき

$$X' = (\chi_i(x_j))_{i,j} \qquad (k \times m \text{ 行列})$$
$$\Phi = (\varphi_i(x_j))_{i,j} \qquad (l \times m \text{ 行列})$$

とおけば，(6.2) より次が成り立つ．

(6.3)
$$X' = D\Phi.$$

定理 6.5
$$|\mathrm{IBr}(G)| = |\mathrm{Cl}(G_{p'})|.$$

［**証明**］　定理の上の記号をそのまま用いることにして，$G_{p'}$ 上の K に値をとる類関数の全体を $\boldsymbol{CF}_K(G_{p'})$ と表す．C_i 上の特性関数を ζ_{C_i} と表せば，$\boldsymbol{CF}_K(G_{p'})$ は $\{\zeta_{C_i}; 1 \leq i \leq m\}$ を基とする K 上のベクトル空間で，その次元は m である．$\boldsymbol{CF}_K(G_{p'}) \ni \varphi_i$ $(1 \leq i \leq l)$ で，これらは一次独立であるから $l \leq m$ である．

一方，定理 2.9 より $\zeta_{C_\rho} = \sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(x_\rho)/|C_G(x_\rho)|}\chi_i$ であるから $\{\chi_i|_{G_{p'}}\}_{1 \leq i \leq k}$ は $\boldsymbol{CF}_K(G_{p'})$ を生成し，したがって (6.2) より $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq l}$ も $\boldsymbol{CF}_K(G_{p'})$ を生成するから $m \leq l$ である．□

以後 $|\mathrm{Cl}(G)|$ を k（または $k(G)$）と表し，$|\mathrm{Cl}(G_{p'})|$ を l（または $l(G)$）と表すことにする．このとき (6.3) の Φ は l 次の正方行列である．

また $\{\varphi_i{}^*\}_{1\leq i\leq l}$ の一次独立性より

(6.4) $\det \Phi \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$

となり，$\Phi \in GL_l(R)$ である．

6.3 主直既約指標

自然な準同型 $RG \xrightarrow{*} RG/\pi(RG) = FG$ $(\sum_{x\in G}\alpha_x x \mapsto \sum_x \alpha_x{}^* x)$ による RG の元 a の像を a^* と表すことにする．このとき，べき等元の持ち上げに関する定理 (Ⅰ, 14.2) によって，原始べき等元の同値類について $\widetilde{\mathrm{pi}}(RG)$ と $\widetilde{\mathrm{pi}}(FG)$ は1対1に対応し，その元の個数は l に等しい．いま $\widetilde{\mathrm{pi}}(RG)$ の完全代表系を $\{e_1, \cdots, e_l\}$ とすれば，$\{e_1{}^*, \cdots, e_l{}^*\}$ は $\widetilde{\mathrm{pi}}(FG)$ の完全代表系である．また $P_i = e_iRG$ とおけば $P_i{}^* = e_i{}^*FG = P_i/\pi P_i$ で，$\{P_i\}_{1\leq i\leq l}, \{P_i{}^*\}_{1\leq i\leq l}$ はそれぞれ RG, FG の主直既約加群の同型類の完全代表系である．

一般に FG- 加群 M に対して，RG の表現加群 V が存在して $V^* = V/\pi V \simeq M$ (FG-同型) となるとき，FG-加群 M は RG-加群 V に **持ち上げ可能** であるという．このとき M による G の F-表現 $\boldsymbol{T}$ に対し，V による R-表現 $\boldsymbol{X}$ を適当にとれば $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{T}$ となる．また補題 6.4(i) より $\boldsymbol{T}$ の Brauer 指標 $\varphi_{\boldsymbol{T}}$ は $\chi_{\boldsymbol{X}}|_{G_{p'}}$ に一致する．このようなとき G の F-表現 $\boldsymbol{T}$，あるいは Brauer 指標 $\varphi_{\boldsymbol{T}}$ はそれぞれ G の R-表現 $\boldsymbol{X}$，あるいは通常指標 $\chi_{\boldsymbol{X}}$ に **持ち上げ可能** であるという．

上でみたように FG の主直既約加群は RG の主直既約加群に持ち上げ可能で，したがって，一般に FG の射影加群は RG の射影加群に持ち上げ可能である．

以下 $P_i{}^*/P_i{}^*J(FG)$ による G の既約な F-表現の Brauer 指標が φ_i であるとしておく．

さて $P_i = e_iRG$ による G の R-表現を $\boldsymbol{P}_i$ とかき，その指標を η_i と表してこれを G の**主直既約指標**とよぶ．このとき $\boldsymbol{P}_i{}^*$ の Brauer 指標 $\varphi_{\boldsymbol{P}_i{}^*}$ は $\eta_i|_{G_{p'}}$ に一致する．

η_i が $\varphi_i \in \mathrm{IBr}(G)$ に対応する主直既約指標であるという意味で，これを η_{φ_i}

と表すこともある.

問 6.6 γ_G を G の正則表現の通常指標とすれば次が成り立つ：

$$\gamma_G = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(1)\eta_i.$$

定理 1.26 より次がえられる.

定理 6.7 $p^a \mid \eta_i(1)$ $(1 \leq i \leq l)$. （ただし $|G|_p = p^a$.）

さて $\boldsymbol{P}_i^* \longleftrightarrow \sum_j c_{ij}\boldsymbol{T}_j$，すなわち c_{ij} を FG の Cartan 不変数とすれば次が成り立つ：

(6.5)
$$\eta_i|_{G_{p'}} = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}\varphi_j \qquad (1 \leq i \leq l).$$

l 次の正方行列 $C = (c_{ij})$ を G の Cartan 行列とよぶ. これは対称行列である (II, 8.21).

定理 6.8 $D = (d_{ij}), C = (c_{ij})$ をそれぞれ G の分解行列，Cartan 行列とするとき次が成り立つ.

(i)
$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k} d_{ji}\chi_j \qquad (1 \leq i \leq l).$$

(ii)
$$C = {}^tDD.$$

［**証明**］ (i) 通常既約指標 χ_j を与える RG の表現加群を V_j とする. また $e_iKG \simeq \bigoplus_j a_{ij}V_j^K$ とすれば $\eta_i = \sum_j a_{ij}\chi_j$，$a_{ij} = \dim_K \mathrm{Hom}_{KG}(e_iKG, V_j^K) = \dim_K V_j^K e_i$ となる. ここで $V_j \subset V_j^K$ と考えて，V_je_i の R-基は $V_j^Ke_i$ の K-基であるから $a_{ij} = \mathrm{rank}_R V_je_i = \dim_F V_j^* e_i^*$ となり，これは $e_i^*FG/e_i^*J(FG)$ の V_j^* における重複度に一致して $a_{ij} = d_{ji}$ をえる. （ただし $V_j^* = V_j/\pi V_j$.） よって (i) が成り立つ.

(ii) $\eta_i|_{G_{p'}} = \sum_\nu d_{\nu i}\chi_\nu|_{G_{p'}} = \sum_j\sum_\nu d_{\nu i}d_{\nu j}\varphi_j$ となるが，$\{\varphi_j\}$の一次独立性に注意して (6.5) と比較すれば $c_{ij} = \sum_\nu d_{\nu i}d_{\nu j}$ をえる. □

以後，RG-加群 V に対し FG-加群 $V/\pi V$ を V^* と表すことにする.

$G \ni x$ を含む G の共役類を $x^G = \{x^g ; g \in G\}$ と表す. このとき指標の第 2 直交関係（定理 2.9）は次のように表される：

(6.6) $$\sum_{i=1}^{k}\overline{\chi_i(x)}\chi_i(y)=\delta_{x^G y^G}|C_G(x)|.$$

これより次がえられる.

定理6.9 (i) $y\in G_{p'}$ ならば

(6.7) $$\sum_{i=1}^{l}\overline{\eta_i(x)}\varphi_i(y)=\delta_{x^G y^G}|C_G(x)|.$$

(ii) $$x\in G-G_{p'}\Longrightarrow \eta_i(x)=0\qquad(1\le i\le l).$$

[証明] (i) $\chi_i(y)=\sum_j d_{ij}\varphi_j(y)$ を (6.6) に代入すればよい.

(ii) $x\in G-G_{p'}$ ならば任意の $y\in G_{p'}$ に対し (6.7) の右辺は 0 である. したがって $\sum_i\overline{\eta_i(x)}\varphi_i=0$ となり, $\{\varphi_i\}$ の一次独立性より $\eta_i(x)=0$ をえる. □

G の p' 元を **p 正則元** とよぶことがある. これに対して $G-G_{p'}\ni x$, すなわち $p\mid o(x)$ となる元 x を **p 非正則元** とよぶ.

前と同様に $\mathrm{Cl}(G_{p'})=\{C_1,\cdots,C_l\}$, $C_i\ni x_i\ (1\le i\le l)$ とする. また

$$\Phi=(\varphi_i(x_j))_{i,j},\qquad Y=(\eta_i(x_j))_{i,j}$$

とし, 対角線上の成分が $|C_G(x_1)|,\cdots,|C_G(x_l)|$ である対角行列を

$$\mathrm{diag}\,(|C_G(x_1)|,\cdots,|C_G(x_l)|)$$

と表すことにしてこれを S とおく. このとき (6.7) より

(6.8) $${}^t\bar{Y}\Phi=S$$

をえる. よって ${}^t\bar{Y}(\Phi S^{-1})=I$ (単位行列) となるから $(\Phi S^{-1}){}^t\bar{Y}=I$ をえる. この (i,j)-成分をみて

(6.9) $$\sum_{\nu=1}^{l}\varphi_i(x_\nu)\frac{1}{|C_G(x_\nu)|}\overline{\eta_j(x_\nu)}=\delta_{ij}$$

となる. いま G または $G_{p'}$ 上で定義され K に値をとる G の類関数 f,g に対して, 内積 $(f,g)'$ を

$$(f,g)'=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G_{p'}}f(x)\overline{g(x)}$$

と定義すれば, 上の考察から次がえられる.

定理6.10 (i) $(\varphi_i,\eta_j)'=\delta_{ij}$.

(ii) $G_{p'} \ni x \Longrightarrow \nu(|C_G(x)|) = \min\{\nu(\eta_i(x))\,;\, 1 \le i \le l\}$.

[証明] (i) (6.9) より

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{|G|}{|C_G(x_\nu)|}\varphi_i(x_\nu)\overline{\eta_j(x_\nu)} = \delta_{ij}$$

をえるが，この左辺は $(\varphi_i, \eta_j)'$ に等しい．

(ii) (6.8) より $\sum_j \eta_j(x_i^{-1})\varphi_j(x_i) = |C_G(x_i)|$. よって $C_G(x) = C_G(x^{-1})$ に注意して

$$\begin{aligned}\nu(|C_G(x_i^{-1})|) &\ge \min\{\nu(\eta_j(x_i^{-1})\varphi_j(x_i))\,;\, 1 \le j \le l\}\\ &\ge \min\{\nu(\eta_j(x_i^{-1}))\,;\, 1 \le j \le l\}\end{aligned}$$

をえる．一方 (6.8) より ${}^t\bar{Y} = S\Phi^{-1}$ となり，(6.4) より $\Phi^{-1} = (\varphi'_{ij}) \in GL_l(R)$ である．よって $\eta_j(x_i^{-1}) = |C_G(x_i)|\varphi'_{ij}$ から

$$\nu(\eta_j(x_i^{-1})) \ge \nu(|C_G(x_i^{-1})|) \qquad (1 \le j \le l)$$

となり (ii) がえられる．□

問 6.11 次が成り立つ．

(i) $c_{ij} = (\eta_i, \eta_j)_G$.

(ii) $Z = ((\varphi_i, \varphi_j)')_{i,j}$ とおけば $CZ = I$ (単位行列).

したがって C は正則行列で，$\eta_1, \cdots, \eta_l$ は K 上一次独立である．

(iii) $\det C > 0$. (ヒント : $C = {}^tDD$ を用いよ.)

特に $p \nmid |G|$ のときは $G_{p'} = G$ で $l = k$ となり，また FG は半単純であるから $e_i{}^*FG = (e_iRG)^*$ は既約で，G の Cartan 行列 $C = (c_{ij})$ は単位行列である．このことから e_iKG は既約となることがわかり，それによる表現の指標を χ_i とすれば $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$ である．よって分解行列 D も単位行列で次が成り立つ．

定理 6.12 $p \nmid |G|$ ならば $l = k$ で

(i) $\chi_i = \eta_i = \varphi_i \qquad (1 \le i \le k)$.

(ii) G の既約なモジュラー表現 $\boldsymbol{T}_i$ は G の R-表現 $\boldsymbol{X}_i$ に持ち上げ可能である．(すなわち $\boldsymbol{X}_i{}^* = \boldsymbol{T}_i$.)

上の定理からえられる次の補題は有用である．

補題 6.13 G の Brauer 指標 φ に対し

(6.10) $$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x_{p'}) \qquad (x \in G)$$

とおいて定義される G の類関数 $\tilde{\varphi}$ は G の一般指標である．

したがって次のような表示が可能である：

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{k} m_i\chi_i, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{k} m_i(\chi_i|_{G_{p'}}) \qquad (m_i \in \boldsymbol{Z}).$$

［**証明**］ E を G の任意の基本部分群とする．E はべき零群であるから $E = P \times Q$ (P は p 群，Q は p' 群) と直積に分解される．$\tilde{\varphi}$ の定義から $\tilde{\varphi}_E = 1_P \times \varphi_Q$ となるが，φ_Q は定理 6.12 より Q の通常指標であるから $\tilde{\varphi}_E$ は E の通常指標である．よって Brauer の基本定理（定理 4.2(i)）から補題がえられる．□

上の補題の応用としてまず次がえられる．

定理 6.14 分解行列 D ならびに D^* の階数はともに l である．

［**証明**］ $\tilde{\varphi}_i = \sum_j m_{ij}\chi_j$ ($m_{ij} \in \boldsymbol{Z}$) の係数のつくる $l \times k$ 行列を $M = (m_{ij})$ とすれば，$\{\varphi_i\}$ の一次独立性から $MD = I$ (単位行列) をえる．したがって $M^*D^* = I$ も成り立ち，D, D^* の階数はともに l である．□

$\boldsymbol{Z}$ 上の行列 D に対し D^* の階数を D の **p-階数** という．

$\mathrm{Cl}(G_{p'}) \ni C_i$ に対し

$$S_i = \{x \in G\,;\, x_{p'} \in C_i\}$$

を C_i の属する **p'-セクション** とよぶ．これは G のいくつかの共役類の和集合で，また $G = \bigcup_{i=1}^{l} S_i$ と類別される．

補題 6.13 からまた次が示される．

定理 6.15 (i) $G - G_{p'}$ 上で 0 の値をとる一般指標の全体を $X(G \mid G_{p'})$ と表す．このとき $\{\eta_1, \cdots, \eta_l\}$ は $X(G \mid G_{p'})$ の $\boldsymbol{Z}$-基である．

(ii) $\{\tilde{\varphi}_1, \cdots, \tilde{\varphi}_l\}$ は各 S_i 上で定値をとる G の R 値類関数全体のつくる R-加群の R-基である．(ただし $\tilde{\varphi}_i$ は (6.10) で定義された関数である．)

(iii) S_i 上の特性関数 ζ_{S_i} は $\mathrm{Irr}(G)$ の R 係数の一次結合で表される．

［**証明**］ $\tilde{\varphi}_i = \sum_j m_{ij}\chi_j$ ($m_{ij} \in \boldsymbol{Z}$) とおく．

(i) $X(G|G_{p'}) \ni \eta_1, \cdots, \eta_l$ は K 上一次独立で，$\dim_K K \otimes_Z X(G|G_{p'}) \leq l$ であ

るから $\{\eta_1, \cdots, \eta_l\}$ は $K \otimes_Z X(G|G_{p'})$ の K-基である．したがって $X(G|G_{p'}) \ni \theta$ は $\theta = \sum_i \alpha_i \eta_i$ $(\alpha_i \in K)$ と表される．ここで

$$\alpha_i = (\theta, \varphi_i)' = (\theta, \tilde{\varphi}_i)_G = \sum_j m_{ij}(\theta, \chi_j)_G$$

となるが，$(\theta, \chi_j)_G \in \boldsymbol{Z}$ より $\alpha_i \in \boldsymbol{Z}$ をえる．よって $\{\eta_i\}$ は $X(G|G_{p'})$ の $\boldsymbol{Z}$-基である．

(ii) 各 S_i 上定値の R 値類関数の全体を $\boldsymbol{F}$ とする．このとき $\dim_K K \otimes_R \boldsymbol{F} = l$ で $\{\tilde{\varphi}_i\}$ はその K-基である．よって $\boldsymbol{F} \ni \theta$ は $\theta = \sum_i \alpha_i \tilde{\varphi}_i$ $(\alpha_i \in K)$ と表されるが，η_i が $G - G_{p'}$ 上で 0 であることに注意すれば $(\tilde{\varphi}_j, \eta_i)_G = (\varphi_j, \eta_i)' = \delta_{ij}$ となるから

$$\alpha_i = (\theta, \eta_i)_G = \sum_{\rho=1}^{l} \frac{1}{|C_G(x_\rho)|} \theta(x_\rho) \eta_i(x_\rho^{-1})$$

となる．ここで定理 6.10(ii) より $\eta_i(x_\rho^{-1})/|C_G(x_\rho)| \in R$ であるから $\alpha_i \in R$ となり (ii) が成り立つ．

(iii) (ii) と $\tilde{\varphi}_i \in X(G)$ より明らかである．□

6.4 ブロック

群環 RG, FG の中心については

$$Z(RG) = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}(G)} R\hat{C}, \qquad Z(FG) = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}(G)} F\hat{C}$$

となるから

(6.11) $$Z(FG) = Z(RG)/\pi Z(RG)$$

が成り立つ．すなわち自然な準同型 $RG \xrightarrow{*} FG$ は全準同型 $Z(RG) \xrightarrow{*} Z(FG)$ を引き起し，これは群環の特徴的な性質の一つである．

特に (6.11) にべき等元の持ち上げに関する定理が適用できて，RG において 1 は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t \qquad (\varepsilon_i \in \mathrm{pi}(Z(RG)))$$

と表され，FG において

$$1 = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \cdots + \varepsilon_t^*$$

は 1 の中心的原始べき等元分解となる．

$B_i = \varepsilon_i(RG)$ とおけば，RG の (RG, RG)-加群としての直既約分解

$$RG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t$$

がえられ，対応して FG の (FG, FG)-加群としての直既約分解

$$FG = B_1{}^* \oplus B_2{}^* \oplus \cdots \oplus B_t{}^*$$

がえられる．

各 B_i を G の (p-)**ブロック**，または，**ブロックイデアル** とよび，その全体を $\mathrm{Bl}(G)$ と表す．また ε_i を B_i の **ブロックべき等元** とよび，これを e_{B_i} と表す．さらに G のブロックべき等元の全体を $\mathrm{bli}(G)$ と表すことにする：$\mathrm{bli}(G) = \{e_B\,;\,B \in \mathrm{Bl}(G)\}$.

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とする．RG-加群 V に対して $Ve_B = V$ が成り立つとき V は **ブロック B に属する** という．直既約な RG-加群は必ずあるブロックに属する (I, 8.13)．V_{RG} が G の R-表現 $\boldsymbol{X}$ の表現加群であるとき，V がブロック B に属するならば $\boldsymbol{X}$ あるいはその指標 $\chi_{\boldsymbol{X}}$ は B に属するという．このとき記号を乱用して $V \in B$, $\boldsymbol{X} \in B$, $\chi_{\boldsymbol{X}} \in B$ などとかく場合がある．明らかに次が成り立つ．

補題 6.16 R-表現 $\boldsymbol{X}$ について次の 3 条件は同値である．

(1) $\boldsymbol{X} \in B$.

(2) $\boldsymbol{X}(e_B) = I$ (単位行列).

(3) $\mathrm{Bl}(G) \ni B' \neq B \Longrightarrow \boldsymbol{X}(e_{B'}) = 0$.

KG-加群や G の K-表現，K-指標などについてもブロック B に属するということが同様に定義される．

また FG-加群 W についても，$We_B{}^* = W$ であるとき W はブロック B に属するといい，W による表現やその Brauer 指標，モジュラー指標についても同じいい表し方をする．さらに $W \in B$ 等の記号の乱用も許すことにする．

ブロック B に属する G の通常既約指標の全体を $\mathrm{Irr}(B)$ と表し，また B に属する既約な Brauer 指標の全体を $\mathrm{IBr}(B)$ と表す．このとき $\mathrm{Irr}(G), \mathrm{IBr}(G)$ はそれぞれ次のように類別される：

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Irr}(B), \qquad \mathrm{IBr}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{IBr}(B).$$

定理 6.17 χ_i, η_j はブロック B に属し，φ_ν は B と異なるブロック B' に属するとする．このとき次が成り立つ：

$$d_{i\nu} = 0, \qquad c_{j\nu} = 0.$$

［**証明**］ V_{RG} を χ_i あるいは η_j を与える表現加群とする．このとき $Ve_B = V$，したがって $V^*e_B^* = V^*$ であるから，V^*_{FG} の既約成分はすべてブロック B に属する．
□

いま G の分解行列，Cartan 行列の行，列の番号を $\{\chi_i\}, \{\eta_j\}, \{\varphi_\nu\}$ 等がブロックごとにまとまって現れるようにつければ，上の定理から D, C は次のように分解される：

$$D = \begin{pmatrix} D_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{B_t} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{B_t} \end{pmatrix}.$$

ここで $k(B_i) = |\mathrm{Irr}\,(B_i)|$，$l(B_i) = |\mathrm{IBr}\,(B_i)|$ とおけば，D_{B_i}，C_{B_i} はそれぞれ $k(B_i) \times l(B_i)$ 行列，$l(B_i) \times l(B_i)$ 行列で

$$(6.12) \qquad {}^tD_{B_i}D_{B_i} = C_{B_i}$$

が成り立つ．定理 6.14 より次は明らかである．

定理 6.18 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し D_B の階数，p-階数はともに $l(B)$ である．特に $l(B) \leq k(B)$ が成り立つ．また $\det C_B > 0$ である．

I, 8.15 から C_B はその行，列の番号をどんなにつけかえても次の形

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

に分解することはない．したがって (6.12) から D_B についても同じことがいえる．このことは次の定理 6.19 が成り立つことに他ならない．

いま $\mathrm{Irr}\,(G) \ni \chi, \chi'$ に対して $\mathrm{IBr}(G) \ni \varphi$ で $d_{\chi\varphi} \neq 0 \neq d_{\chi'\varphi}$ をみたすものが存在するとき $\chi - \chi'$ とかくことにする．また χ と χ' が有限個の列 $\chi = \chi_{i_1} - \chi_{i_2} - \cdots - \chi_{i_r} = \chi'$ で結ばれるとき $\chi \sim \chi'$ と表す．同様に $\mathrm{IBr}(G) \ni \varphi, \varphi'$ に対して $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ で $d_{\chi\varphi} \neq 0 \neq d_{\chi\varphi'}$ をみたすものが存在するとき $\varphi - \varphi'$ とかき，$\varphi \sim \varphi'$ も上と同様に定義する．このとき次が成り立つ．

定理 6.19 $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi, \chi'$ が同じブロックに属するため必要十分な条件は $\chi \sim \chi'$ となることである．また $\mathrm{IBr}(G) \ni \varphi, \varphi'$ についても同様のことが成り立つ．

問 6.20 (i) $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi$ ならば

$$\varphi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} m_{\varphi\chi} \chi|_{G_{p'}} \qquad (m_{\varphi\chi} \in \boldsymbol{Z})$$

と表される．

（ヒント：補題 6.13，定理 6.17 と $\mathrm{IBr}(G)$ の一次独立性を用いよ．）

(ii) 既約な Brauer 指標 φ, φ' が異なるブロック B, B' に属すれば $(\varphi, \varphi')' = 0$ である．

（ヒント：C_B の正則性と定理 6.10(i) を用いよ．）

$\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi$ とするとき，定理 6.17 より

$$\eta_\varphi(x) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi} \chi(x) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} d_{\chi\varphi} \chi(x)$$

となり，x が p-非正則元ならばこの値は 0 である．このことを用いて指標の第 2 直交関係は次のように精密化される．

補題 6.21 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とする．このとき x が p-正則元，y が p-非正則元ならば次が成り立つ：

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \chi(x) \overline{\chi(y)} = 0.$$

［**証明**］ 左辺 $= \displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(B)} d_{\chi\varphi} \varphi(x) \overline{\chi(y)}$

$$= \sum_{\varphi \in B} \varphi(x) \sum_{\chi \in B} d_{\chi\varphi} \overline{\chi(y)} = \sum_{\varphi \in B} \varphi(x) \overline{\eta_\varphi(y)} = 0. \qquad \square$$

ブロックべき等元については次が成り立つ．

定理 6.22 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とするとき

(i)
$$e_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} e_\chi.$$

ただし e_χ は χ に対応する KG の中心的原始べき等元で

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} x$$

である．

（ii）（大嶋）　e_B は $\{\hat{C}\,;C\in \mathrm{Cl}(G_{p'})\}$ の R 係数の一次結合である：

$$e_B=\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G_{p'})}\beta_B(C)\hat{C}\qquad(\beta_B(C)\in R).$$

［証明］（i）e_B は KG のいくつかの中心的原始べき等元の和として $e_B=\sum_{\chi\in T}e_\chi$ と表される．このとき

$$\chi\in T\Longleftrightarrow \chi(e_B)=\chi(1)\Longleftrightarrow \chi\in B$$

となるから $T=\mathrm{Irr}(B)$ である．

（ii）$e_B=\sum_C\beta_B(C)\hat{C}$ とおき，$G-G_{p'}\supset C\ni x$ とすれば，(i) と補題 6.21 より次がえられる：

$$\beta_B(C)=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(B)}\chi(1)\overline{\chi(x)}=0.\ \square$$

問 6.23（i）$\mathrm{Cl}(G_{p'})\ni C\ni x$ に対し次が成り立つ：

$$\beta_B(C)=\frac{1}{|G|}\sum_{\varphi\in B}\varphi(1)\overline{\eta_\varphi(x)}=\frac{1}{|G|}\sum_{\varphi\in B}\eta_\varphi(1)\overline{\varphi(x)}.\tag{6.13}$$

（ii）ブロック B には $\nu(\eta_\varphi(1))=\nu(|G|)$ となる主直既約指標 η_φ が存在する．

（ヒント：$e_B{}^*\neq 0$ と (6.13) を用いよ．ただし $\nu(\eta_\varphi(1))\geq\nu(|G|)$ に注意せよ．）

$\mathrm{Bl}(G)\ni B$ とするとき $e_B{}^*$ は $Z(B^*)$ の唯一つのべき等元であるから，$Z(B^*)$ は局所環で $Z(B^*)/J(Z(B^*))$ は体である．よって

$$Z(FG)/J(Z(FG))=\bigoplus_{B\in \mathrm{Bl}(G)}Z(B^*)/J(Z(B^*))$$

は左辺の単純因子分解で，$Z(FG)$ は $|\mathrm{Bl}(G)|$ 個の既約な F-表現をもつ．

一方 $\mathrm{Irr}(G)\ni\chi$，$\mathrm{Cl}(G)\ni C\ni x$ に対し

$$\omega_\chi(\hat{C})=\frac{|G|\chi(x)}{|C_G(x)|\chi(1)}$$

は代数的整数で（定理 2.25），ω_χ は $Z(RG)$ の一次表現 $\omega_\chi: Z(RG)\to R$ を引き起し，したがって $Z(FG)$ の一次表現 $\omega_\chi{}^*: Z(FG)\to F$ $(\hat{C}\mapsto\omega_\chi(\hat{C})^*)$ を引き起す．ここで $B\ni\chi$ とすれば定理 6.22(i) より $\omega_\chi(e_B)=1$，$\mathrm{Bl}(G)\ni B'\neq B$ に対しては $\omega_\chi(e_{B'})=0$ である．

以上のことから次の定理が示される．

定理 6.24 (i) $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi, \chi'$ が同じブロックに属するため必要十分な条件は次が成り立つことである：

(6.14)　$\omega_\chi(\hat{C}) \equiv \omega_{\chi'}(\hat{C}) \pmod{(\pi)}$　$(\forall C \in \mathrm{Cl}(G_{p'}))$.

(ii) $B \ni \chi$ とすれば $\omega_\chi{}^*$ は χ のとり方によらずブロック B だけできまり，これを $\omega_B{}^*$ と表すことにすれば $\{\omega_B{}^*; B \in \mathrm{Bl}(G)\}$ は $Z(FG)$ の既約表現の全体である．

(iii) $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とすれば $Z(B^*)/J(Z(B^*)) = F$ となる．

［**証明**］ (i) $\mathrm{Bl}(G) \ni B \ni \chi$ とすれば，$\omega_\chi{}^*$ は上の考察によって $Z(FG)/J(Z(FG))$ の単純因子 $Z(B^*)/J(Z(B^*))$ に属する $Z(FG)$ の既約表現である．したがって $B \ni \chi, \chi'$ ならば $\omega_\chi{}^* = \omega_{\chi'}{}^*$ となり (6.14) が成り立つ．また $B \ni \chi$, $B' \ni \chi', B \neq B'$ とすれば $\omega_\chi{}^*(e_B{}^*) = 1$，$\omega_{\chi'}{}^*(e_B{}^*) = 0$ となるからある $C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ に対し $\omega_\chi{}^*(\hat{C}) \neq \omega_{\chi'}{}^*(\hat{C})$ となる．

(ii) $Z(FG)$ の既約表現の個数が $|\mathrm{Bl}(G)|$ であることから明らかである．

(iii) $\omega_B{}^*$ は $Z(B^*)$ の一次の F-表現を引き起すから明らかである．□

6.5 不足数

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し

$$d(B) = \max\{\nu(|G|/\chi(1))\,;\, \chi \in \mathrm{Irr}\,(B)\}$$

を B の **不足数** とよぶ．このとき $\chi \in \mathrm{Irr}\,(B)$ に対し $d(B) \geq a - \nu(\chi(1))$ (ただし $\nu(|G|) = a$) となるから $\nu(\chi(1)) \geq a - d(B)$，したがって

$$\nu(\chi(1)) = a - d(B) + \mathrm{ht}(\chi) \qquad (\mathrm{ht}(\chi) \geq 0)$$

と表される．上の $\mathrm{ht}(\chi)$ を χ の **高さ** とよぶ．定義から B には高さ 0 の既約指標 χ が必ず存在する．

$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ は $\mathrm{IBr}\,(B)$ の，また $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi$ は $\{\chi|_{G_{p'}}\,;\, \chi \in \mathrm{Irr}(B)\}$ の $\boldsymbol{Z}$-係数の一次結合で表される（定理 6.17，問 6.20）ことから次のことがわかる．

定理 6.25 $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi \Longrightarrow \nu(\varphi(1)) \geq a - d(B)$.

また $\nu(\varphi(1)) = a - d(B)$ となる $\varphi \in \mathrm{IBr}(B)$ が存在する．

問 6.26 $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$, $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi$ とする．このとき $G \ni x, G_{p'} \ni y$ に対し次が

成り立つ：

$$\nu(\chi(x)) \geq \nu(|C_G(x)|) - d(B),$$
$$\nu(\varphi(y)) \geq \nu(|C_G(y)|) - d(B).$$

（ヒント：$\omega_\chi(\hat{C}) \in R$ と問 6.20 を用いよ.）

$\mathrm{Cl}(G) \ni C \ni x$ に対し $C_G(x)$ の Sylow p-部分群は，G-共役を度外視すれば x のとり方によらず C だけできまる．その一つを $\delta(C)$ と表して C の **不足群** とよぶ．$|\delta(C)| = p^c$ のとき $c = \nu(|C_G(x)|)$ で，これを共役類 C の **不足数** とよんで $d(C)$ と表す．

補題 6.27　(i)　(6.13) について次が成り立つ：

$$\nu(\beta_B(C)) \geq d(C) - d(B).$$

特に $d(B) < d(C)$ ならば $\beta_B(C)^* = 0$ である．

(ii)
$$d(C) < d(B) \Longrightarrow \omega_B{}^*(\hat{C}) = 0.$$

したがって次が成り立つ：

$$\omega_B{}^*(e_B{}^*) = \sum_{\substack{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'}) \\ d(C) = d(B)}} \beta_B(C)^* \omega_B{}^*(\hat{C}). \tag{6.15}$$

特に $d(B) = d(C)$ なる $C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ で，$\beta_B(C)^* \neq 0 \neq \omega_B{}^*(\hat{C})$ をみたすものが存在する．

［**証明**］　$C \ni x$ とする．

(i)　定理 6.10 (ii) を用いて

$$\nu(\beta_B(C)) \geq \nu(\eta_\varphi(x^{-1})) - d(B) \geq \nu(|C_G(x)|) - d(B) = d(C) - d(B).$$

(ii)　$B \ni \chi, \mathrm{ht}(\chi) = 0$ とすれば，$d(C) < d(B)$ のとき

$$\begin{aligned}\nu(\omega_\chi(\hat{C})) &= a + \nu(\chi(x)) - d(C) - (a - d(B)) \\ &= d(B) - d(C) + \nu(\chi(x)) > 0\end{aligned}$$

となる．したがって $\omega_B{}^*(\hat{C}) = 0$ で，(i) とあわせて (6.15) がえられる．後半は $\omega_B{}^*(e_B{}^*) \neq 0$ より導かれる．□

上の補題から定理 6.24(i) は次のように精密化される．

定理 6.28　$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi, \chi'$ はともに不足数 d のブロックに属するとする．このとき χ と χ' が同じブロックに属するため必要十分な条件は，$d(C) = d$

なる任意の $C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ に対して $\omega_\chi(\hat{C}) \equiv \omega_{\chi'}(\hat{C}) \pmod{(\pi)}$ が成り立つことである.

[**証明**] 必要条件であることは明らかである. 十分条件であることを示すため $\chi \in B, \chi' \in B'$ とすれば, $d(B) = d(B') = d$ より $\omega_{\chi'}{}^*(e_B{}^*) = \sum_{d(C)=d} \beta_B(C)^* \omega_{\chi'}{}^*(\hat{C}) = \omega_\chi{}^*(e_B{}^*) = 1$ となり $B' = B$ をえる. □

特に不足数 0 のブロックについては次が成り立つ.

定理 6.29 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$, $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ のとき次の条件はすべて同値である.

(1) $d(B) = 0$.

(2) $\nu(\chi(1)) = a \ (= \nu(|G|))$.

(3) $k(B) = 1$.

(4) $C_B = D_B = (1)$ (= 一次の単位行列).

(5) x が p-非正則元ならば $\chi(x) = 0$.

(6) $x \neq 1$ が p-元ならば $\chi(x) = 0$.

[**証明**] (1) ⇒ (2). 一般に $\nu(\chi(1)) \leq a$ であるから明らかである.

(2) ⇒ (3). $e_\chi \in Z(RG)$ となり $e_B = e_\chi$, すなわち $B = \{\chi\}$ となる.

(3) ⇒ (4). $k(B) = l(B) = 1$ より C_B, D_B は一次の正方行列で, $\mathrm{Irr}(B) = \{\chi\}$, $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi\}$ とすれば $\eta_\varphi = d\chi$ $(0 < d \in \boldsymbol{Z})$ となる. よって χ は $G - G_{p'}$ 上で 0 となるから $\chi = \sum_i m_i \eta_{\varphi_i}$ $(m_i \in \boldsymbol{Z})$ と表される (定理 6.15(i)). このとき $\varphi_1 = \varphi$ とすれば $m_1 d = 1$ となるから $d = 1$ となり $D_B = (1)$, したがって $C_B = (1)$ をえる.

(4) ⇒ (5), (5) ⇒ (6) は明らかである.

(6) ⇒ (1). $\mathrm{Syl}_p(G) \ni P$ とするとき

$$(\chi_P, \mathbf{1}_P)_P = \frac{1}{|P|} \sum_{x \in P} \chi(x) = \frac{\chi(1)}{|P|} \in \boldsymbol{Z}$$

であるから $\nu(\chi(1)) = a$ となる. よって $e_B = e_\chi, B = \{\chi\}$ となり $d(B) = 0$ である. □

$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$, $\nu(\chi(1)) = \nu(|G|)$ であるとき χ は **不足数 0 の既約指標** であるという.

問 6.30 (Gallagher) π は素数のある集合とする. このとき, $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対し $|G|_\pi \mid \chi(1)$ ならば χ は単位元と異なるすべての π-元上で 0 の値をとる.

6.6 Cartan 行列

$$X_{\mathrm{Br}}(G) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \boldsymbol{Z}\varphi, \qquad Y(G) = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \boldsymbol{Z}(\eta_\varphi|_{G_{p'}})$$

とおく．このとき $X_{\mathrm{Br}}(G) \supset Y(G)$ で，G の Cartan 行列 C の単因子を $\{a_1, \cdots, a_l\}$ とすれば，$\det C > 0$ に注意して次が成り立つことがわかる：

$$X_{\mathrm{Br}}(G)/Y(G) \simeq \boldsymbol{Z}/(a_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}/(a_l),$$
$$|X_{\mathrm{Br}}(G)/Y(G)| = \det C.$$

(永尾 [4]，定理 30.8 参照.)

Cartan 行列の単因子を調べるため少し準備をしておく．

G または $G_{p'}$ 上の関数 θ に対し，G 上の関数 $\hat{\theta}$ を

(6.16) $$\hat{\theta}(x) = \begin{cases} p^a\theta(x): & x \in G_{p'} \text{ のとき} \\ 0 \quad : & x \notin G_{p'} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．(ただし $a = \nu(|G|)$.) このとき次が成り立つ．

補題 6.31 (i) $X(G) \ni \theta$ または $X_{\mathrm{Br}}(G) \ni \theta$ ならば $\hat{\theta} \in X(G)$ である．

(ii) $X_{\mathrm{Br}}(G) \ni \theta \Longrightarrow p^a\theta \in Y(G)$.

(iii) Cartan 行列 C の単因子はすべて p べきである．

[**証明**] (i) E は G の任意の基本部分群とし，$E = P \times Q$ (P は p 群，Q は p' 群)，$|P| = p^b$ とする．また γ_P を P の正則表現の指標とすれば $\hat{\theta}_E = p^{a-b}\gamma_P \times \theta_Q$ となる．ここで $\theta_Q \in X(Q)$ であるから $\hat{\theta}_E \in X(E)$ となり，Brauer の基本定理により $\hat{\theta} \in X(G)$ をえる．

(ii) 定義から $\hat{\theta}|_{G_{p'}} = p^a\theta$ である．一方 $\hat{\theta}$ は $G - G_{p'}$ 上で 0 の値をとる一般指標であるから $\hat{\theta} = \sum_\varphi m_\varphi \eta_\varphi$ ($m_\varphi \in \boldsymbol{Z}$) と表され，$p^a\theta = \sum_\varphi m_\varphi(\eta_\varphi|_{G_{p'}}) \in Y(G)$ をえる．

(iii) (ii) より $X_{\mathrm{Br}}(G)/Y(G)$ は p 群であるから明らかである．□

定理 6.32 $\mathrm{Cl}(G_{p'}) = \{C_1, \cdots, C_l\}$, $C_i \ni x_i$ $(1 \leq i \leq l)$ とすれば，G の Cartan 行列 C の単因子の集合は

$$\{|C_G(x_1)|_p, \ \cdots, \ |C_G(x_l)|_p\}$$

となる.

[証明] C の単因子はすべて p べきであるから，単因子の一意性によりこれらは C を R 上の行列と考えたときの単因子に一致する.

(6.8) より

$$ {}^t\bar{\Phi}C\Phi = \mathrm{diag}(|C_G(x_1)|, \cdots, |C_G(x_l)|) $$

となり，$\Phi \in GL_l(R)$ であるから定理が成り立つ. □

ブロック B に対し

$$ X_{\mathrm{Br}}(B) = \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} \boldsymbol{Z}\varphi, \qquad Y(B) = \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} \boldsymbol{Z}(\eta_\varphi|_{G_{p'}}) $$

とおく. このとき B に対応する Cartan 行列 C_B の単因子を $\{a_1, \cdots, a_{l(B)}\}$ とおけば

$$ X_{\mathrm{Br}}(B)/Y(B) \simeq \boldsymbol{Z}/(a_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}/(a_{l(B)}), $$
$$ |X_{\mathrm{Br}}(B)/Y(B)| = \det C_B $$

となる. C_B の単因子について調べるため

$$ X(B) = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \boldsymbol{Z}\chi $$

とおき，まず次の補題を示す.

補題 6.33 $d = d(B)$ とおく. このとき $X(B) \ni \theta$ または $X_{\mathrm{Br}}(B) \ni \theta$ に対し次が成り立つ.

(i) $X(B) \ni \hat{\theta}$. また $\hat{\theta} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} n_{\theta\chi}\chi \quad (n_{\theta\chi} \in \boldsymbol{Z})$ とおけば

$$ \nu(n_{\theta\chi}) \geq \nu(\chi(1)) \geq a - d. $$

特に $p^{a-d} | n_{\theta\chi}$ となる.

(ii) $X_{\mathrm{Br}}(B) \ni \theta \Longrightarrow p^d\theta \in Y(B)$.

(iii) $p^e\theta \in Y(B) \Longrightarrow p^{-(a-e)}\hat{\theta} \in X(B)$.

[証明] (i) $\hat{\theta}$ は $G - G_{p'}$ 上で 0 の値をとる一般指標であるから $\hat{\theta} = \sum_\varphi m_\varphi\eta_\varphi$ $(m_\varphi \in \boldsymbol{Z})$ と表される. ここで $\varphi \notin B$ ならば $(\hat{\theta}, \varphi)' = (p^a\theta, \varphi)' = 0$ (問 6.20(ii)) となるから $m_\varphi = 0$ となり，$\hat{\theta} \in X(B)$ をえる. また $\mathrm{Cl}(G_{p'}) = \{C_i\}_{1\leq i\leq l}$, $C_i \ni x_i$ とすれば

$$\begin{aligned} n_{\theta\chi} &= (\chi, \hat{\theta})_G = (\chi, p^a\theta)' \\ &= \frac{1}{|G|_{p'}}\sum_{x\in G_{p'}}\chi(x)\overline{\theta(x)} = \frac{1}{|G|_{p'}}\sum_{i=1}^{l}|C_i|\chi(x_i)\overline{\theta(x_i)} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|_{p'}}\sum_{i=1}^{l}\omega_\chi(\hat{C}_i)\overline{\theta(x_i)}. \end{aligned}$$

よって $\nu(n_{\theta\chi}) \geq \nu(\chi(1))$ となる．残りの主張はこれより明らかである．

(ii) (i) より $p^{-(a-d)}\hat{\theta}$ は一般指標で $G-G_{p'}$ 上で 0 となるから $p^{-(a-d)}\hat{\theta} = \sum_\varphi l_\varphi\eta_\varphi$ ($l_\varphi \in \boldsymbol{Z}$) と表される．このとき (i) の証明より $\varphi \notin B$ ならば $l_\varphi = 0$ となり，$p^{-(a-d)}\hat{\theta}|_{G_{p'}} = p^d\theta \in Y(B)$ をえる．

(iii) $p^{-(a-e)}\hat{\theta}$ は $G-G_{p'}$ 上で 0 で，$G_{p'}$ 上では $p^{-(a-e)}\hat{\theta}|_{G_{p'}} = p^e\theta = \sum_{\varphi\in B} a_\varphi\eta_\varphi$ ($a_\varphi \in \boldsymbol{Z}$) と表されるから $p^{-(a-e)}\hat{\theta} = \sum_{\varphi\in B} a_\varphi\eta_\varphi \in X(B)$ となる．□

$X(B) \ni \theta$ または $X_{\mathrm{Br}}(B) \ni \theta$ に対して $\hat{\hat{\theta}} = p^{-(a-d(B))}\hat{\theta}$ とおく．このとき

$$\hat{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} p^{d(B)}\theta(x): & x \in G_{p'} \text{ のとき} \\ 0 \quad : & x \notin G_{p'} \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．また上の補題の記号を用いて $n_{\theta\chi}/p^{a-d}$ を $a_{\theta\chi}$ とおけば，$\chi \in \mathrm{Irr}\,(B)$ に対し $a_{\theta\chi} \in \boldsymbol{Z}$ で

$$\hat{\hat{\theta}} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} a_{\theta\chi}\chi \in X(B)$$

となる．この係数 $a_{\theta\chi}$ について次が成り立つ．

補題 6.34 $X(B) \ni \theta$ または $X_{\mathrm{Br}}(B) \ni \theta$ とするとき

(i) $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi, \chi'$ に対し次が成り立つ：

(6.17) $$a_{\theta\chi} \equiv a_{\theta\chi'}\frac{\chi(1)}{\chi'(1)} \qquad (\mathrm{mod}\ p^{\mathrm{ht}(\chi)+1}).$$

(ii) $\nu(\theta(1)) = a-d$ (ただし $d = d(B)$) ならば任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し $a_{\theta\chi} \neq 0$ である．また $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi_0$ の高さが 0 ならば

$$a_{\theta\chi_0} \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

[**証明**] (i) 補題 6.33 (i) の証明より

$$\frac{n_{\theta\chi}}{\chi(1)} = \frac{1}{|G|_{p'}}\sum_i\omega_\chi(\hat{C}_i)\overline{\theta(x_i)}$$

$$\equiv \frac{1}{|G|_{p'}}\sum_i \omega_{\chi'}(\widehat{C}_i)\overline{\theta(x_i)} = \frac{n_{\theta\chi'}}{\chi'(1)} \qquad (\mathrm{mod}\ (\pi)).$$

よって $\nu(n_{\theta\chi}/\chi(1) - n_{\theta\chi'}/\chi'(1)) > 0$ となるが，この括弧内の値に $\chi(1)/p^{a-d}$ をかけて

$$\nu(a_{\theta\chi} - a_{\theta\chi'}\chi(1)/\chi'(1)) > \mathrm{ht}(\chi)$$

をえる．

(ii)　ある $\chi' \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し $a_{\theta\chi'} = 0$ とすれば，(6.17) より任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して $p \mid a_{\theta\chi}$ となる．また高さ 0 のある $\chi_0 \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し $p \mid a_{\theta\chi_0}$ とすれば，(6.17) で $\chi' = \chi_0$ とおいてやはり任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し $p \mid a_{\theta\chi}$ となる．したがっていずれの場合も $p^{-1}\hat{\hat{\theta}} \in X(B)$ となり

$$p^{-1}\hat{\hat{\theta}} = \textstyle\sum_\varphi m_\varphi \eta_\varphi \qquad (m_\varphi \in \boldsymbol{Z})$$

と表されるが，$p^a \mid \eta_\varphi(1)$ であるから

$$\nu(p^{-1}\hat{\hat{\theta}}(1)) = d - 1 + \nu(\theta(1)) \geq a.$$

よって $\nu(\theta(1)) \geq a - d + 1$ となる．□

さて C_B の単因子については次が成り立つ．

定理 6.35　$p^{d(B)}$ は C_B の最大の単因子で，その（単因子としての）重複度は 1 である．

［**証明**］　補題 6.33, 34 の記号をそのまま用いることにする．まず補題 6.33 (ii) より C_B の単因子は高々 p^d である．次に $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi, \nu(\varphi(1)) = a - d$ とすれば，補題 6.34 (ii) の χ_0 に対し $\nu(a_{\varphi\chi_0}) = 0$ であるから $p^{-1}\hat{\hat{\varphi}} = p^{-(a-d+1)}\hat{\varphi} \notin X(B)$，したがって補題 6.33 (iii) より $p^{d-1}\varphi \notin Y(B)$ となり，$X_{\mathrm{Br}}(B)/Y(B)$ において $\varphi + Y(B)$ の位数は p^d である．よって p^d は C_B の単因子である．その重複度が 1 であることを示すには $p^d C_B{}^{-1}$ の p-階数が高々 1 であることを示せばよい．

そのため　$\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq l(B)}$，$\mathrm{Irr}(B) = \{\chi_j\}_{1 \leq j \leq k(B)}$　とし，$\eta_i = \eta_{\varphi_i}$ とおく．このとき $p^d\varphi_i = \sum_\nu l_{i\nu}(\eta_\nu|_{G_{p'}})$ $(l_{i\nu} \in \boldsymbol{Z})$ と表されるが，$L = (l_{ij})$ ($l(B)$ 次の正方行列）とおけば，$p^d\varphi_i = \sum_{\nu,j} l_{i\nu}c_{\nu j}\varphi_j$ より $LC_B = p^d I, L = p^d C_B{}^{-1}$ をえる．

一方 $l_{ij} = (p^d\varphi_i, \varphi_j)' = (\hat{\hat{\varphi}}_i, \tilde{\varphi}_j)_G$ となるが，$a_{ij} = a_{\varphi_i\chi_j}, \tilde{\varphi}_j = \sum_i m_{ji}\chi_i$ ($m_{ji} \in \boldsymbol{Z}$：補題 6.13 参照）とおけば $\hat{\hat{\varphi}}_i = \sum_\nu a_{i\nu}\chi_\nu$ であるから $l_{ij} = \sum_\nu a_{i\nu}m_{j\nu}$ をえる．よって $A = (a_{ij}), M = (m_{ij})$ とおけば

$$p^d C_B{}^{-1} = L = A\,{}^t M$$

となる．ここで (6.17) より A の p-階数は高々 1 であるから $p^d C_B^{-1}$ の p-階数も高々 1 である．□

次の不等式は上の定理から明らかである．

系 6.36　自然数 d に対し

$$\# \{B \in \mathrm{Bl}(G)\,;\, d(B) = d\} \leq \# \{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'}), d(C) = d\}.$$

不足数 0 のブロックについて，定理 6.35 を用いて次のことが示される．

定理 6.37　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ について次の 3 条件は同値である．

(1)　$d(B) = 0$.

(2)　$k(B) = l(B)$.

(3)　B^* は単純である．

［**証明**］ (1) ⇒ (2)．$1 = k(B) \geq l(B) \geq 1$ より明らかである．

(2) ⇒ (3)．D_B^* は正則行列であるから $C_B^* = {}^tD_B^* D_B^*$ も正則行列で，したがって C_B の単因子は 1 のみである．したがって定理 6.35 より $C_B = (1)$ となり，B^* の主直既約加群は既約で，その同型類は唯一つであるから B^* は単純である．

(3) ⇒ (1)．$C_B = (1)$ であるから上の定理より $d(B) = 0$ である．□

また 不足数 > 0 のブロックについては次が成り立つ．

系 6.38　$d(B) > 0$ ならば $k(B) > l(B)$ で，C_B の対角線上の成分 c_{ii} について $c_{ii} \geq 2$ が成り立つ．

［**証明**］ 後半を示せばよい．いまある η_i，例えば η_1 について $\eta_1|_{G_{p'}} = \varphi_1$ とすれば，C_B の対称性から

$$C_B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

と分解して C_B の性質に反する．よって B に属する FG の主直既約加群はすべて既約でないから，II, 8, 21 より $c_{ii} \geq 2$ である．□

最後に $k(B)$ に関する次の不等式を示す．

定理 6.39 (Brauer-Feit [1])

$$k(B) \leq \frac{1}{4}p^{2d(B)} + 1.$$

［**証明**］ $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi_0, \mathrm{ht}(\chi_0) = 0$ とし，補題 6.34 における $a_{\chi_0\chi}$ を簡単に a_χ と表すことにすれば

$$\hat{\hat{\chi}}_0 = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} a_\chi \chi$$

で，また補題 6.34(ii) より $a_\chi \neq 0\ (\forall \chi \in \mathrm{Irr}(B))$ である．よって $d = d(B)$ とおいて

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} a_\chi^2 &= (\hat{\hat{\chi}}_0, \hat{\hat{\chi}}_0)_G \\ &= p^d(\hat{\hat{\chi}}_0, \chi_0)' \\ &= p^d(\hat{\hat{\chi}}_0, \chi_0)_G = p^d a_{\chi_0}\end{aligned}$$

となり，$a_\chi \neq 0$ であるから

$$k(B) - 1 + a_{\chi_0}^2 \leq p^d a_{\chi_0}, \qquad k(B) \leq -a_{\chi_0}^2 + p^d a_{\chi_0} + 1$$

をえる．ここで右辺の a_{χ_0} に関する 2 次式の値は高々$\frac{1}{4}p^{2d}+1$ であるから定理がえられる．□

問 6.40 $\mathrm{Irr}(B) = \{\chi_i\}_{1 \leq i \leq k(B)}$ とし，補題 6.34 における $a_{\chi_i\chi_j}$ を a_{ij} と表して $A_B = (a_{ij})$ ($k(B)$ 次の正方行列) とおく．このとき次が成り立つ．

(i)　$A_B = p^{d(B)} D_B C_B^{-1\,t} D_B$.

(ii)　$A_B^2 = p^{d(B)} A_B$.

(iii)　$\mathrm{tr}\, A_B = p^{d(B)} l(B)$.

(ヒント： (i)　$a_{ij} = (p^d \chi_i, \chi_j)'$　(iii)　A_B は方程式 $x^2 - p^{d(B)}x = 0$ をみたすから，その 0 と異なる固有値はすべて $p^{d(B)}$．また $\mathrm{rank}\, A_B = l(B)$ である．)

問　題　III

以下で R は可換環，F は標数 $p > 0$ の体とする．

1. $R[G \times H] \simeq RG \otimes_R RH$　$((x, y) \mapsto x \otimes_R y\ (x \in G,\ y \in H))$.

2. **(テンサー誘導)** $H \leq G$ とし，W_{RH} に対し $W^{\otimes G} = \bigotimes_{t \in H\backslash G} (W \otimes_H t)$ (R 上の

$|G:H|$ 個のテンサー積）とおくと，これは自然な作用で（右）RG-加群となる．

3. P を G の p-部分群とする．$V = F \otimes_{FP} FG$ とすれば，任意の既約 FG-加群 W は $\mathrm{soc}(V)$ にも $\mathrm{hd}(V)$ にも現れる．

4. F は G の分解体とする．また $\mathrm{IRR}(FG) = \{W_1, \cdots, W_l\}$ とし，U_i を W_i の射影被覆とする．

(i) $W_1 = F_G$ とすれば，$U_i \mid U_1 \otimes_F W_i$ $(1 \leq i \leq l)$.

(ii) $\sum_{i=1}^{l} (\dim_F W_i)^2 \geq |G| / \dim_F U_1$.

5. $\delta : FG \to FG$ を $\delta(\sum_{x \in G} a_x x) = \sum_x a_x x^{-1}$ によって与える $(a_x \in F)$．このとき $\forall e \in \mathrm{pi}(FG)$ に対し，$\delta(e) FG \simeq \widehat{eFG}$（$FG$-同型）．

6. χ を G の可移な置換表現の $\boldsymbol{Q}$-指標とするとき，

$$|G : C_G(x)| \chi(x)/\chi(1) \in \boldsymbol{Z} \qquad (\forall x \in G).$$

7. $G \triangleright H, \bar{G} = G/H$ とするとき，$|C_{\bar{G}}(\bar{x})| \leq |C_G(x)|, \forall x \in G$.（指標の第 2 直交関係を利用せよ．）

8. K を $\boldsymbol{C}$ の部分体とする．ζ を 1 の原始 $|G|$ 乗根とし，$\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(K(\zeta)/K)$ とおく．$\sigma \in \mathfrak{G}$ に対し，$m_\sigma \in \boldsymbol{Z}$ を $\zeta^\sigma = \zeta^{m_\sigma}$ によって定める．（m_σ は $\mathrm{mod}\, |G|$ で一意的にきまる．）

(i) $\chi(x)^\sigma = \chi(x^{m_\sigma})$, $\forall x \in G$.

(ii) $x \mapsto x^{m_\sigma}$ $(x \in G)$ は $\mathfrak{G}$ の $\mathrm{Cl}(G)$ 上の置換を引き起す．

(iii) G の既約な K-指標の個数は $\mathrm{Cl}(G)$ の $\mathfrak{G}$-軌道の個数に等しい．

(iv) G の既約な $\boldsymbol{Q}$-指標の個数は互いに共役でない G の巡回部分群の個数に等しい．

9. (Burnside)　$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ が一次の指標でなければ，$\chi(x) = 0$ となる $x \in G$ が存在する．(Cauchy-Schwartz の不等式 $\frac{1}{|G|-1} \sum_{x \neq 1} |\chi(x)|^2 \geq \sqrt[|G|-1]{\prod_{x \neq 1} |\chi(x)|^2}$ において $\prod_{x \neq 1} |\chi(x)|^2 \in \boldsymbol{Z}$ であることを利用せよ．)

10. 単純群は二次の既約な $\boldsymbol{C}$-表現をもたない．

11. $G \triangleright H$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\zeta \in \mathrm{Irr}(H)$, $(\chi_H, \zeta) = e \geq 1$ とする．

(i) G/H が巡回群ならば，$e = 1$.

(ii) χ が $G - H$ 上で常に 0 となるならば，$\zeta^G = e\chi$.

(iii) G の一次の指標 λ があって $\lambda\chi = \chi$ が成り立つならば，$\chi = \theta^G$ となる $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Ker}\, \lambda)$ が存在する．

12. 前問と同じ仮定のもとで，さらに $T(\zeta) = G$ とし，α を ζ に付随する G/H の因子団とする（定理 5.8 参照）．

(i) $e^2 \leq |G:H|$.

(ii) 次の 4 条件は互いに同値である．

(1) $e^2 = |G:H|$.

(2) $\zeta^G = e\chi$.

(3) $\mathrm{Irr}(G \mid \zeta) = \{\chi\}$.

(4) $\boldsymbol{C}^{(\alpha^{-1})}[G/H]$ は単純環．

13. $G = SH \triangleright H$, $(|S|, |H|) = 1$ とする．$\boldsymbol{Y} \in \mathrm{IRR}_{\boldsymbol{C}}(H)$ に対し $T(\boldsymbol{Y}) = G$ が成り立つならば，次の 2 条件をみたす $\boldsymbol{X} \in \mathrm{IRR}_{\boldsymbol{C}}(G)$ が同値を除いて唯一つある．

(1) $\boldsymbol{X}_H = \boldsymbol{Y}$.

(2) $\det X(s) = 1$, $\forall s \in S$.

14. $G \triangleright H$ とし，K を代数的閉体とする．$\boldsymbol{Y} \in \mathrm{IRR}_K(H)$ に対し $T(\boldsymbol{Y}) = G$ と仮定する．このとき

$\boldsymbol{Y}$ が G の（線形）表現に拡張できる

$\Longleftrightarrow$ $|G|$ を割る任意の素数 p と $S_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ に対し，$\boldsymbol{Y}$ は S_pH の表現に拡張できる．

15. F が代数的閉体ならば，$M_F(G) \simeq M_{\boldsymbol{C}}(G)/M_{\boldsymbol{C}}(G)_p$.

16. R を離散付値環とし，その商体 K の標数は 0 とする．

このとき有限生成の RG-射影加群 U, V に対し $K \otimes_R U \simeq K \otimes_R V$ が成り立つならば，$U \simeq V$ である．

17. R, K は前問と同じとし，F は R の剰余体とする．もし K が G の分解体ならば，F も G の分解体である．

18. (Swan)　R はデデキント環とし，その商体 K の標数は 0 とする．さらに $|G|$ を割る任意の素数は R で正則元でないものとする．このとき V が有限生成な RG-射影加群ならば，R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$R_{\mathfrak{p}} \otimes_R V$ は $R_{\mathfrak{p}}G$-自由加群となる．これを次の方針で証明せよ．

(i) 問題 16 より，$K \otimes_R V$ が KG-自由加群であることを示せばよい（$\mathfrak{p} = 0$ の場合）．したがって χ を $K \otimes_R V$ の指標とするとき $\chi(x) = 0$　($\forall x \in G - \{1\}$) を示せばよい．

(ii)　$p \mid o(x)$ とし，p を含む R の素イデアル $\mathfrak{p}$ をとる．射影的な $R_{\mathfrak{p}}G$-加群の指標は p-非正則元の上で 0 であることから $\chi(x)=0$ をえる．

19. (Heller)　R を離散付値環，$\tilde{R}$ をその完備化とする．また $K, \tilde{K}$ をそれぞれ，$R, \tilde{R}$ の商体とする．

(i)　$S \in GL_n(\tilde{K})$ に対し，適当な $T \in GL_n(K)$ を選んで $TS \in GL_n(\tilde{R})$ とできる．((π) を R の付値イデアルとし，$\tilde{K}$ の元の π-進展開 (I, 13.20) を利用せよ.)

(ii)　A を R-多元環とし，$\boldsymbol{X}$ を A の $\tilde{R}$-表現とする．もし $\boldsymbol{X}$ が（$\tilde{K}$-表現として）K で実現されているならば，$\boldsymbol{X}$ は（$\tilde{R}$-表現として）R で実現されている．

20. (i)　定理 6.12 (ii) は R が完備でなくても成り立つ．

(ii)　$G=\langle x\rangle$ を位数 $p-1$ の巡回群とする ($p \geq 5$)．このとき G の既約な $\boldsymbol{Z}/(p)$-表現のうち，$\boldsymbol{Z}_p$-表現に持ち上げ可能なものは単位表現と $\boldsymbol{T}: G \to \boldsymbol{Z}/(p)$ ($T(x)=-1$) に限る．

21. L を代数的閉体とする．もし Char L が $|G|$ を割らなければ，G の既約な射影 L-表現の次数は $|G|$ の約数である．

IV 直既約加群

この章では p-モジュラー系 (K, R, F) について直既約な RG-加群，または FG-加群に関する Green の理論をのべる．そこで基本になるのは § 3 のヴァーテックスの概念であり，§ 4 の Green 対応はこの章の一つの主題である．関連して Burry-Carlson の最近の結果 (定理 4.6)，Green 対応と Heller 作用素や自己準同型環の関係 (定理 4.10，§ 5) についてのべる．また § 6 で正規部分群からの誘導加群の自己準同型環の構造を調べて直既約加群に関する Clifford 型の定理 (系 6.8) を示す．§ 7 の Green の直既約性定理はまたこの章の一つの主定理で，証明には I 章で準備した付値環の拡大に関する定理 13.27 が本質的である．§ 8 の Scott 加群も最近の話題の一つである．

§ 1. トレース写像

R は可換環，G は群とし，V はRG-加群とする．このときIII章，§ 1 と同様に G の部分群 H に対し，H のすべての元で固定される V の元の全体を $\mathrm{Inv}_H(V)$ と表す：

$$\mathrm{Inv}_H(V) = \{v \in V\,;\, vh = v\ (\forall h \in H)\}.$$

明らかに $H \leq K \leq G$ ならば $\mathrm{Inv}_K(V) \subset \mathrm{Inv}_H(V)$となり，特に $\mathrm{Inv}_G(V) \subset \mathrm{Inv}_H(V)$ である．

問 1.1 $G \ni x$ のとき次が成り立つ：

$$\mathrm{Inv}_{H^x}(V) = \mathrm{Inv}_H(V)x.$$

V_{RG} と $H \leq G$ に対し，$\mathrm{Inv}_H(V)$ から $\mathrm{Inv}_G(V)$ への写像

$$\mathrm{Tr}_H^G:\ \mathrm{Inv}_H(V) \longrightarrow \mathrm{Inv}_G(V)$$

を次のように定義する：

$$\text{(1.1)} \qquad \mathrm{Tr}_H^G(v) = \sum_{t \in H\backslash G} vt \qquad (v \in \mathrm{Inv}_H(V)).$$

問 1.2 (1.1) の右辺は $H\backslash G$ の完全代表系のとり方によらず定まり，また $v \in \mathrm{Inv}_H(V)$ ならば $\mathrm{Tr}_H^G(v) \in \mathrm{Inv}_G(V)$ となる．

Tr_H^G は明らかに R-線形写像で，これを**トレース写像**とよぶ．

以後記号の煩雑をさけるため，V の RH-部分加群 W に対し $\mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Inv}_H(W))$ を簡単に $\mathrm{Tr}_H^G(W)$ と表すことにする．

一般に群 G の部分群 H, K が G-共役であるとき $H =_G K$ と表す．また $H^x \leq K$ となる $x \in G$ が存在するとき $H \leq_G K$ と表し，同様に G の元 x が K のある元と G-共役であるとき $x \in_G K$ とかく．

定理 1.3 V は RG-加群とし，H，K は G の部分群とする．

(i) $H \leq K \leq G \Longrightarrow \mathrm{Tr}_H^G = \mathrm{Tr}_K^G \circ \mathrm{Tr}_H^K$.

(ii) $v \in \mathrm{Inv}_H(V)$，$x \in G \Longrightarrow \mathrm{Tr}_H^G(v) = \mathrm{Tr}_{H^x}^G(vx)$.

　したがって　$\mathrm{Tr}_H^G(V) = \mathrm{Tr}_{H^x}^G(V)$.

(iii) $H \leq_G K \Longrightarrow \mathrm{Tr}_H^G(V) \leq \mathrm{Tr}_K^G(V)$.

[**証明**] (i) $\{s_i\}$，$\{t_j\}$ をそれぞれ $H\backslash K$，$K\backslash G$ の完全代表系とするとき，$\{s_i t_j\}$ が $H\backslash G$ の完全代表系になることから明らかである．

(ii) $\{t_i\}$ が $H\backslash G$ の完全代表系ならば，$G = \sum_i Ht_i = \sum_i H^x x^{-1} t_i x = \sum_i H^x x^{-1} t_i$ であるから $\{x^{-1}t_i\}$ は $H^x\backslash G$ の完全代表系である．$\mathrm{Inv}_H(V) \ni v$ ならば $\mathrm{Inv}_{H^x}(V) \ni vx$ で

$$\mathrm{Tr}_H^G(v) = \textstyle\sum_i vt_i = \sum_i (vx)x^{-1}t_i = \mathrm{Tr}_{H^x}^G(vx)$$

となる．

(iii) (i) と (ii) より明らかである．□

また次の定理が成り立つ．

定理 1.4 V_{RG} と H，$K \leq G$ に対して

(i) (Mackey 分解) $v \in \mathrm{Inv}_H(V) \Longrightarrow \mathrm{Tr}_H^G(v) = \sum_{t \in H\backslash G/K} \mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^K(vt)$.

(ii) $\mathrm{Tr}_H^G(V) \subset \sum_{t \in H\backslash G/K} \mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^K(V)$.

[**証明**] (i) $G=\sum_i Ht_iK$, $K=\sum_j(H^{t_i}\cap K)s_{ij}$ とすれば $G=\sum_{i,j}Ht_is_{ij}$ である．$\mathrm{Inv}_H(V)\ni v$ のとき $vt_i\in\mathrm{Inv}_{H^{t_i}}(V)\subset\mathrm{Inv}_{H^{t_i}\cap K}(V)$ であるから

$$\mathrm{Tr}_H^G(V)=\sum_i(\sum_j(vt_i)s_{ij})=\sum_i\mathrm{Tr}_{H^{t_i}\cap K}^K(vt_i).$$

(ii) (i) より明らかである．□

$G\geq H$ とし W は RH-加群とする．W^G においてその部分加群 $W\otimes 1$ は W に対応 $w\longmapsto w\otimes 1$ で RH-同型である．以後この章では簡単のためこれらを同一視して

$$\underline{W^G\supset W}\qquad (w\otimes 1=w)$$

と考える．また $H\backslash G$ の完全代表系としては

<u>剰余類 H の代表元として1をとる</u>

ものとする．両側分解 $H\backslash G/K$ についても HK の代表元としては1をとる．

このとき $W\ni w$, $G\ni x$ に対し $wx=(w\otimes 1)x=w\otimes x$ となる．また $\mathrm{Inv}_H(W)\ni w$ に対し

$$\mathrm{Tr}_H^G(w)=\sum_{t\in H\backslash G}wt=\sum_{t\in H\backslash G}w\otimes t$$

で，これはIII, 1.20 の $\mathrm{Tr}(w)$ に一致し，次がえられる．

補題1.5 $G\geq H$, W_{RH} に対しトレース写像 Tr_H^G は次の同型を引きおこす：

$$\mathrm{Tr}_H^G:\ \mathrm{Inv}_H(W)\simeq\mathrm{Inv}_G(W^G)\qquad (w\longmapsto\sum_{t\in H\backslash G}w\otimes t).$$

A は R-多元環とし，群 G から A の（多元環としての）自己同型群 $\mathrm{Aut}\,A$ への準同型 $\varphi: G\longrightarrow \mathrm{Aut}\,A$ が与えられるとき，A は（R 上の）**G-多元環**であるという．このとき $a\in A$, $x\in G$ に対し，$a^{\varphi(x)}$ を普通 a^x と表す．

G-多元環 A については $H\leq G$ に対し，H-不変な A の元の全体 $\mathrm{Inv}_H(A)$ を A^H と表すことがある： $A^H=\{a\in A\,;\,a^h=a\ (\forall h\in H)\}$. このとき $\mathrm{Tr}_H^G: A^H\longrightarrow A^G$ が (1.1) と同様に定義される．

注意 誘導加群の記号と混同するおそれのあるときは A^H を従来通り $\mathrm{Inv}_H(A)$ と表す．

補題 1.6 A は R 上の G-多元環とし，H，K は G の部分群とする．このとき

(i) $a \in A^G$，$b \in A^H$ に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}_H^G(ab) = a\mathrm{Tr}_H^G(b), \qquad \mathrm{Tr}_H^G(ba) = \mathrm{Tr}_H^G(b)a.$$

特に $\mathrm{Tr}_H^G(A)$ は A^G のイデアルである．

(ii) $a \in A^H$，$b \in A^K$ に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}_H^G(a)\,\mathrm{Tr}_K^G(b) = \sum_{t \in H\backslash G/K} \mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^G(a^t b).$$

特に $$\mathrm{Tr}_H^G(A)\,\mathrm{Tr}_K^G(A) \subset \sum_{t \in H\backslash G/K} \mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^G(A).$$

［**証明**］ (i) $\mathrm{Tr}_H^G(ab) = \sum_{t \in H\backslash G} a^t b^t = a(\sum_t b^t) = a\mathrm{Tr}_H^G(b)$．2番目の等式についても同様である．

(ii) $$\mathrm{Tr}_H^G(a)\mathrm{Tr}_K^G(b) = \mathrm{Tr}_K^G(\mathrm{Tr}_H^G(a)b) = \mathrm{Tr}_K^G(\textstyle\sum_{t \in H\backslash G/K}\mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^K(a^t)b)$$
$$= \textstyle\sum_t \mathrm{Tr}_K^G(\mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^K(a^t b)) = \sum_t \mathrm{Tr}_{H^t \cap K}^G(a^t b). \quad \square$$

この章では記号を簡単にするため RG-加群 U，V に対し

$\mathrm{Hom}_R(U, V)$ を ${}_R(U, V)$，

$\mathrm{Hom}_{RG}(U, V)$ を ${}_{RG}(U, V)$，

$\mathrm{End}_{RG}(V)$ を $\mathrm{E}_{RG}(V)$

と略記することにする．

${}_R(U, V) \ni f$，$G \ni x$ に対して，III，§1.3 と同様に $f^x : U \to V$ を次のように定義する：

$$f^x(u) = f(ux^{-1})x \qquad (u \in U).$$

このとき $f^x \in {}_R(U, V)$ で，この作用で ${}_R(U, V)$ は G-加群，したがって RG-加群になり次が成り立つ：

$$\mathrm{Inv}_G({}_R(U, V)) = {}_{RG}(U, V).$$

特に $\mathrm{E}_R(V)$ は G-多元環で，$\mathrm{Inv}_G(\mathrm{E}_R(V)) = \mathrm{E}_{RG}(V)$ である．

問 1.7 U，V，W は RG-加群とし，H，K は G の部分群とする．また $f \in {}_{RK}(U, V)$，$g \in {}_{RH}(V, W)$ とするとき次が成り立つ．

(i) f が RG-準同型ならば $\mathrm{Tr}_H^G(g \circ f) = \mathrm{Tr}_H^G(g) \circ f$．

(ii) g が RG-準同型ならば $\mathrm{Tr}_K^G(g \circ f) = g \circ \mathrm{Tr}_K^G(f)$．

(iii) $\mathrm{Tr}_H^G(g)\circ\mathrm{Tr}_K^G(f) = \sum_{t\in H\backslash G/K} \mathrm{Tr}_{H^t\cap K}^G(g^t\circ f)$.

（ヒント：補題 1.6 の証明参照.）

$G \geq H$ とし，V は RG-加群，W は RH-加群とする．このとき $W \subset W^G$ と考えたから自然に

(1.2) $${}_R(V, W) \subset {}_R(V, W^G)$$

と考えることができる． Tr_H^G：${}_{RH}(V, W^G) \longrightarrow {}_{RG}(V, W^G)$ において，${}_{RH}(V, W) \ni f$ とすれば

(1.3) $$\mathrm{Tr}_H^G(f)(v) = \sum_{t\in H\backslash G} f^t(v) = \sum_{t\in H\backslash G} f(vt^{-1})\otimes t$$

となる．

また RH-加群としての直和分解

$$W^G = W \oplus (\bigoplus_{\substack{t\in H\backslash G\\ t\neq 1}} W\otimes t)$$

において W への射影を π_W：$W^G \longrightarrow W$ とすれば，π_W は RH-全準同型である．したがって

$$\pi_W{}^*: {}_R(W, V) \longrightarrow {}_R(W^G, V) \qquad (g \mapsto g\circ\pi_W)$$

は RH-単準同型で，g と $g\circ\pi_W$ を同一視して

(1.4) $${}_R(W, V) \subset {}_R(W^G, V)$$

と考えてよい．このとき ${}_R(W, V) \ni g$ に対し

(1.5) $$g(\sum_{t\in H\backslash G} w_t\otimes t) = g(w_1)$$

となり，Tr_H^G：${}_{RH}(W^G, V) \longrightarrow {}_{RG}(W^G, V)$ において ${}_{RH}(W, V) \ni g$，$W^G \ni u = \sum_{t\in H\backslash G} w_t\otimes t$ とすれば次が成り立つ：

(1.6) $$\mathrm{Tr}_H^G(g)(u) = \sum_{t\in H\backslash G} g(ut^{-1})t = \sum_{t\in H\backslash G} g(w_t)t.$$

問 1.8 上のような同一視を行うと，III，1.19 の同型写像はいずれも Tr_H^G と一致することを確かめよ．

また次の定理が成り立つ．

定理 1.9 $G \geq H$，V_{RG}，W_{RH} に対し ${}_R(V_H, W)^G$，${}_R(W, V_H)^G$ はそれぞれ ${}_R(V_H, W)\otimes_{RH}RG$，${}_R(W, V_H)\otimes_{RH}RG$ を表すものとする．このとき次の同型が成り立つ．

(i)　$\varphi : {}_R(V_H, W)^G \cong {}_R(V, W^G)$　(*RG*-同型).

ただし $f = \sum_{t \in H\backslash G} f_t \otimes t$ $(f_t \in {}_R(V, W))$ に対し

(1.7)　$$\varphi(f)(v) = \sum_t f_t(vt^{-1}) \otimes t$$

とする.

(ii)　$\psi : {}_R(W, V_H)^G \cong {}_R(W^G, V)$　(*RG*-同型).

ただし $g = \sum_{t \in H\backslash G} g_t \otimes t$ $(g_t \in {}_R(W, V))$ に対し

(1.8)　$$\psi(g)(\sum_t w_t \otimes t) = \sum_t g_t(w_t)t$$

とする.

[**証明**]　(i)　(1.7) より φ は明らかに R-単準同型である. また $G \ni x$ に対し $tx = h_t t'$ $(h_t \in H,\ t' \in H\backslash G)$ とすれば, $fx = \sum_t f_t^{h_t} \otimes t'$, $\varphi(f)^x(v) = \varphi(f)(vx^{-1})x$ であるから

$$\begin{aligned}\varphi(fx)(v) &= \sum_t f_t^{h_t}(vt'^{-1}) \otimes t' = \sum_t f_t(vt'^{-1}h_t^{-1})h_t \otimes t' \\ &= \sum_t f_t(vx^{-1}t^{-1}) \otimes tx = \varphi(f)^x(v)\end{aligned}$$

となり, φ は *RG*-準同型である. これが全射であることをみるため ${}_R(V, W^G) \ni f'$, $f'(v) = \sum_t f_t'(v) \otimes t$ とするとき, ${}_R(V, W) \ni f_t$ を $f_t(v) = f'(vt)$ と定義し, $f = \sum_t f_t \otimes t$ とおけば $\varphi(f) = f'$ となる. □

問 1.10　上の定理の (ii) を示せ.

§2.　*H*-射影加群

この章では以後特に断らない限り

<u>(K, R, F) は p-モジュラー系とし, $\mathfrak{o}$ は R または F を表す</u>

ものとする. また $\mathfrak{o}$ の極大イデアルを (π) と表す ($\mathfrak{o} = F$ のときは $(\pi) = 0$). さらに <u>$\mathfrak{o}$-加群は $\mathfrak{o}$-有限生成</u>であると仮定する. このとき $\mathfrak{o}G$-加群について Krull-Schmidt-東屋の定理が成り立つ.

$G \geq H$ とするとき, $\mathfrak{o}G$-加群 V に対し $\mathfrak{o}H$-加群 W で

$$V \mid W^G$$

をみたすものが存在するならば $V_{\mathfrak{o}G}$ は ***H*-射影加群**, あるいは ***H*-射影的**であ

るという.

定義から容易に次のことが示される.

補題 2.1 $V_{\mathfrak{o}G}$ は H-射影的とする. このとき次が成り立つ.

(i) $H \leq K \leq G$ ならば V は K-射影的である.

(ii) $G \ni x$ に対し V は H^x-射影的である.

(iii) $U_{\mathfrak{o}G}$ に対し $U \otimes_{\mathfrak{o}} V$, ${}_{\mathfrak{o}}(U, V)$, ${}_{\mathfrak{o}}(V, U)$ はすべて H-射影的である.

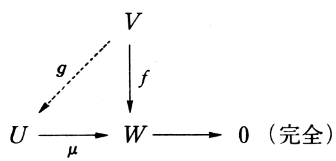
[**証 明**] $W_{\mathfrak{o}H}$ に対し $V \mid W^G$ とする.

(i) $V \mid W^G = (W^K)^G$ より明らかである.

(ii) $(W^x)_{\mathfrak{o}H^x}$ に対し $(W^x)^G \simeq W^G$ となるから明らかである.

(iii) $U \otimes_{\mathfrak{o}} V \mid U \otimes_{\mathfrak{o}} W^G$, $U \otimes_{\mathfrak{o}} W^G \simeq (U_H \otimes_{\mathfrak{o}} W)^G$ (III, 1. 15 (ii)) より $U \otimes_{\mathfrak{o}} V$ は H-射影的である. 残りについては定理1.9を用いて同様に示される. □

定 理 2.2 $G \geq H$ とするとき, $V_{\mathfrak{o}G}$ について次の条件はすべて同値である.



(1) V は H-射影的である.

(2) $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(V) \ni \theta$ で $\mathrm{Tr}_H^G(\theta) = \mathrm{id}_V$ をみたすものがある.

(3) $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V) = \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V))$.

(4) $\mathfrak{o}G$-加群の上の図の実線のような図形 (したがって f, μ は $\mathfrak{o}G$-準同型) に対し, $\mathfrak{o}H$-準同型 $g: V \to U$ で $\mu \circ g = f$ となるものがあれば, $\mathfrak{o}G$-準同型 $h: V \to U$ で $\mu \circ h = f$ となるものがある.

(5) $\mathfrak{o}G$-加群の完全系列 $U \xrightarrow{\mu} V \to 0$ が $\mathfrak{o}H$-加群の完全系列とみて分裂すれば, $\mathfrak{o}G$-加群の完全系列としても分裂する.

(6) $\mathfrak{o}G$-全準同型 $\lambda: (V_H)^G \to V$ ($\sum_t v_t \otimes t \mapsto \sum_t v_t t$) は分裂する.

(7) $V \mid (V_H)^G$.

[**証 明**] (1) ⇒ (2). $W_{\mathfrak{o}H}$ が存在して, $\mathfrak{o}G$-加群として $W^G = V \oplus U$ と直和分解するとしてよい. ここで V への射影を $\varepsilon (\in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(W^G))$ とおく. また $\mathfrak{o}H$-加群としての直和分解 $W^G = W \otimes 1 \oplus (\bigoplus_{\substack{t \in H\backslash G \\ t \neq 1}} W \otimes t)$ における $W \otimes 1$ への射影を $\tau (\in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(W^G))$ とする. このとき $\mathrm{Tr}_H^G(\tau) = \mathrm{id}_{W^G}$ となり, したがって $\varepsilon \mathrm{Tr}_H^G(\tau) \varepsilon =$

$\mathrm{Tr}_H^G(\varepsilon\tau\varepsilon) = \varepsilon\,\mathrm{id}_{W^G}\varepsilon$ となる．ここで $\theta = (\varepsilon\tau\varepsilon)\,|_V$ $(\in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(V))$ とおけば，V 上の制限を考えて $\mathrm{Tr}_H^G(\theta) = \mathrm{id}_V$ をえる．

(2) ⇔ (3)．$\mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V))$ が $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ のイデアルであることから明らかである．

(2) ⇒ (4)．(2)のような θ をとれば $\mu\circ\mathrm{Tr}_H^G(g\circ\theta) = \mathrm{Tr}_H^G(\mu\circ g\circ\theta) = \mathrm{Tr}_H^G(f\circ\theta) = f\circ\mathrm{Tr}_H^G(\theta) = f$ となるから $h = \mathrm{Tr}_H^G(g\circ\theta)$ とおけばよい．

(4) ⇒ (5)．(4)において $W = V$，$f = \mathrm{id}_V$ とおけばよい．

(5) ⇒ (6)．$\nu : V \to (V_H)^G$ $(v \mapsto v\otimes 1)$ は $\mathfrak{o}H$-準同型で，$\lambda\circ\nu = \mathrm{id}_V$ となるから $(V_H)^G \xrightarrow{\lambda} V \to 0$ は $\mathfrak{o}G$-加群の完全系列として分裂する．

(6) ⇒ (7)．明らかである．

(7) ⇒ (1)．H-射影性の定義より明らかである．□

注 意　上の定理の条件 (2) はきわめて使いやすく，**D. Higman の判定条件** とよばれることがある．

問 2.3　$V_{\mathfrak{o}G}$ が H-射影的であるとき，$\mathfrak{o}G$-加群の完全系列 $0 \to V \xrightarrow{\nu} U$ が $\mathfrak{o}H$-加群の完全系列とみて分裂すれば，$\mathfrak{o}G$-加群の完全系列としても分裂する．

（ヒント：$\mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(V) \ni \theta$, $\mathrm{Tr}_H^G(\theta) = \mathrm{id}_V$ となる θ をとり，$U \xrightarrow{\mu} V$ は $\mathfrak{o}H$-準同型で $\mu\circ\nu = \mathrm{id}_V$ とすれば $\mathrm{Tr}_H^G(\theta\circ\mu)\circ\nu = \mathrm{id}_V$ となる．）

問 2.4　$V_{\mathfrak{o}G}$ が $\mathfrak{o}$-自由ならば，V が $\mathfrak{o}G$-射影加群であることと $\{1\}$-射影的であることは同値である．

（ヒント：$(V_{\{1\}})^G$ は $\mathfrak{o}G$-自由加群である．）

定 理 2.5　$|G:H|$ が p と素ならば，任意の $\mathfrak{o}G$-加群 V は H-射影的である．特に $\mathrm{Syl}_p(G) \ni P$ のとき，V は P-射影的である．

［**証 明**］　仮定より $|G:H|$ は $\mathfrak{o}$ の単元で，$\theta = |G:H|^{-1}\,\mathrm{id}_V$ $(\in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V))$ とおけば $\mathrm{Tr}_H^G(\theta) = \mathrm{id}_V$ となる．□

注 意　$(|G|, p) = 1$ のときは，上の定理で $H = \{1\}$ として $\mathfrak{o}$-自由な任意の $\mathfrak{o}G$-加群 V は射影的になる．$\mathfrak{o}$ が体のときこれは Maschke の定理（III，1.22）に他ならない．

問 2.6　$V_{\mathfrak{o}G}$ は H-射影的とする．このとき次が成り立つ．

(i)　$\mathrm{Syl}_p(H) \ni Q$ に対し V は Q-射影的である．

(ii)　$V_{\mathfrak{o}G}$ の直和因子はまた H-射影的である．

最後に H-射影性の概念を少し拡張しよう．そのため $\mathfrak{X}$ を G の部分群のある集合とする．

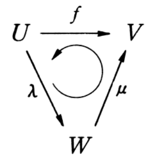
$\mathfrak{o}G$-加群 V が $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ と直和分解されて，各 V_i はある $X_i \in \mathfrak{X}$ に対し X_i-射影的であるとき V は **$\mathfrak{X}$-射影的** であるという．

問 2.7 $V_{\mathfrak{o}G}$ が $\mathfrak{X}$-射影的であるとき次が成り立つ．

(i) $V_{\mathfrak{o}G}$ の任意の直既約因子 W はある $X \in \mathfrak{X}$ に対し X-射影的である．

(ii) $V_{\mathfrak{o}G}$ の任意の直和因子はまた $\mathfrak{X}$-射影的である．

一般に $\mathfrak{o}G$-準同型 $f: U \to V$ に対し，$\mathfrak{o}G$-加群 W と $\mathfrak{o}G$-準同型 $\lambda: U \to W, \mu: W \to V$ が存在して $f=\mu\circ\lambda$ となるとき，f は **W を通して分解する** という．また $f: U \to V$ が $\mathfrak{X}$-射影加群 W を通して分解するとき，f は **$\mathfrak{X}$-射影的** であるという．



補題 2.8 上で U または V が $\mathfrak{X}$-射影的ならば，任意の $\mathfrak{o}G$-準同型 $f: U \to V$ は $\mathfrak{X}$-射影的である．

[**証明**] 上の図で $W=U, \lambda=\mathrm{id}_U, \mu=f$ または $W=V, \lambda=f, \mu=\mathrm{id}_V$ とすればよい．□

$\mathfrak{o}G$-加群 V に対し $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^{G}(V)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^{G}(V)=\sum_{X\in\mathfrak{X}}\mathrm{Tr}_{X}^{G}(V).$$

このとき次の定理が成り立つ．

定理 2.9 $\mathfrak{o}G$-加群 U, V と $\mathfrak{o}G$-準同型 $f: U \to V$ に対し，次の 2 条件は同値である．

(1) f は $\mathfrak{X}$-射影的である．

(2) $f \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^{G}({}_{\mathfrak{o}}(U, V))$.

[**証明**] (1) ⇒ (2). $\mathfrak{X}$-射影加群 W と $\mathfrak{o}G$-準同型の列 $U \xrightarrow{\lambda} W \xrightarrow{\mu} V$ があって $f=\mu\circ\lambda$ をみたすとする．また W は $W=\bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ と直和分解され，各 W_i は X_i $(\in\mathfrak{X})$-射影的であるとする．このとき $\theta_i \in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}X_i}(W_i)$ で $\mathrm{id}_{W_i}=\mathrm{Tr}_{X_i}^{G}(\theta_i)$ となる

ものがある．$\pi_i : W \to W_i$ を上の直和分解における W_i への射影とし，$\iota_i : W_i \to W$ を埋め込みとすれば，これらは $\mathfrak{o}G$-準同型であるから

$$\mathrm{id}_W = \sum_i \iota_i \circ \pi_i = \sum_i \iota_i \circ \mathrm{Tr}_{X_i}^G(\theta_i) \circ \pi_i = \sum_i \mathrm{Tr}_{X_i}^G(\iota_i \circ \theta_i \circ \pi_i)$$

となる．したがって

$$f = \mu \circ (\sum_i \mathrm{Tr}_{X_i}^G(\iota_i \circ \theta_i \circ \pi_i)) \circ \lambda = \sum_i \mathrm{Tr}_{X_i}^G(\mu \circ \iota_i \circ \theta_i \circ \pi_i \circ \lambda)$$

となり $f \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G({}_{\mathfrak{o}}(U, V))$ をえる．

(2) ⇒ (1)． $f = \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mathrm{Tr}_X^G(g_X)$, $g_X \in {}_{\mathfrak{o}X}(U, V)$ とする．このとき $W = \bigoplus_{X \in \mathfrak{X}} (V_X)^G$ とおけば W は $\mathfrak{X}$-射影的であるから，f が W を通して分解できることを示せばよい．そのため各 $X \in \mathfrak{X}$ に対し

$$\lambda_X : U \to (V_X)^G \qquad (u \mapsto \textstyle\sum_{t \in X \backslash G} g_X(ut^{-1}) \otimes t),$$
$$\mu_X : (V_X)^G \to V \qquad (\textstyle\sum_{t \in X \backslash G} v_t \otimes t \mapsto \sum_t v_t t)$$

とおく．これらはともに $\mathfrak{o}G$-準同型で $\mathrm{Tr}_X^G(g_X) = \mu_X \circ \lambda_X$ となる．よって

$$\lambda = \textstyle\sum_X \lambda_X : U \to W \qquad (u \mapsto \sum_X \lambda_X(u)),$$
$$\mu = \textstyle\bigoplus_X \mu_X : W \to V \qquad (\sum_X w_X \mapsto \sum_X \mu_X(w_X)) \qquad (\text{ただし } w_X \in (V_X)^G)$$

とおけば $\mu \circ \lambda = \sum_X \mu_X \circ \lambda_X = \sum_X \mathrm{Tr}_X^G(g_X) = f$ となる．□

定理 2.10 $V_{\mathfrak{o}G}$ について次の 2 条件は同値である．

(1) V は $\mathfrak{X}$-射影的である．

(2) $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V))$.

[**証明**] (1) ⇒ (2)． 補題 2.8 により任意の $f \in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ は $\mathfrak{X}$-射影的であるから明らかである．

(2) ⇒ (1)． $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V)) \ni \mathrm{id}_V$ であるから，定理 2.9 により $\mathfrak{X}$-射影加群 W と $\mathfrak{o}G$-準同型の列 $V \xrightarrow{\lambda} W \xrightarrow{\mu} V$ があって $\mathrm{id}_V = \mu \circ \lambda$ となる．このとき $W = \lambda(V) \oplus \mathrm{Ker}\,\mu$, $\lambda(V) \simeq V$ となり，$V \mid W$ であるから V は $\mathfrak{X}$-射影的である．□

§3. ヴァーテックスとソース

$\mathfrak{o}$ は前節と同じとし，また $\mathfrak{o}G$-加群はすべて $\mathfrak{o}$-有限生成と仮定する．さらにこの節では簡単のため <u>同型な加群は同一視する</u> こととし，直既約な $\mathfrak{o}G$-加群

の全体を $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ と表す．

補題3.1 $G \geq H$ とするとき次が成り立つ．

(i) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$ と $\mathfrak{o}H$-加群 M に対し $V \mid M^G$ ならば，$M_{\mathfrak{o}H}$の直既約因子 W で $V \mid W^G$ となるものが存在する．

(ii) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ と $\mathfrak{o}G$-加群 L に対し $W \mid L_H$ ならば，$L_{\mathfrak{o}G}$の直既約因子 V で $W \mid V_H$ となるものが存在する．

[証明] (i) $M = \oplus_i W_i$ を直既約分解とすれば，V は $M^G = \oplus_i W_i{}^G$ の直既約因子であるから，ある i に対し $V \mid W_i{}^G$ となる．

(ii) $L = \oplus_i V_i$ を直既約分解とすれば，W は $L_H = \oplus_i (V_i)_H$ の直既約因子であるから，ある i に対し $W \mid (V_i)_H$ となる．□

補題3.2 H, P は G の部分群とし，S は $\mathfrak{o}P$-加群とする．

(i) W が $(S^G)_H$ の直既約因子ならば，ある $t \in G$ に対して $W \mid ((S^t)_{P^t \cap H})^H$ となる．特に W は $P^t \cap H$-射影的である．

(ii) V は S^G の直既約因子で H-射影的とする．このときある $t \in G$ に対して $V \mid ((S^t)_{P^t \cap H})^G$ となり，V は $P^t \cap H$-射影的である．

[証明] (i) $(S^G)_H = \oplus_{t \in P \backslash G / H} ((S^t)_{P^t \cap H})^H$ より明らかである．

(ii) $V \mid (V_H)^G, (V_H)^G \mid ((S^G)_H)^G = \oplus_t ((S^t)_{P^t \cap H})^G$ より明らかである．□

上の補題から次の定理がえられる．

定理3.3 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$ に対し，次の2条件をみたす G の p-部分群 P が G-共役を度外視して一意的に定まる．

(a) V は P-射影的である．

(b) V がH-射影的ならば $P \leq_G H$ となる．

[証明] V が H-射影的となるような G の部分群 H のうち，位数が最小なものを一つとってそれを P とする．このとき $S_{\mathfrak{o}P}$ で $V \mid S^G$ となるものがある．V が H-射影的ならば，上の補題より ある $t \in G$ に対し V は $P^t \cap H$-射影的で，$|P|$の最小性より $P^t = P^t \cap H \leq H$，すなわち $P \leq_G H$ となる．

特に $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とすれば，V は Q-射影的であるから $P \leq_G Q$ となり，P は p-

部分群である．また P' が (a), (b) をみたせば，$P \leq_G P'$, $P' \leq_G P$ となって $P' =_G P$ をえる．□

上の定理の条件をみたす p-部分群 P を $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ の**ヴァーテックス** (vertex) とよび，その一つを $\mathrm{vx}(V)$ と表すことにする．このとき明らかに次が成り立つ：

$$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V \text{ が } H\text{-射影的} \iff \mathrm{vx}(V) \leq_G H.$$

補題 3.4　$G \geq H$ とするとき $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ に対して次が成り立つ．

(i)　$V \mid W^G \implies \mathrm{vx}(V) \leq_G \mathrm{vx}(W)$.

(ii)　$W \mid V_H \implies \mathrm{vx}(W) \leq_G \mathrm{vx}(V)$.

［**証明**］　$\mathrm{vx}(V) = P$, $\mathrm{vx}(W) = Q$ とすれば $S_{\mathfrak{o}P}$, $T_{\mathfrak{o}Q}$ があって $V \mid S^G$, $W \mid T^H$ となる．

(i)　$V \mid W^G \mid (T^H)^G = T^G$ であるから V は Q-射影的で，したがって $P \leq_G Q$ となる．

(ii)　$W \mid V_H \mid (S^G)_H$ であるから，補題 3.2 (i) より W はある $t \in G$ に対して $P^t \cap H$-射影的である．よって $Q \leq_H P^t \cap H \leq_G P$ となる．□

補題 3.5　$G \geq H$ とするとき次が成り立つ．

(i)　$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ に対し次の 3 条件をみたす $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ がある：

(a)　$V \mid W^G$　,　(b)　$W \mid V_H$　,　(c)　$\mathrm{vx}(W) =_G \mathrm{vx}(V)$,

(ii)　$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$ が H-射影的ならば，上の 3 条件をみたす $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ がある．

［**証明**］　(i)　$W \mid (W^G)_H$ であるから，補題 3.1 (ii) より (a), (b) をみたす $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ がある．このとき (c) が成り立つ．

(ii)　$V \mid (V_H)^G$ であるから，補題 3.1 (i) より (a), (b) をみたす $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ があり，このとき (c) が成り立つ．□

定理 3.6　$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = P$ とするとき次が成り立つ．

(i) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}P) \ni S$ で次の条件をみたすものがある：

$$\text{(a)}\quad V \mid S^G, \qquad \text{(b)}\quad S \mid V_P, \qquad \text{(c)}\quad \mathrm{vx}(S) = P.$$

(ii) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}P) \ni T$ が $V \mid T^G$ をみたせば，$t \in N_G(P)$ で $T^t = S$ となるものがある．またこのとき $T \mid V_P$, $\mathrm{vx}(T) = P$ となる．

[**証明**] (i) 補題3.5(ii)より明らかである．

(ii) $S \mid V_P \mid (T^G)_P$ であるから，補題3.2(i)よりある $t \in G$ に対して $S \mid ((T^t)_{P^t \cap P})^P$ となるが，$\mathrm{vx}(S) = P$ であるから $P^t = P$, $t \in N_G(P)$ となる．このとき $S \mid T^t$ で，$(T^t)_{\mathfrak{o}P}$ は直既約であるから $S = T^t$ をえる．よって $T = S^{t^{-1}} \mid (V^{t^{-1}})_P = V_P$ となる．$\mathrm{vx}(T) = P$ は仮定より明らかである． □

$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = P$ であるとき，上の定理の (i) の条件をみたす $S \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}P)$ を V の**ソース** (source) とよぶ．V のヴァーテックス P をきめると，V のソースとなる直既約 $\mathfrak{o}P$-加群は上の定理の (ii) より $N_G(P)$-共役を度外視して一意的にきまる．また V のヴァーテックスの G-共役性より，一般に V のソースは G-共役を度外視して一意的に定まる．

$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$ のソースの一つを $\mathrm{s}(V)$ と表す．

問3.7 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = P$ とし，$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}P) \ni S$ は V のソースとする．また $G \geq H$ とし，$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$, $\mathrm{vx}(W) = P'$, $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}P') \ni S'$ は W のソースとする．このとき次が成り立つ．

(i) $W \mid V_H$ ならば $a \in G$ で $P' \leq P^a$, $S' \mid (S^a)_{P'}$ をみたすものがある．

(ii) $V \mid W^G$ ならば $b \in G$ で $P \leq P'^b$, $S \mid (S'^b)_P$ をみたすものがある．

(ヒント：(i) $S' \mid (S^G)_{P'}$ を用いよ．(ii) $S \mid (S'^G)_P$ を用いよ．)

次の補題は次節で必要になる．

補題3.8 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = P$, $P \leq H \leq G$ とする．このとき次の3条件のうちどの2条件に対しても，それらをみたす $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ が存在する．

$$\text{(a)}\quad V \mid W^G, \qquad \text{(b)}\quad W \mid V_H, \qquad \text{(c)}\quad \mathrm{vx}(W) =_H P.$$

[**証明**] (a),(b) をみたす W の存在は補題3.5(ii) で示した．

$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}P) \ni S$ を V のソースとする．このとき $V \mid S^G$, $S \mid V_P$ となる．

(a), (c) をみたす W の存在：$V \mid S^G = (S^H)^G$ であるから $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ で $V \mid W^G$, $W \mid S^H$ をみたすものがある．このとき

$$\mathrm{vx}(V) = P \le_G \mathrm{vx}(W) \le_H \mathrm{vx}(S) = P.$$

したがって位数を考えて $\mathrm{vx}(W) =_H P$ をえる．

(b), (c) をみたす W の存在：$S \mid V_P = (V_H)_P$ であるから $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ で $S \mid W_P$, $W \mid V_H$ となるものがある．このとき

$$\mathrm{vx}(S) = P \le_H \mathrm{vx}(W) \le_G \mathrm{vx}(V) = P.$$

よって位数を考えて $P =_H \mathrm{vx}(W)$ をえる． □

注 意 上の補題の条件 (c) で $\mathrm{vx}(W)$ が P に H-共役であることが肝要である (補題 3.5 (ii) 参照)．なお次節でのべる Green 対応を用いて，実は補題の 3 条件をすべてみたす W の存在が示される (系 4.9)．

問 3.9 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = P \le H \le G$ とする．また部分群の集合 $\{P^x ; P^x \le H, x \in G\}$ を H-共役で類別したときの完全代表系を Ω とする．このとき V_H は少なくとも $|\Omega|$ 個の非同型な直既約成分をもつ．

(ヒント：$\Omega \ni P^x$ のとき補題 3.8 で $\mathrm{vx}(V) = P^x$ とおいて (b), (c) をみたす W の存在を用いよ．)

§4. Green 対応

$\mathfrak{X}$ は G の部分群のある集合とする．$G \ge H$ に対し $H^x \in \mathfrak{X}$ となる $x \in G$ が存在するとき $H \in_G \mathfrak{X}$ と表す．

また $\mathfrak{o}G$-加群 V が $V = U \oplus L$ と二つの $\mathfrak{o}G$-部分加群の直加に分解され，L が $\mathfrak{X}$-射影的であるとき

$$V \equiv U \oplus O(\mathfrak{X})$$

と表す．特に V 自身 $\mathfrak{X}$-射影的であるときは $V \equiv O(\mathfrak{X})$ とかく．

直既約な $\mathfrak{o}G$-加群 V で $\mathrm{vx}(V) \in_G \mathfrak{X}$ となるものの全体を $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G \mid \mathfrak{X})$ とかく：

$$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{X}) = \{V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)\,;\,\mathrm{vx}(V) \in_G \mathfrak{X}\}.$$

特に $\mathfrak{X} = \{H\}$ のときは $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,H) = \{V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)\,;\,\mathrm{vx}(V) =_G H\}$ とする．

$G \geq H \geq P$ のとき，次のような H の部分群の集合を考える．

(4.1)
$$\begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}(G,P,H) = \{Q\,;\ \ \text{ある } x \in G-H \text{ に対し } Q \leq P^x \cap P\}, \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(G,P,H) = \{Q\,;\ \ \text{ある } x \in G-H \text{ に対し } Q \leq P^x \cap H\}, \\ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G,P,H) = \{Q\,;\ \ Q \leq P, Q \notin_G \mathfrak{X}\}. \end{cases}$$

このとき明らかに $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ である．

この節では P, H として主に次の条件をみたすものを考える：

(4.2) $\underline{P \text{ は } p\text{-部分群で，} N_G(P) \leq H}$.

このとき $x \notin H$ ならば $P^x \neq P$ であるから，$\mathfrak{X} \ni Q$ ならば Q は P の真部分群である．特に $P \in \mathfrak{A}$ である．

補題 4.1 P, H は (4.2) をみたすとする．このとき

(i) $\mathfrak{A} \ni Q, Q'$ に対し

$$Q =_G Q' \iff Q =_H Q'.$$

(ii) $Q \leq P$ のとき次の 4 条件は同値である：

(1) $Q \in_G \mathfrak{X}$, (2) $Q \in \mathfrak{X}$, (3) $Q \in \mathfrak{Y}$, (4) $Q \in_H \mathfrak{Y}$.

したがって $Q \in \mathfrak{A}$ ならば $Q \notin_H \mathfrak{Y}$ である．

[**証明**] (i) ($\Leftarrow$) は明らかである．

($\Rightarrow$) $Q' = Q^x$ ($x \in G$) とするとき，$x \notin H$ ならば $Q' \leq P \cap P^x$，したがって $Q' \in \mathfrak{X}$ となり矛盾である．よって $x \in H$ である．

(ii) (1) $\Rightarrow$ (2). $Q \in_G \mathfrak{X}$ とすれば，$t \in G$, $x \in G-H$ が存在して $Q^t \leq P^x \cap P$ となる．このとき $Q \leq P^{xt^{-1}} \cap P^{t^{-1}} \cap P$ となるが，$t^{-1} \notin H$ または $xt^{-1} \notin H$ のいずれかが成り立つから $Q \in \mathfrak{X}$ である．

(2) $\Rightarrow$ (3)，(3) $\Rightarrow$ (4) は明らかである．

(4) $\Rightarrow$ (1). $Q \in_H \mathfrak{Y}$ とすれば，$h \in H$ と $x \in G-H$ が存在して $Q^h \leq P^x \cap H$ となる．このとき $Q \leq P^{xh^{-1}} \cap H^{h^{-1}} \cap P$ となるが，$xh^{-1} \notin H$ より $Q \in \mathfrak{X}$ であ

る. □

Green 対応に関する定理を示すため次の補題を準備しておく.

補題4.2 （i） $G \geq H \geq P$ で $\mathfrak{o}H$-加群 W が P-射影的ならば

$$(W^G)_H \equiv W \oplus O(\mathfrak{Y}).$$

（ii） P, H が (4.2) をみたすとき次が成り立つ.

(a) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H \mid \mathfrak{A}) \ni W$ ならば, W は $(W^G)_H$ の直既約因子のうちヴァーテックスが $\mathfrak{A}$ に属する唯一つのものである.

(b) $\mathfrak{o}G$-加群 V が P-射影的ならば

$$V \equiv O(\mathfrak{X}) \iff V_H \equiv O(\mathfrak{Y}).$$

［**証明**］ （i） 仮定により $M_{\mathfrak{o}P}$ で $W \mid M^H$ となるものがある. $M^H = W \oplus W_1$ とし, また $(W^G)_H = W \oplus W'$, $(W_1{}^G)_H = W_1 \oplus W_1{}'$ とすれば

$$(M^G)_H = (W^G)_H \oplus (W_1{}^G)_H \tag{4.3}$$
$$= M^H \oplus W' \oplus W_1{}'$$

となる. 一方 Mackey の定理より

$$(M^G)_H = M^H \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{t \in P\backslash G/H \\ t \notin H}} (M^t{}_{P^t \cap H})^H\Big) \tag{4.4}$$

となる. よって $W' = \oplus_i X_i$ を直既約分解とすれば, (4.3) と (4.4) を比較して各 X_i に対し $t \notin H$ で $X_i \mid (M^t{}_{P^t \cap H})^H$ となるものがあり, $\mathrm{vx}(X_i) \in_H \mathfrak{Y}$, したがって $W' \equiv O(\mathfrak{Y})$ をえる.

（ii） (a) $(W^G)_H = W \oplus (\oplus_i X_i)$ を直既約分解とすれば, 上で示したように $\mathrm{vx}(X_i) \in_H \mathfrak{Y}$ である. いまある X_i に対し $\mathrm{vx}(X_i) \in_H \mathfrak{A}$ と仮定する. このとき $\mathrm{vx}(X_i) \in \mathfrak{A}$, したがって $\mathrm{vx}(X_i) \leq P$ としてよい. そのとき $\mathrm{vx}(X_i) \notin \mathfrak{X}$ であるから, 補題4.1 (ii) より $\mathrm{vx}(X_i) \notin_H \mathfrak{Y}$ となり矛盾である.

(b) $V_{\mathfrak{o}G}$ は直既約と仮定してよい. また $\mathrm{vx}(V) = Q \leq P$ としてよい.

(⇒): 仮定より $Q \in_G \mathfrak{X}$ である. 補題3.8より $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ で $V \mid W^G$, $\mathrm{vx}(W) =_H Q$ となるものがある. このとき $V_H \mid (W^G)_H \equiv W \oplus O(\mathfrak{Y})$ となるが, $\mathrm{vx}(W) \in_H \mathfrak{Y}$ より $V_H \equiv O(\mathfrak{Y})$ をえる.

(⇐): 補題3.8より $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ で $W \mid V_H$, $\mathrm{vx}(W) =_H Q$ となるものがあるが, 仮定により $Q \in_H \mathfrak{Y}$, したがって $Q \in_G \mathfrak{X}$ となり $V \equiv O(\mathfrak{X})$ をえる. □

さて次がこの節の主定理である.

定理 4.3 (Green) P, H は (4.2) をみたすとする. すなわち P は G の p-部分群で $N_G(P) \leq H$ と仮定する. このとき

(i) 全単射 $f: \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \to \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A})$ で次をみたすものが存在する.

(a) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \ni V \implies V_H \equiv fV \oplus O(\mathfrak{Y})$.

(b) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A}) \ni W \implies W^G \equiv f^{-1}W \oplus O(\mathfrak{X})$.

(c) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) \in \mathfrak{A} \implies \mathrm{vx}(fV) =_H \mathrm{vx}(V)$.

(ii) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \ni V$, $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A}) \ni W$ に対し

$$W = fV \iff W \mid V_H \iff V \mid W^G.$$

[**証明**] (i) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \ni V$, $\mathrm{vx}(V) = Q \in \mathfrak{A}$ とする. このとき $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ で $V \mid W^G$, $\mathrm{vx}(W) =_H Q$, したがって $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A})$ となるものがある. $V_H \mid (W^G)_H \equiv W \oplus O(\mathfrak{Y})$ であるが, W が V_H の直既約因子でなければ $V_H \equiv O(\mathfrak{Y})$, したがって $V \equiv O(\mathfrak{X})$ となり矛盾である. よって $V_H \equiv W \oplus O(\mathfrak{Y})$ となる. $fV = W$ とおけば写像 $f: \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A}) \to \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A})$ がえられ (a) と (c) が成り立つ.

また $V \mid W^G = (fV)^G$ であるが, $W^G = V \oplus U$ とおけば $(W^G)_H = V_H \oplus U_H \equiv W \oplus U_H \oplus O(\mathfrak{Y})$ となる. 一方 W は P-射影的であるから補題 4.2 より $(W^G)_H \equiv W \oplus O(\mathfrak{Y})$ となる. よって $U_H \equiv O(\mathfrak{Y})$ をえるが, U は P-射影的であるから $U \equiv O(\mathfrak{X})$ となる. これより f は単射で (b) も成り立つ.

次に f が全射であることをみるため $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A}) \ni W$ を任意にとれば, $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$ で $V \mid W^G$, $W \mid V_H$, $\mathrm{vx}(V) =_G \mathrm{vx}(W)$ となるものがある. このとき $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A})$ となり, したがって $V_H \equiv fV \oplus O(\mathfrak{Y})$ となるから $fV = W$ である.

(ii) fV は V_H の直既約因子のうち $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,\mathfrak{A})$ に属する唯一つのものであり, また $f^{-1}W$ は W^G の直既約因子のうち $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,\mathfrak{A})$ に属する唯一つのものであることから明らかである. □

上の定理の全単射を (4.2) をみたす (G, P, H) に関する **Green 対応** とよび,

これを $f(G,P,H)$ または簡単に f と表す．

Green 対応の性質 (c) から特に次の定理が成り立つ．

定理 4.4　(4.2) をみたす P，H に対して，Green 対応 f は $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,P)$ から $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,P)$ への全単射を引き起す．

問 4.5　P，H は (4.2) をみたすとし，f はGreen 対応，また $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G\,|\,P) \ni V$ とする．このとき

(i)　V のソース $\mathrm{s}(V)_{\mathfrak{o}P}$ は fV のソースでもある．

(ヒント：問 3.7 参照.)

(ii)　V は $\mathfrak{o}$-自由とし，$\hat{V}_{\mathfrak{o}G}$ をその反傾加群とするとき次が成り立つ．

$$\text{(a)}\quad \mathrm{vx}(V) =_G \mathrm{vx}(\hat{V}), \qquad \text{(b)}\quad \widehat{fV} \simeq f\hat{V}.$$

(ヒント：III，1.15(i) と $\widehat{fV}\,|\,\hat{V}_H$ を用いよ.)

Green 対応について次の最近の結果は注目に値する．

定理 4.6　(Burry-Carlson[1])　G の部分群 P，H は (4.2) をみたすとし，f は $(G,\ P,\ H)$ に関する Green 対応とする．また $\mathrm{IND}\,(\mathfrak{o}G) \ni V$，$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni W$ とするとき次が成り立つ．

(i)　$W\,|\,V_H$，$\mathrm{vx}(W) =_H P \Longrightarrow \mathrm{vx}(V) =_G P$　かつ　$fV = W$．

(ii)　$\mathrm{vx}(V) =_G P \Longleftrightarrow V_H$ はヴァーテックスが P の直既約因子をもつ．

[**証明**]　(i)　仮定により $\mathrm{vx}(W) =_H P \leq_G \mathrm{vx}(V)$ であるから，V が P-射影的であること，すなわち $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V) = \mathrm{Tr}_P^G(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V))$ となることを示せばよい．

$V_H = W \oplus W'$ とし $\pi_W' : V \to W$ を W への射影，$\iota_W : W \to V$ を埋め込みとし $\pi_W = \iota_W \circ \pi_W'$ $(\in \mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(V))$ とおく．このとき W は P-射影的であるから ${}_{\mathfrak{o}H}(V_H, W) = \mathrm{Tr}_P^H({}_{\mathfrak{o}}(V, W))$ となり，${}_{\mathfrak{o}P}(V, W) \ni \sigma'$ で $\mathrm{Tr}_P^H(\sigma') = \pi_W'$ となるものがある．よって $\sigma = \iota_W \circ \sigma'$ とおけば $\mathrm{Tr}_P^H(\sigma) = \pi_W$ となる．ここで $\rho = \mathrm{Tr}_P^G(\sigma)$ とおけば，定理 1.4 (i) より

$$(4.5)\qquad \rho = \sum_{t \in P\backslash G/H} \mathrm{Tr}_{P^t \cap H}^H(\sigma^t) = \mathrm{Tr}_P^H(\sigma) + \theta$$
$$= \pi_W + \theta \qquad (\theta \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{Y}}^H(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V)))$$

となる (ただし $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(G, P, H)$)．ここで $\mathrm{vx}(W) =_H P \notin_H \mathfrak{Y}$ より $\pi_W \notin \mathrm{Tr}_{\mathfrak{Y}}^H$

$(\mathrm{E}_0(V))$ となる．実際 $\pi_W \in \mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{Y}}(\mathrm{E}_0(V))$ とすれば $\mathrm{id}_W = \pi_W' \circ \pi_W \circ \iota_W \in \mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{Y}}(\pi_W' \circ \mathrm{E}_0(V) \circ \iota_W) \subset \mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{Y}}(\mathrm{E}_0(W))$ となるから，W は $\mathfrak{Y}$-射影的となって矛盾である．

さて $I = \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V) \cap \mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{Y}}(\mathrm{E}_0(V))$ とおけば，これは $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ のイデアルで自然な単準同型

$$\varphi: \ \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)/I \longrightarrow \mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(V)/\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{Y}}(\mathrm{E}_0(V))$$

がえられる．上の左辺を $\bar{\mathrm{E}}_G$，右辺を $\bar{\mathrm{E}}_H$ とおけば，(4.5) より $\varphi(\bar{\rho}) = \overline{\pi_W} \neq 0$ でこれは $\bar{\mathrm{E}}_H$ のべき等元である．したがって $\bar{\rho}$ は $\bar{\mathrm{E}}_G$ のべき等元で，$\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ は局所環であるから $\rho = \mathrm{Tr}^G_P(\sigma)$ はその正則元である．よって $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V) = \mathrm{Tr}^G_P(\mathrm{E}_0(V))$ をえる．

(ii) ($\Leftarrow$) は (i) より明らかである．また ($\Rightarrow$) は fV が条件をみたすから明らかである． □

$\mathfrak{o}G$-加群 V に対し $V = \bigoplus_{i=1}^r m_i V_i$ $(m_i \in \boldsymbol{N})$ はその直既約分解とし，$V_1, \cdots, V_r$ が互いに非同型であるとき

$$\mathrm{Comp}(V) = \{V_1, \ \cdots, \ V_r\}$$

とかいて，これを V の直既約因子の集合という．また上の m_i を直既約因子 V_i の V における**重複度**とよぶ．さらに G の p-部分群 P に対し

$$\mathrm{Comp}(V \mid P) = \{V_i \ ; \ \mathrm{vx}(V_i) =_G P\}$$

とおく．

加群とその制限，あるいは誘導加群の直既約因子の間には，Green 対応を通して次のような関係がある．

定理 4.7 (Burry[3]) $G \geq H \geq P$ とし P は p-部分群とする．このとき次が成り立つ．

(i) $\mathfrak{o}G$-加群 V に対し Green 対応 $f_H = f(H, \ P, \ N_H(P))$ は重複度を保つような次の全単射を引き起す：

$$f_H: \ \mathrm{Comp}(V_H \mid P) \longrightarrow \mathrm{Comp}(V_{N_H(P)} \mid P).$$

(ii) $\mathfrak{o}H$-加群 W に対し $f_G = f(G, P, N_G(P))$ は重複度を保つような次の全単射を引き起す：

$$(4.6)\quad f_G:\quad \mathrm{Comp}(W^G\,|\,P) \longrightarrow \mathrm{Comp}\Big(\bigoplus_{\substack{t\in H\backslash G/N_G(P),\\ P\le H^t}} (W^t{}_{N_{H^t}(P)})^{N_G(P)}\,\Big|\,P\Big).$$

(iii) $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,P)$ ならば，(4.6) の右辺は $\mathrm{Comp}((W_{N_H(P)})^{N_G(P)}\,|\,P)$ としてよい．

［**証明**］（i） $V_H = \bigoplus_{i=1}^r m_i W_i$ を直既約分解とし，P をヴァーテックスにもつ直既約因子を $W_1, \cdots, W_s$ とする．このとき $1 \le i \le s$ に対し $(W_i)_{N_H(P)}$ は P をヴァーテックスにもつ直既約因子を（重複度 1 で）唯一つもち，それは $f_H W_i$ に一致する．一方 $s < j \le r$ ならば，定理 4.6 より $(W_j)_{N_H(P)}$ には P をヴァーテックスにもつ直既約因子はない．よって (i) の主張が成り立つ．

（ii） (i) において $V = W^G$, $H = G$ とおいて f_G は重複度を保つ全単射

$$f_G:\quad \mathrm{Comp}(W^G\,|\,P) \longrightarrow \mathrm{Comp}((W^G)_{N_G(P)}\,|\,P)$$

を引き起す．ここで

$$(W^G)_{N_G(P)} = \bigoplus_{t\in H\backslash G/N_G(P)} (W^t{}_{H^t\cap N_G(P)})^{N_G(P)}$$

であるから，$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}N_G(P)\,|\,P) \ni U$, $U\,|\,(W^t{}_{H^t\cap N_G(P)})^{N_G(P)}$ ならば $P \le H^t$ となることを示せばよい．実際 U が上をみたせば $\mathrm{vx}(U) = P \le_{N_G(P)} H^t \cap N_G(P)$ となるから $P \le H^t$ である．

(iii) $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H\,|\,P) \ni W$ とし，$(W^t{}_{N_{H^t}(P)})^{N_G(P)}$ の直既約因子 U でヴァーテックス P をもつものがあるとする．このとき $W^t{}_{N_{H^t}(P)}$ の直既約因子 M で $U\,|\,M^{N_G(P)}$ となるものがあり，$\mathrm{vx}(W^t) = P^t$ であるから

$$\mathrm{vx}(U) = P \le_{N_G(P)} \mathrm{vx}(M) \le_{H^t} \mathrm{vx}(W^t) = P^t$$

となる．よって $H^t \ni h^t$ があって　$P^{ht} = P^t$, $t^{-1}h \in N_G(P)$, $t \in HN_G(P)$　となる．したがって (4.6) の右辺において P をヴァーテックスにもつ直既約因子は $(W_{N_H(P)})^{N_G(P)}$ のみに現れる． □

一般に群 G の p-部分群 $P(\neq 1)$ の正規化群 $N_G(P)$ を G の **p-局所部分群**とよぶ．有限群論ではしばしば問題を p-局所部分群の場合に帰着させることが重要な手段になる．上の定理 4.7 や次の定理は，加群の制限，誘導加群の直既約因子に関するある種の問題を，Green 対応を通して p-局所部分群の問題に帰着させる定理とみることができる．

定理 4.8 (Burry[1]) $G \geq H \geq P$ で P は p-部分群とする．また Green 対応 $f(G, P, N_G(P))$，$f(H, P, N_H(P))$ をそれぞれ f_G，f_H と表す．このとき $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G \mid P) \ni V$，$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H \mid P) \ni W$ に対し次が成り立つ．

(i) $W \mid V_H \iff f_H W \mid (f_G V)_{N_H(P)}$.

(ii) $V \mid W^G \iff f_G V \mid (f_H W)^{N_G(P)}$.

［**証明**］ $N_G(P)$，$N_H(P)$ をそれぞれ N_G，N_H と略記することにする．

(i) ($\Rightarrow$) $f_H W \mid W_{N_H} \mid V_{N_H} = (V_{N_G})_{N_H}$．ここで $V_{N_G} = f_G V \oplus (\oplus_i Y_i)$ と直既約分解され，$\mathrm{vx}(Y_i) \leq_{N_G} P^{x_i} \cap N_G$ ($x_i \notin N_G$) となる．いまある i に対し $f_H W \mid (Y_i)_{N_H}$ と仮定すれば，$\mathrm{vx}(f_H W) = P \leq_{N_G} \mathrm{vx}(Y_i) \leq_{N_G} P^{x_i}$，したがって $P = P^{x_i}$，$x_i \in N_G$ となって矛盾である．よって $f_H W \mid (f_G V)_{N_H}$ である．

($\Leftarrow$) $f_H W \mid (f_G V)_{N_H} \mid (V_{N_G})_{N_H} = V_{N_H} = (V_H)_{N_H}$．したがって $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}H) \ni U$ で $U \mid V_H$，$f_H W \mid U_{N_H}$ となるものがあるが，このとき定理 4．6 より $U = f_H^{-1}(f_H W) = W$ となり $W \mid V_H$ をえる．

(ii) ($\Rightarrow$) $V \mid W^G \mid (f_H W)^G = ((f_H W)^{N_G})^G$．したがって $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}N_G) \ni M$ で $M \mid (f_H W)^{N_G}$，$V \mid M^G$ となるものがある．このとき $\mathrm{vx}(V) =_G P \leq_G \mathrm{vx}(M) \leq_{N_G} \mathrm{vx}(f_H W) = P$ となるから，位数をみて $\mathrm{vx}(M) =_{N_G} P$ となり定理 4.3 (ii) より $M = f_G V$ をえる．

($\Leftarrow$) $V \mid (f_G V)^G \mid (f_H W)^G = ((f_H W)^H)^G$．ここで $(f_H W)^H = W \oplus (\oplus_i U_i)$ と直既約分解され，$\mathrm{vx}(U_i) \leq_H P^{h_i} \cap P$ ($h_i \in H - N_H$) となり $|\mathrm{vx}(U_i)| < |P|$ である．いまある i に対し $V \mid U_i^G$ と仮定すれば，$\mathrm{vx}(V) =_G P \leq_G \mathrm{vx}(U_i)$ となり矛盾である．よって $V \mid W^G$ をえる．□

定理 4.8 の応用として，例えば次が成り立つ．

系 4.9 補題 3．8 において 3 条件 (a)，(b)，(c) をすべてみたす $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ が存在する．

［**証明**］ 定理 4.8 の記号を用いて，$f_G V$ に対し $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}N_H) \ni U$ で $f_G V \mid U^{N_G}$，$U \mid (f_G V)_{N_H}$，$\mathrm{vx}(U) =_{N_G} \mathrm{vx}(f_G V) =_{N_G} P$ をみたすものがある (補題 3.5 (ii))．このとき $\mathrm{vx}(U) = P$ となり $W = f_H^{-1} U$ ($\in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H \mid P)$) とおけば $\mathrm{vx}(W) =_H P$ で，また定理 4.8 より $V \mid W^G$，$W \mid V_H$ となる．□

最後に $\mathfrak{o}=F$ のとき，Green 対応と Heller 作用素に関する次の定理を示す．

定理 4.10 G の部分群 P，H は (4.2) をみたすとし，f：$\mathrm{IND}(FG\,|\,\mathfrak{A})\longrightarrow \mathrm{IND}(FH\,|\,\mathfrak{A})$ はGreen 対応とする．このとき $\mathrm{IND}(FG)\ni V$ に対し次が成り立つ．

(i) $\mathrm{vx}(V)=_G \mathrm{vx}(\Omega(V))$.

(ii) $\mathrm{vx}(V)\in\mathfrak{A} \implies \Omega(fV)\simeq f\Omega(V)$.

(ただし $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(G,P,H)$ は (4.1) で定義した部分群の集合である．)

[**証明**] V が射影的でないとき示せばよい．このときII，8.26 (iii) より $\Omega(V)$ も直既約である．以下 $\mathrm{vx}(V)=Q$ とおく．

(i) FQ-加群 W で $V\,|\,W^G$ となるものがあり，このとき $\Omega(V)\,|\,\Omega(W^G)$ となる．また FG は左 FH-自由加群であるから，完全系列 $0\longrightarrow\Omega(W)\longrightarrow P(W)\longrightarrow W\longrightarrow 0$ から完全系列 $0\longrightarrow\Omega(W)^G\longrightarrow P(W)^G\longrightarrow W^G\longrightarrow 0$ がえられる．ここで $P(W)$ の射影性から $P(W)^G$ は射影的で，したがって I，10.18 より $\Omega(W^G)\,|\,\Omega(W)^G$ となる．よって $\Omega(V)\,|\,\Omega(W)^G$ となり，$\Omega(V)$ は Q-射影的で $\mathrm{vx}(\Omega(V))\le_G Q=\mathrm{vx}(V)$ をえる．

一方，問 4.5 とII，8.25 より

$$\mathrm{vx}(\Omega^{-1}(V))=_G\mathrm{vx}(\widehat{\Omega(\hat{V})})=_G\mathrm{vx}(\Omega(\hat{V}))\le_G\mathrm{vx}(\hat{V})=_G\mathrm{vx}(V)$$

となる．これは V に $\Omega(V)$ を代入しても成り立つから $\mathrm{vx}(V)=\mathrm{vx}(\Omega^{-1}(\Omega(V)))\le_G\mathrm{vx}(\Omega(V))$ がえられる．

(ii) $Q=\mathrm{vx}(V)\in\mathfrak{A}$ とする．Green 対応の性質より $fV\,|\,V_H$，したがって $\Omega(fV)\,|\,\Omega(V_H)$ となる．一方 FH-加群の完全系列 $0\longrightarrow\Omega(V)_H\longrightarrow P(V)_H\longrightarrow V_H\longrightarrow 0$ において $P(V)_H$ は FH の射影加群であるから，I，10.18 より $\Omega(V_H)\,|\,\Omega(V)_H$ となる．よって

$$\Omega(fV)\,|\,\Omega(V)_H\equiv f\Omega(V)\oplus O(\mathfrak{Y})$$

となるが，$\mathrm{vx}(\Omega(V))=_G Q$，$\mathrm{vx}(\Omega(fV))=_H\mathrm{vx}(fV)=_H Q$ であるから Green 対応の性質から $\Omega(fV)\simeq f\Omega(V)$ をえる． □

§5. Green対応と自己準同型環

Green対応において対応する加群の自己準同型環の間には注目すべき関係がある．それをみるため少し準備をしておく．

$\mathfrak{X}$ は G の部分群のある集合とし，$G \geq H$ とするとき

$$\mathfrak{X} \wedge_G H = \{X^x \cap H \,;\, X \in \mathfrak{X},\, x \in G\}$$

とおく．ただし G で考えていることが明らかなときは，これを $\mathfrak{X} \wedge H$ と略記することがある．

$_{\mathfrak{o}}H$-加群 W に対し§1と同様の同一視を行って $W\,(= W \otimes 1) \subset W^G$ と考える．このとき次が成り立つ．

補題 5.1 (Dade)　$G \geq H$ とするとき $W_{\mathfrak{o}H}$ に対しトレース写像 Tr_H^G は次の同型を引き起す：

$$\mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X} \wedge_G H}^H(W) \cong \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G(W^G).$$

［**証明**］　まず $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H(W) \ni u$ ならば $\mathrm{Tr}_H^G(u) \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G(W^G)$ を示す．そのためには $u = \mathrm{Tr}_{X^x \cap H}^H(w)$ $(X \in \mathfrak{X},\, x \in G,\, w \in \mathrm{Inv}_{X^x \cap H}(W))$ としてよい．このとき

$$\mathrm{Tr}_H^G(u) = \mathrm{Tr}_{X^x \cap H}^G(w) \in \mathrm{Tr}_{X^x}^G(W^G) = \mathrm{Tr}_X^G(W^G)$$

となる．

よって補題1.5より Tr_H^G は単準同型 $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H(W) \to \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G(W^G)$ を引き起す．これが全射であることをみるため $X \in \mathfrak{X}$ とすれば

$$(W^G)_X = \bigoplus_{t \in H\backslash G/X} ((W \otimes t)_{H^t \cap X})^X.$$

ここで補題1.5より　$\mathrm{Inv}_X(((W \otimes t)_{H^t \cap X})^X) = \mathrm{Tr}_{H^t \cap X}^X(W \otimes t)$　であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_X^G(W^G) &= \bigoplus_t \mathrm{Tr}_X^G(\mathrm{Tr}_{H^t \cap X}^X(W \otimes t)) \\ &= \bigoplus_t \mathrm{Tr}_{H^t \cap X}^G(W \otimes t) = \bigoplus_t \mathrm{Tr}_{H \cap X^{t^{-1}}}^G(W) \\ &= \mathrm{Tr}_H^G(\bigoplus_t \mathrm{Tr}_{X^{t^{-1}} \cap H}^H(W)) \subset \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H(W))\end{aligned}$$

となり，Tr_H^G の引き起す写像は全射である．　□

注意　一般に $V_{\mathfrak{o}G}$ に対し Tr_G^G は $\mathrm{Inv}_G(V)$ 上の恒等写像であるから，上の補題で $\mathfrak{X} = \{G\}$ とおけば補題1.5がえられる．

$\mathfrak{o}G$-加群 V と $\mathfrak{o}H$-加群 W に対して (1.2), (1.4) のような同一視を行って

$$(5.1)\qquad {}_{\mathfrak{o}}(V, W) \subset {}_{\mathfrak{o}}(V, W^G), \qquad {}_{\mathfrak{o}}(W, V) \subset {}_{\mathfrak{o}}(W^G, V)$$

と考える．このとき上の補題と定理 1.9，補題 1.5 より次がえられる．

系 5.2 $V_{\mathfrak{o}G}$, $W_{\mathfrak{o}H}$ に対してトレース写像 Tr_H^G は次の同型を引き起す．

(i) $\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(V, W)) \cong \mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(V, W^G))$,

${}_{\mathfrak{o}H}(V, W)/\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(V, W)) \cong {}_{\mathfrak{o}G}(V, W^G)/\mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(V, W^G))$.

(ii) $\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(W, V)) \cong \mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(W^G, V))$,

${}_{\mathfrak{o}H}(W, V)/\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(W, V)) \cong {}_{\mathfrak{o}G}(W^G, V)/\mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(W^G, V))$.

注意 (i) 上の系で $\mathfrak{X} = \{G\}$ とおけば III, 1.19 がえられる．

(ii) 補題 5.1，系 5.2，および次の補題 5.3 (i) は $\mathfrak{o}$ が一般の可換環のときに成り立つ．

U, W はともに $\mathfrak{o}H$-加群とするとき，(5.1) のような同一視を行って $\mathfrak{o}H$-加群として

$${}_{\mathfrak{o}}(U, W) \subset {}_{\mathfrak{o}}(U, W^G) \subset {}_{\mathfrak{o}}(U^G, W^G)$$

となる．したがって Tr_H^G を ${}_{\mathfrak{o}H}(U, W)$ に制限して次の準同型

$$(5.2)\qquad \mathrm{Tr}_H^G\colon\ {}_{\mathfrak{o}H}(U, W) \longrightarrow {}_{\mathfrak{o}G}(U^G, W^G)$$

がえられ，${}_{\mathfrak{o}H}(U, W) \ni f$, $U^G \ni \sum_{t\in H\backslash G} u_t \otimes t$ に対し，

$$(5.3)\qquad \mathrm{Tr}_H^G(f)(\sum_t u_t \otimes t) = \sum_t f(u_t) \otimes t$$

となる ((1.6) 参照)．これについて次の補題が成り立つ．

補題 5.3 (i) (5.2) の写像は次の単準同型を引き起す：

$$(5.4)\qquad \overline{\mathrm{Tr}_H^G}\colon\ {}_{\mathfrak{o}H}(U, W)/\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(U, W)) \longrightarrow {}_{\mathfrak{o}G}(U^G, W^G)/\mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(U^G, W^G)).$$

また $U = W$ のとき $\overline{\mathrm{Tr}_H^G}$ は環準同型である．

(ii) $H \geq P$ とし，(4.1) のように $\mathfrak{X}$ を定義する：

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(G, P, H) = \{Q\,;\ \text{ある } x \in G - H \text{ に対し } Q \leq P^x \cap P\}.$$

このとき $U_{\mathfrak{o}H}$ が P-射影的ならば $\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}\wedge GH}({}_{\mathfrak{o}}(U, W)) = \mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(U, W))$ となる．さらに W も P-射影的ならば (5.4) は同型である：

$$\overline{\mathrm{Tr}_H^G}\colon\ {}_{\mathfrak{o}H}(U, W)/\mathrm{Tr}^H_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(U, W)) \cong {}_{\mathfrak{o}G}(U^G, W^G)/\mathrm{Tr}^G_{\mathfrak{X}}({}_{\mathfrak{o}}(U^G, W^G)).$$

［**証明**］ (i) 系 5.2 (ii) より Tr_H^G は次の同型を引き起す：

$$\overline{\mathrm{Tr}_H^G}\colon\ {}_{0H}(U, W^G)/\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W^G)) \xrightarrow{\sim} {}_{0G}(U^G, W^G)/\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^G({}_0(U^G, W^G)).$$

したがって

$$(5.5)\qquad {}_{0H}(U, W) \cap \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W^G)) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W))$$

となることを示せばよい．左辺 ⊃ 右辺は明らかであるから，逆の包含関係を示すため ${}_{0H}(U, W) \ni f$ は上の左辺に属するとする．すなわち

$$f = \sum_{Q\in\mathfrak{X}\wedge H} \mathrm{Tr}_Q^H(g_Q) \qquad (g_Q \in {}_{0Q}(U, W^G))$$

とする．このとき $\pi_W : W^G = W \oplus (\oplus_{t\neq 1} W\otimes t) \to W$ を射影とすれば

$$f = \pi_W\circ f = \sum_Q \mathrm{Tr}_Q^H(\pi_W\circ g_Q) \qquad (\pi_W\circ g_Q \in {}_{0Q}(U, W))$$

となり，f は (5.5) の右辺に属する．

$U = W$ のときは (5.3) より，$\mathrm{E}_{0H}(W) \ni f, g$ に対し $\mathrm{Tr}_H^G(f)\circ\mathrm{Tr}_H^G(g) = \mathrm{Tr}_H^G(f\circ g)$ となるから $\overline{\mathrm{Tr}_H^G}$ は環準同型である．

(ii) $\mathfrak{X}$ は H の部分群の集合であるから $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X} \wedge H$，したがって $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^H({}_0(U, W)) \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W))$ である．逆の包含関係を示すため $f = \mathrm{Tr}_D^H(\mu)$ $(D \in \mathfrak{X} \wedge H, \mu \in {}_{0D}(U, W))$ とする．また $D = Q^x \cap H$ $(x \in G,\ Q \in \mathfrak{X}$ したがってある $t \notin H$ に対し $Q \leq P^t \cap P)$ とする．

仮定により U は P-射影的であるから，$\mathrm{id}_U = \mathrm{Tr}_P^H(\lambda)$ $(\lambda \in {}_{0P}(U, U))$ となり，問 1.7 (iii) より

$$f = f\circ\mathrm{id}_U = \mathrm{Tr}_D^H(\mu)\circ\mathrm{Tr}_P^H(\lambda) = \sum_{h\in D\backslash H/P} \mathrm{Tr}_{D^h\cap P}^H(\mu^h\circ\lambda)$$

となる．ここで $D \leq Q^x \leq P^{tx} \cap P^x$ より $D^h \cap P \leq P^{txh} \cap P^{xh} \cap P$ となり，$t \notin H$ であるから $xh \notin H$ または $txh \notin H$ のいずれかが成り立つ．よって $D^h \cap P \in \mathfrak{X}$ となって，$f \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}}^H({}_0(U, W))$ をえる．

次に W も P-射影的であるとき $\overline{\mathrm{Tr}_H^G}$ が同型であることを示すには，(i) の証明から ${}_{0H}(U, W^G) = {}_{0H}(U, W) + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W^G))$ になることをいえばよい．そのため $(W^G)_H = W \oplus W'$ $(W' = \oplus_{s\in H\backslash G/H,\ s\notin H} W \otimes s)$ とおけば，${}_{0H}(U, W^G) = {}_{0H}(U, W) \oplus {}_{0H}(U, W')$ であるから，${}_{0H}(U, W') \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{X}\wedge H}^H({}_0(U, W^G))$ を示せばよい．

$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(G, P, H)$ を (4.1) のように定義すれば，補題 4.2 (i) より W' は $\mathfrak{Y}$-射影的である．したがって ${}_{0H}(U, W') \ni f$ は $f = \sum_{Y\in\mathfrak{Y}} \mathrm{Tr}_Y^H(\nu_Y)$ $(\nu_Y \in {}_{0Y}(U, W'))$ と表される (補題 2.8，定理 2.9 参照)．よって $\iota_{W'} : W' \longrightarrow (W^G)_H$ を埋め込みとすれば

$$f = \iota_{W'}\circ f\circ\mathrm{id}_U = \sum_{Y\in\mathfrak{Y}} \mathrm{Tr}_Y^H(\iota_{W'}\circ\nu_Y)\circ\mathrm{Tr}_P^H(\lambda)$$

$$= \sum_{Y \in \mathfrak{Y}} \sum_{h \in Y \backslash H/P} \mathrm{Tr}^{H}_{Y^h \cap P}(\iota_{W'} \circ (\nu_Y)^h \circ \lambda)$$

となる．ここで $Y \leq P^a \cap H\ (a \notin H)$ とすれば $Y^h \cap P \leq P^{ah} \cap P, ah \notin H$ となるから $Y^h \cap P \in \mathfrak{X}$ となり，$f \in \mathrm{Tr}^{H}_{\mathfrak{X} \wedge H}({}_0(U, W^G))$ をえる．□

さて Green 対応について次の定理が成り立つ．

定理 5.4 P, H は (4.2) をみたすとし，(G, P, H) に関する Green 対応を f とする．また $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{A}$ は (4.1) のような部分群の集合とする．このとき $\mathrm{IND}({}_0G \mid \mathfrak{A}) \ni U, V$ に対し次の同型が成り立つ：

$${}_{0H}(fU, fV)/\mathrm{Tr}^{H}_{\mathfrak{X}}({}_0(fU, fV)) \simeq {}_{0G}(U, V)/\mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0(U, V)).$$

特に $U = V$ ならば次の環同型が成り立つ：

$$\mathrm{E}_{0H}(fV)/\mathrm{Tr}^{H}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{E}_0(fV)) \simeq \mathrm{E}_{0G}(V)/\mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}(\mathrm{E}_0(V)).$$

［**証明**］ fU, fV はともに P-射影的であるから，補題 5.3 (ii) より Tr^{G}_{H} は次の同型を引き起す：

(5.6)
$$\begin{aligned}&{}_{0H}(fU, fV)/\mathrm{Tr}^{H}_{\mathfrak{X}}({}_0(fU, fV))\\ &\simeq {}_{0G}((fU)^G, (fV)^G)/\mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0((fU)^G, (fV)^G)).\end{aligned}$$

$(fU)^G = U \oplus U'$, $(fV)^G = V \oplus V'$ とし，$\iota_U : U \to (fU)^G$ を埋め込み，π_V : $(fV)^G \to V$ を射影とする．このとき U', V' はともに $\mathfrak{X}$-射影的であるから

$${}_{0G}((fU)^G, (fV)^G) = {}_{0G}(U, V) + \mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0((fU)^G, (fV)^G))$$

となる．したがって ${}_{0G}(U, V) \cap \mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0((fU)^G, (fV)^G)) = \mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0(U, V))$ を示せば，上の (5.6) と合わせて定理の同型をえる．

さて，上で左辺 ⊃ 右辺は明らかであるから，${}_{0G}(U, V) \ni \varphi$ が左辺に属するとする．このとき $\varphi = \sum_{Q \in \mathfrak{X}} \mathrm{Tr}^{G}_{Q}(\mu_Q)$ $(\mu_Q \in {}_{0Q}((fU)^G, (fV)^G))$ となり

$$\varphi = \pi_V \circ \varphi \circ \iota_U = \sum_{Q \in \mathfrak{X}} \mathrm{Tr}^{G}_{Q}(\pi_V \circ \mu_Q \circ \iota_U) \in \mathrm{Tr}^{G}_{\mathfrak{X}}({}_0(U, V))$$

をえる．よって左辺 ⊂ 右辺 が成り立つ．□

§6. 誘導加群の自己準同型環

6.1 G-次数つき多元環

R は一般の可換環とし G は群とする．R-多元環 A において，その R-部分

加群の集合 $\{A_x ; x \in G\}$ で次の2条件をみたすものが存在するとき A は(R 上の) **G-次数つき多元環**であるという：

(6.1) $$A = \bigoplus_{x\in G} A_x,$$

(6.2) $$A_x A_y \subset A_{xy}.$$

このとき次が成り立つ：

(6.3) $$A_1 \ni 1(=1_A).$$

実際 $1_A = \sum_x a_x\,(a_x \in A_x)$ とおくとき，$a_x = a_x 1_A = \sum_y a_x a_y$ となるから，(6.2) より $a_x = a_x a_1$ である．一方 $a_1 = 1_A a_1 = \sum_x a_x a_1$ であるから，$x \neq 1$ ならば $a_x a_1 = 0$，したがって $a_x = 0$ となる．よって $1_A = a_1 \in A_1$ である．

G-次数つき多元環 $A = \bigoplus_{x\in G} A_x$ がさらに次の条件をみたすとき，A は **G-強次数つき多元環**であるという：

(6.4) 各 A_x は A の正則元を少なくとも一つ含む．

例 6.1 (i) $G \triangleright H$ のとき $\bar{G} = G/H$ とおく．R 上の群環 $A = RG$ において $A_{\bar{x}} = x(RH)$ とおけば，$A = \bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}} A_{\bar{x}}$ となり A は $\bar{G}$-強次数つき多元環である．

(ii) II章，§7 で定義した可換環 S 上の捩れ型の群環

$$A = (S, G, \alpha) = \bigoplus_{x\in G} u_x S$$

$$(u_x u_y = u_{xy}\alpha(x, y),\ \ \gamma u_x = u_x \gamma^x\ \ (\gamma \in S))$$

は $A_x = u_x S$ とおいて G の不変環 $R = S^G$ 上の G-強次数つき多元環である．

補題 6.2 $A = \bigoplus_{x\in G} A_x$ は G-強次数つき多元環とし，各 A_x から A の正則元を一つえらんでそれを u_x とする．ただし $u_1 = 1$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) $u_x^{-1} \in A_{x^{-1}}$.

(ii) $A_x = u_x A_1 = A_1 u_x$.

(iii) $u_x u_y = u_{xy}\alpha(x, y)$, $\alpha(x, y) \in A_1^{\times}$.

(iv) $A_x A_y = A_{xy}$.

(v) $u_x^{-1} A_1 u_x = A_1$.

［**証明**］（i）　$u_x{}^{-1}=\sum_y a_y\,(a_y\in A_y)$ とすれば

$$A_1\ni 1=u_xu_x{}^{-1}=\textstyle\sum_y u_xa_y,\qquad u_xa_y\in A_{xy}$$

となるから，$y\neq x^{-1}$ ならば $u_xa_y=0$，したがって $a_y=0$ である．よって $u_x{}^{-1}=a_{x^{-1}}\in A_{x^{-1}}$ をえる．

（ii）　$u_xA_1\subset A_xA_1\subset A_x$．一方 $u_x{}^{-1}A_x\subset A_{x^{-1}}A_x\subset A_1$ であるから $A_x\subset u_xA_1$ となり，$u_xA_1=A_x$ をえる．$A_1u_x=A_x$ も同様に示される．

(iii)　は明らかである．

(iv)　$A_xA_y=u_xA_1u_yA_1=u_xu_yA_1A_1=u_{xy}A_1=A_{xy}$.

（v）　(ii) より明らかである．□

上の補題において特に A_1 が可換環ならば，A は捩れ型の群環 (A_1, G, α) になる．

6.2　誘導加群の自己準同型環

$G\triangleright H$ とし $\bar{G}=G/H$ とおく．また W は RH-加群としⅢ章，§3 と同様に

$$T(W)=\{x\in G\,;\,W^x\simeq W\ (RH\text{-同型})\}$$

を W の惰性群とする．$E=\mathrm{E}_{RG}(W^G)$ とおき，また $G\ni x$ に対し

$$E_x=\{\sigma\in E\,;\,\sigma W\subset Wx\}$$

とする．ただし §5 と同様に W と $W\otimes 1$ を同一視して $W\subset W^G$ と考え，したがって $Wx=W\otimes x$ とする．このとき次が成り立つ．

補題6.3（i）　$\bar{x}=\bar{y}\implies E_x=E_y$.

（ii）　$E_x\ni\sigma\implies\sigma(Wy)\subset Wxy$.

［**証明**］（i）　$y=hx\ (h\in H)$ とすれば $Wy=Wx$ であるから $E_x=E_y$ である．

（ii）　$\sigma(Wy)=(\sigma W)\,y\subset Wxy$．□

上の (i) より E_x を $E_{\bar{x}}$ とかいてよい．以下ではこのような表し方をすることもある．

補題6.4 (i) $E_x \simeq {}_{RH}(W,\ Wx)$ (R-同型).

また E_1 は $\mathrm{E}_{RH}(W)$ に R-多元環として同型である.

(ii) $E = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{G}} E_{\bar{x}}$, $E_{\bar{x}} E_{\bar{y}} \subset E_{\bar{x}\bar{y}}$.

したがって E は $\bar{G}$-次数つき多元環である.

[**証明**] (i) ${}_{RH}(W,\ Wx) \ni \varphi$ に対し $\hat{\varphi} : W^G \longrightarrow W^G$ を

$$\hat{\varphi}\Big(\sum_{t \in H\backslash G} w_t t\Big) = \sum_{t \in H\backslash G} \varphi(w_t) t \tag{6.5}$$

と定義する. このとき $\hat{\varphi} \in E_x$ となることが次のようにして示される.

$G \ni y$ に対し $ty = h_t t'$ ($h_t \in H$, $t' \in H\backslash G$) とおけば, $u = \sum_{t \in H\backslash G} w_t t$ に対し

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}\Big(\sum_t w_t ty\Big) &= \hat{\varphi}\Big(\sum_t (w_t h_t) t'\Big) = \sum_t \varphi(w_t h_t) t' \\ &= \sum_t \varphi(w_t) h_t t' = \Big(\sum_t \varphi(w_t) t\Big) y = \hat{\varphi}(u) y\end{aligned}$$

となり $\hat{\varphi}$ は RG-準同型である. また明らかに $\hat{\varphi}(W) = \varphi(W) \subset Wx$ であるから $\hat{\varphi} \in E_x$ である. このようにして R-準同型 ${}_{RH}(W,\ Wx) \xrightarrow{\ \wedge\ } E_x$ がえられるが, $\hat{\varphi}|_W = \varphi$ であるからこれは単準同型である.

一方 $E_x \ni \sigma$ に対して $\sigma|_W$ は ${}_{RH}(W,\ Wx)$ の元と考えることができて, $\widehat{\sigma|_W} = \sigma$ となることは σ が RG-準同型であることから明らかである. よって写像 $\wedge$ は同型である.

特に $x=1$ のとき写像 $\wedge$ が多元環としての同型になることも容易に確かめられる.

(ii) $\sum_{\bar{x} \in \bar{G}} E_{\bar{x}}$ は明らかに直和である. また $E_{\bar{x}} \ni \sigma$, $E_{\bar{y}} \ni \rho$ とすれば $\sigma\rho W \subset \sigma(Wy) \subset Wxy$ となるから $\sigma\rho \in E_{\bar{x}\bar{y}}$ である. よって$E = \sum_{\bar{x} \in \bar{G}} E_{\bar{x}}$ を示せばよい. そのため $W^G = \bigoplus_{x \in H\backslash G} Wx$ において Wx への射影を π_x ($: W^G \to W^G$) とおけば $\pi_x \in \mathrm{E}_{RH}(W^G)$ である. $E \ni \sigma$ に対し $\sigma_x = \pi_x(\sigma|_W) : W \to Wx$ とおくと $\sigma_x \in {}_{RH}(W,\ Wx)$ で, したがって $\hat{\sigma}_x \in E_x$ となる. $\sum_{x \in H\backslash G} \hat{\sigma}_x$ はW 上で σ と一致し, W^G は RG-加群として W で生成されるから $\sigma = \sum_{x \in H\backslash G} \hat{\sigma}_x \in \sum_{\bar{x} \in \bar{G}} E_{\bar{x}}$ となり $E = \sum_{\bar{x}} E_{\bar{x}}$ をえる. □

補題6.5 (i) $T(W) \ni x \Longleftrightarrow E_x$ は E の正則元を含む.

(ii) $T = T(W)$, $\bar{T} = T/H$ とおき

$$E_T = \bigoplus_{\bar{t} \in \bar{T}} E_{\bar{t}}$$

とすれば $E_T \simeq \mathrm{E}_{RT}(W^T)$ (多元環同型) となり，これは $\bar{T}$-強次数つき多元環である．

［**証明**］ (i) ($\Rightarrow$)　$T(W) \ni x$ ならば RH-同型 $\varphi : W \longrightarrow Wx$ があり，このとき (6.5) で定義される $\hat{\varphi} \in E_x$ は E の正則元である．

($\Leftarrow$)　$E_x \ni \sigma$ は E の正則元とする．このとき $\sigma|_W : W \longrightarrow Wx$ は RH-同型で $x \in T(W)$ となる．

(ii) $E' = \mathrm{E}_{RT}(W^T)$, $E_t' = \{\sigma \in E' ; \sigma W \subset Wt\}$ とすれば $E' = \bigoplus_{\bar{t} \in \bar{T}} E'_{\bar{t}}$ となる．$W^T \subset W^G$ と考えると E_T の元は W^T を不変にし，したがって準同型 f : $E_T \longrightarrow E'$ ($\sigma \mapsto \sigma|_{W^T}$) がえられる．ここで補題 6.4 (i) の証明から f は同型 $E_t \overset{\sim}{\rightarrow} E_t'$ を引き起すから $E_T \simeq E'$ である．

また (i) より E_T は $\bar{T}$-強次数つき多元環である．□

特に $T(W) = G$ と仮定すれば E は $\bar{G}$-強次数つき多元環で，$E_{\bar{x}}$ に属する E の正則元を $\mu_{\bar{x}}$ とすれば

$$E = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{G}} \mu_{\bar{x}} E_1$$

となり，$E \otimes_{E_1} W$ は次の作用で RG-加群である：

(6.6)
$$(\sigma \otimes w)x = \sigma\mu_{\bar{x}} \otimes \mu_{\bar{x}}{}^{-1}(wx)$$

(ただし $\sigma \in E$, $w \in W$, $x \in G$)．このとき次が成り立つ．

定理 6.6 (Cline[1])　$T(W) = G$ とすれば (E, RG)-加群としての同型

$$f : E \otimes_{E_1} W \overset{\sim}{\rightarrow} W^G \qquad (\sigma \otimes w \mapsto \sigma w)$$

が成り立つ．

［**証明**］ (6.6) の定義を考慮に入れて，f が (E, RG)-加群としての準同型であることはほとんど明らかである．また $E \otimes_{E_1} W = \bigoplus_{x \in H\backslash G} \mu_{\bar{x}} \otimes W$, $W^G = \bigoplus_{x \in H\backslash G} Wx$ で，f は加群としての同型 $\mu_{\bar{x}} \otimes W \overset{\sim}{\rightarrow} Wx$ を引き起すから全単射である．□

さて §2 で約束したように以下 (K, R, F) は p-モジュラー系とし，$\mathfrak{o}$ は R または F を表すものとする．このとき $W_{\mathfrak{o}H}$ が直既約ならば E_1 ($\simeq E_{\mathfrak{o}H}(W)$) は局所環で，したがって $E_1/J(E_1)$ は斜体である．

定理6.7 $G \triangleright H$，$\bar{G} = G/H$ とし，$\mathrm{IND}({}_0H) \ni W$ に対し $T = T(W)$，$E_1 = \mathrm{E}_{0H}(W)$ とおく．このとき

(i) $L = (\bigoplus_{\bar{t} \in \bar{T}} J(E_1)E_{\bar{t}}) \oplus (\bigoplus_{\bar{x} \notin \bar{T}} E_{\bar{x}})$

とおけば，L は $J(E)$ に含まれる E のイデアルである．

(ii) $E_T = \bigoplus_{\bar{t} \in \bar{T}} E_{\bar{t}} \ (\simeq E_{0T}(W^T))$ とおけば次の同型が成り立つ：

$$E/L \simeq E_T/J(E_1)E_T.$$

(iii) $E/J(E) \simeq E_T/J(E_T)$.

［**証明**］ $T \ni t$ に対し μ_t は E_t に含まれる E の正則元とする．このとき $E_t = \mu_t E_1 = E_1 \mu_t$ となる（補題6.5，補題6.2(ii)）．

(i) $\mu_t^{-1}E_1\mu_t = E_1$ より $\mu_t^{-1}J(E_1)\mu_t = J(E_1)$，したがって $J(E_1)E_t = E_tJ(E_1)$ となり LE_t，$E_tL \subset L$ をえる．よって L が E のイデアルであることを示すには，$T \not\ni x$，y ならば $E_xE_y \subset L$ となることを示せばよい．$xy \notin T$ ならばこれは明らかであるから $xy \in T$ とし，このとき $E_xE_y \subset J(E_1)E_{xy}$ となることを示す．そのため $E_x \ni \sigma$，$E_y \ni \rho$ とすれば，${}_0H$-準同型の列

$$W \xrightarrow{\mu_{y^{-1}x^{-1}}} Wy^{-1}x^{-1} \xrightarrow{\ \rho\ } Wx^{-1} \xrightarrow{\ \sigma\ } W$$

において $(Wx^{-1})_{0H}$ は直既約で，σ は補題6.5(i)より同型ではないから $\sigma\rho\mu_{y^{-1}x^{-1}} (\in E_1)$ も同型でない（I，9.2参照）．ここで E_1 は局所環であるから $\sigma\rho\mu_{y^{-1}x^{-1}} \in J(E_1)$，したがって $\sigma\rho \in J(E_1)\mu_{y^{-1}x^{-1}}{}^{-1} = J(E_1)\mu_{xy} \subset J(E_1)E_{xy}$ をえる．

次に $L \subset J(E)$ を示すには，$E^* = E/\pi E$ とおくとき $L^* \subset J(E^*)$ となることをいえばよい．まず $T \ni t$ ならば $J(E_1)^*E_t^*$ の元はすべてべき零である．また $T \not\ni x$，$E_x \ni \sigma$ とすれば，$n = o(x)$ に対し $\sigma^n \in E_{x^n} = E_1$ となる．ここで $\sigma^n \notin J(E_1)$ とすると σ^n は正則元，したがって σ も正則元となって補題6.5(i)に反する．よって $\sigma^n \in J(E_1)$ となり σ^* はべき零元である．このようにして L^* は F 上べき零元で生成されるから L^* はべき零イデアルで，$L^* \subset J(E^*)$ となる（II，3.7）．

(ii) は(i)より明らかである．

(iii) $L \subset J(E)$，$J(E_1)E_T \subset J(E_T)$ であるから(ii)より明らかである． □

系6.8 定理6.7と同じ仮定のもとで

$$W^T = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i \qquad (6.7)$$

を直既約分解とすれば

$$W^G = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i{}^G \tag{6.8}$$

も直既約分解で次が成り立つ：

$$U_i \simeq U_j \Longleftrightarrow U_i{}^G \simeq U_j{}^G \tag{6.9}$$

特に $T(W)=H$ ならば W^G は直既約である．

［証明］ $E_T \simeq \mathrm{E}_{\mathfrak{o}T}(W^T)$ であるから，E_T においては (6.7) に対応して $1=\sum_{i=1}^{r}\varepsilon_i$ と原始べき等元分解される ($\varepsilon_i(W^T)=U_i$)．これはまた定理 6.7 (iii) とべき等元の持ち上げに関する定理から E における 1 の原始べき等元分解である．よって (6.8) は直既約分解で $\varepsilon_i(W^G)=U_i{}^G$ となる．また定理 6.7 (iii) と I，14.2 (iii) より ε_i と ε_j が E_T で同値であることと E で同値であることは同じであるから (6.9) がえられる． □

§7. Green の直既約性定理とその応用

§6 と同様に (K,R,F) は p-モジュラー系とし，$\mathfrak{o}$ は R または F を表すものとする．また (K',R',F') は他の p-モジュラー系とするとき，$K\subset K'$ で K' の付値 ν' が K の付値 ν の拡張であるとき $(K,R,F)\leq(K',R',F')$ と表し，$\mathfrak{o}'=R'$（または F'）は $\mathfrak{o}=R$（または F）の **拡大** であるという．

直既約な $\mathfrak{o}G$-加群 V は，$\mathfrak{o}$ の任意の拡大 $\mathfrak{o}'$ に対し $V^{\mathfrak{o}'}=\mathfrak{o}'\otimes_{\mathfrak{o}}V$ がまた直既約であるとき **絶対直既約** であるという．

$\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)\ni V$ に対し $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)/J(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V))$ を $D(V)$ と表すことにする．このとき $D(V)$ は F 上の多元体である．

補題 7.1 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)\ni V$ に対し次が成り立つ．

(i) $D(V)=F$ ならば V は絶対直既約である．

(ii) F が代数的閉体ならば V は絶対直既約である．

［証明］ (i) $E=\mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ とおけば $E^{\mathfrak{o}'}\simeq \mathrm{E}_{\mathfrak{o}'G}(V^{\mathfrak{o}'})$ となる (I, 11.12)．$J(\mathfrak{o})=(\pi)$ とするとき，$E^{\mathfrak{o}'}$ において $J(E)^{\mathfrak{o}'}/\pi E^{\mathfrak{o}'}$ はべき零で，$\pi E^{\mathfrak{o}'}\subset J(E^{\mathfrak{o}'})$ であるから

$J(E)^{\mathfrak{o}'} \subset J(E^{\mathfrak{o}'})$ となる．また

$$E^{\mathfrak{o}'}/J(E)^{\mathfrak{o}'} \simeq \mathfrak{o}' \otimes_{\mathfrak{o}} D(V) = \mathfrak{o}' \otimes_{\mathfrak{o}} F \simeq \mathfrak{o}'/\pi\mathfrak{o}'$$

であるから $E^{\mathfrak{o}'}/J(E^{\mathfrak{o}'}) \simeq \mathfrak{o}'/J(\mathfrak{o}') = F'$ となり，$E^{\mathfrak{o}'}$ は局所環である．よって $V^{\mathfrak{o}'}$ は直既約である (I, 14.6).

（ii）　F が代数的閉体ならば $D(V) = F$ である．□

さて次の定理は重要である．

定理 7.2　(Green)　$G \triangleright H$ とし $\bar{G} = G/H$ は p 群とする．このとき $\mathfrak{o}H$-加群 W が絶対直既約ならば $(W^G)_{\mathfrak{o}G}$ も絶対直既約である．

［**証明**］　$\bar{G}$ の位数に関する帰納法で示すことにすれば $|\bar{G}| = p$ と仮定してよい．$(K, R, F) \leq (K', R', F')$ となる任意の p-モジュラー系 (K', R', F') をとり，$\mathfrak{o}' = R'$ (または F') は $\mathfrak{o} = R$ (または F) の拡大であるとする．また $\tilde{F}'$ を F' の代数的閉包とすれば，p-モジュラー系 $(\tilde{K}', \tilde{R}', \tilde{F}')$ で $(K', R', F') \leq (\tilde{K}', \tilde{R}', \tilde{F}')$ となるものがある (I, 13.27). $\tilde{\mathfrak{o}}' = \tilde{R}'$(または $\tilde{F}'$) とし，$\tilde{W} = W^{\tilde{\mathfrak{o}}'}$ とおく．このとき仮定により $\tilde{W}_{\tilde{\mathfrak{o}}'H}$ は直既約である．ここで $\tilde{W}^G$ $(\simeq (W^G)^{\tilde{\mathfrak{o}}'})$ が直既約であることを示せば $(W^G)^{\mathfrak{o}'}$ も直既約となるから W^G は絶対直既約である．$|\bar{G}| = p$ より $T(\tilde{W}) = H$ または G となるが，前者のときは系 6.8 より $\tilde{W}^G$ は直既約である．よって $T(\tilde{W}) = G$ と仮定し，$E = \mathrm{E}_{\tilde{\mathfrak{o}}'G}(\tilde{W}^G)$ とおくと

$$E = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{G}} E_{\bar{x}}, \qquad E_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} E_1$$

(ただし $\mu_{\bar{x}}$ は E の正則元) は $\bar{G}$-強次数つき多元環である．ここで $E_1 \simeq \mathrm{E}_{\tilde{\mathfrak{o}}'H}(\tilde{W})$ は局所環であるから $E_1/J(E_1) = \tilde{F}'$ で

$$E/J(E_1)E \simeq \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{G}} \mu_{\bar{x}} \tilde{F}'$$

は $\bar{G}$ の $\tilde{F}'$ 上の一般群環である．よって III, 5.4 (iii) よりこれは群環 $\tilde{F}'\bar{G}$ に同型で局所環である (III, 1.24). したがって $J(E_1)E \subset J(E)$ より E も局所環で，$\tilde{W}^G$ は直既約である．□

系 7.3　G は p-群で H はその部分群とする．このとき $\mathfrak{o}H$-加群 W が絶対直既約ならば W^G も絶対直既約である．

［**証明**］　G はべき零群であるから次のような部分群の列

$$H = H_0 \lneqq H_1 \lneqq \cdots\cdots \lneqq H_n = G$$

で $H_{i-1} \lhd H_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるものがある (永尾[4], 定理 16.15 参照). したがって Green の定理を繰り返し用いて系の主張がえられる. □

Green の定理の応用としてまず次の二つの定理を示す.

定理 7.4　P は G の p-部分群で, $V_{\mathfrak{o}G}$ は $\mathfrak{o}$-自由で P-射影的であるとする. また χ は V による G の $\mathfrak{o}$-表現の指標とし, $G \ni x$ の p-部分を x_p とする. このとき次が成り立つ:

$$x_p \notin_G P \implies \chi(x) = 0.$$

[**証明**]　p-モジュラー系 (K, R, F) に対し $\tilde{F}$ を F の代数的閉包とすれば, p-モジュラー系 $(\tilde{K}, \tilde{R}, \tilde{F})$ で $(K, R, F) \le (\tilde{K}, \tilde{R}, \tilde{F})$ となるものがある. このとき $\mathfrak{o} = R$ (または F) に対し $\tilde{\mathfrak{o}} = \tilde{R}$ (または $\tilde{F}$) とおけば $V^{\tilde{\mathfrak{o}}}$ はまた P-射影的で, これについて定理を示せばよい. したがって最初から F は代数的閉体と仮定してよく, このとき G の任意の部分群 H に対し, 直既約な $\mathfrak{o}H$-加群はすべて絶対直既約である (補題 7.1).

さて $H = \langle x \rangle, M = \langle x^p \rangle$ とおく. V は P-射影的であるから $V \mid (V_P)^G$ であるが, 一方 Mackey の定理より

$$((V_P)^G)_H = \bigoplus_{t \in P \backslash G/H} ((V \otimes t)_{P^t \cap H})^H$$

となる. ここで $x_p \notin_G P$ より $x_p \notin P^t \cap H$ となるから $P^t \cap H \le M$ である. いま $W = \bigoplus_t ((V \otimes t)_{P^t \cap H})^M$ とおき, $W_{\mathfrak{o}M}$ の直既約分解を $W = \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ とすれば

$$((V_P)^G)_H = \bigoplus_{i=1}^n Y_i^H$$

となり, Y_i は絶対直既約な $\mathfrak{o}M$-加群であるから Green の定理により Y_i^H は直既約である. よって $V_H \mid ((V_P)^G)_H$ より

$$V_H \simeq \bigoplus_{i=1}^r Y_i^H$$

としてよい. χ_i を Y_i^H による表現の指標とすれば, $x \notin M$ より $\chi_i(x) = 0$ となり, したがって $\chi(x) = 0$ である. □

定理 7.5　P は G の p-部分群とし, $V_{\mathfrak{o}G}$ は P-射影的であるとする. このとき

$$|G : P|_p \,\Big|\, \dim_F V/\pi V.$$

(ただし $J(\mathfrak{o})=(\pi)$ とする.) 特に V が $\mathfrak{o}$-自由ならば

$$|G:P|_p \,\Big|\, \mathrm{rank}_{\mathfrak{o}}\, V.$$

[**証明**] 前半を示せばよい. $V/\pi V$ はまた P-射影的であるから $\mathfrak{o}=F$ (したがって $\pi=0$) と仮定してよい. さらに $\tilde{F}$ を F の代数的閉包とするとき, $V^{\tilde{F}}$ も P-射影的で, これについて定理を示せばよいから, 最初から F は代数的閉体と仮定してよい.

さて S を P を含む G の Sylow p-部分群とすれば $|G:P|_p=|S:P|$ である. V は P-射影的であるから $V\,|\,(V_P)^G$ であるが, 一方

$$((V_P)^G)_S=\sum_{t\in P\backslash G/S}((V\otimes t)_{P^t\cap S})^S$$

となる. ここで $(V\otimes t)_{P^t\cap S}=\oplus_i Y_i^{(t)}$ を直既約分解とすれば, 系 7.3 より $(Y_i^{(t)})^S$ はまた直既約で, $((V_P)^G)_S$ の直既約分解

$$((V_P)^G)_S=\bigoplus_{t,i}(Y_i^{(t)})^S$$

がえられる. よって $V_S\,|\,((V_P)^G)_S$ より V_S はいくつかの $(Y_i^{(t)})^S$ の直和に同型になるが, $|S:P^t\cap S| \,\big|\, \dim_F(Y_i^{(t)})^S$, $|S:P| \,\big|\, |S:P^t\cap S|$ より $|S:P| \,\big|\, \dim_F V$ をえる. □

前と同様に $J(\mathfrak{o})=(\pi)$ とする. このとき群 G は $\mathfrak{o}/(\pi^n)$ $(n\geq 1)$ に自明に作用するとして $\mathfrak{o}/(\pi^n)$ は直既約な $\mathfrak{o}G$-加群である. ただし便宜上 $n=\infty$ も許すことにして $(\pi^\infty)=0$ とする.

系 7.6 G が自明に作用する $\mathfrak{o}G$-加群 $\mathfrak{o}/(\pi^n)$ のヴァーテックスは G の Sylow p-部分群である.

[**証明**] $\mathrm{vx}(\mathfrak{o}/(\pi^n))=P$ とし, P を含む G の Sylow p-部分群を S とすれば, 上の定理により

$$|S:P| \,\Big|\, \dim_F \mathfrak{o}/(\pi)=1.$$

よって $S=P$ である. □

これより次の二つの定理がえられる.

定理 7.7 G の任意の p-部分群 P はある $V\in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ のヴァーテックスになる.

[**証明**] $\mathfrak{o}_P$ を自明な $\mathfrak{o}P$-加群とすれば，上の系より $\mathrm{vx}(\mathfrak{o}_P)=P$，よって補題3.5 (i) より $V\in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ で $\mathrm{vx}(V)=_G P$ となるものがある． □

$\mathfrak{o}G$-加群 V に対してIII章と同様に

$$\mathrm{Ker}_G V=\{x\in G\,;\,vx=v\,(\forall v\in V)\}$$

とおけば $\mathrm{Ker}_G V\lhd G$ である．

定理7.8 P は G の p-部分群とし，$V\in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) $P\le \mathrm{Ker}_G V \Longrightarrow P\le_G \mathrm{vx}(V)$.

特に $\mathrm{vx}(V)\cap \mathrm{Ker}_G V\in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Ker}_G V)$ である．

(ii) $P\lhd G$ で $V_{\mathfrak{o}G}$ が既約ならば $P\le \mathrm{Ker}_G V$，したがって $P\le \mathrm{vx}(V)$ となる．

[**証明**] (i) P は V に自明に作用し，$\mathfrak{o}$ は単項イデアル整域であるから $V_P\simeq \bigoplus_i \mathfrak{o}/(\pi^{n_i})$ となる．よって $\mathrm{vx}((\mathfrak{o}/(\pi^{n_i}))_{\mathfrak{o}P})\le_G \mathrm{vx}(V)$ であるが，系7.6より $\mathrm{vx}((\mathfrak{o}/(\pi^{n_i}))_{\mathfrak{o}P})=P$ であるから前半が成り立つ．

後半を示すため $Q\in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Ker}_G V)$ とすれば，前半より $Q^x\le \mathrm{vx}(V)$ となる $x\in G$ がある．このとき $Q^x\le \mathrm{vx}(V)\cap \mathrm{Ker}_G V$ であるから $Q^x=\mathrm{vx}(V)\cap \mathrm{Ker}_G V\in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Ker}_G V)$ となる．

(ii) V の既約性より $V\pi=0$ であるから，V は FG-加群と考えてよい．このときIII, 3.1 (i), 1.24 (ii) より $P\le \mathrm{Ker}_G V$ となる． □

§8. Scott 加群

前と同様に (K,R,F) は p-モジュラー系とし，$\mathfrak{o}$ は R または F を表すものとする．

$G\ge H$ のとき $\mathfrak{o}$ を自明な H-加群とみてこれを $\mathfrak{o}_H$ と表せば，その誘導加群

$$(\mathfrak{o}_H)^G=\bigoplus_{t\in H\backslash G}\mathfrak{o}\otimes t$$

は G の可移な置換表現を与える．このような加群を G の ($\mathfrak{o}$ 上の) **可移な置換**

加群 とよび，有限個の可移な置換加群の直和を **置換加群** という．可移な置換加群の直和因子の中には Scott 加群とよばれる特別な因子が存在することを示すのがこの節の主な目的である．

以下では前に約束したように剰余類の完全代表系には 1 がつねに含まれているものとする．

可移な置換加群の直既約因子について，一般に次が成り立つ．

定理 8.1 $\mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \ni V$，$\mathrm{vx}(V) = P$ とする．このとき V がある可移な置換加群の直既約因子であるため必要十分な条件は，V のソース $\mathrm{s}(V)$ が自明な P-加群 $\mathfrak{o}_P$ であることである．

［**証明**］ $\mathrm{s}(V) = \mathfrak{o}_P$ とすれば $V \mid (\mathfrak{o}_P)^G$ となるから十分条件であることは明らかである．必要条件であることをみるため $V \mid (\mathfrak{o}_H)^G$ とすれば

$$V_P \mid ((\mathfrak{o}_H)^G)_P = \bigoplus_{t \in H \backslash G/P} (\mathfrak{o}_{H^t \cap P})^P$$

となり，$\mathrm{s}(V) \mid V_P$ であるから $\mathrm{s}(V) \mid (\mathfrak{o}_{H^t \cap P})^P$ となる t がある．ここで $\mathrm{s}(V)$ のヴァーテックスは P であるから $H^t \cap P = P$ となり，$\mathrm{s}(V) = \mathfrak{o}_P$ をえる． □

定理 8.1 のような直既約加群 V を **自明なソースをもつ加群** とよぶ．

問 8.2 （i） $\mathfrak{o}G$-加群 V がある置換加群の直和因子であるため必要十分な条件は，V の各直既約因子が自明なソースをもつ加群であることである．

（ii） $\mathfrak{o}G$-加群 V が置換加群の直和因子ならば，G の部分群 H に対して V_H も H の置換加群の直和因子である．

（ヒント：Mackey 分解を考えよ．）

次の補題は後で必要になる．

補題 8.3 $G \geq H$，L とするとき

$$\mathrm{rank}_{\mathfrak{o}}({}_{\mathfrak{o}G}((\mathfrak{o}_H)^G, (\mathfrak{o}_L)^G)) = |L \backslash G/H|.$$

［**証明**］ III，1.19 より

$${}_{\mathfrak{o}G}((\mathfrak{o}_H)^G, (\mathfrak{o}_L)^G) \simeq {}_{\mathfrak{o}H}(\mathfrak{o}_H, ((\mathfrak{o}_L)^G)_H) \simeq \mathrm{Inv}_H(((\mathfrak{o}_L)^G)_H).$$

ここで

$$((\mathfrak{o}_L)^G)_H = \bigoplus_{t \in L \backslash G/H} (\mathfrak{o}_{L^t \cap H})^H$$

となるが，補題1.5より $\mathrm{Inv}_H((\mathfrak{o}_{L^t\cap H})^H) \simeq \mathrm{Inv}_{L^t\cap H}(\mathfrak{o}_{L^t\cap H}) = \mathfrak{o}$ であるから補題の主張がえられる．□

さて，まず $\mathfrak{o} = F$ のとき，Scott 加群の存在とその性質を Burry[2]に従ってのべよう．

定理 8.4 (Scott, Alperin) $G \geq H$, $\mathrm{Syl}_p(H) \ni Q$ とする．このとき

(i) 可移な置換加群 $(F_H)^G$ の直既約因子 S で次の 3 条件をみたすものが存在する：

(a) $F_G \mid \mathrm{soc}(S)$.

(b) $F_G \mid \mathrm{hd}(S)$.

(c) $\mathrm{vx}(S) =_G Q$. かつ $f = f(G, Q, N = N_G(Q))$ を Green 対応とすると，fS は $F[N/Q]$-加群とみることができて，N/Q の自明な加群の射影被覆である．

(ii) $(F_H)^G$ の直既約分解において，上の 3 条件のどれに対してもそれをみたす直既約因子は一意的に定まる．

[**証明**] $(F_H)^G$ の直既約分解を

$$(F_H)^G = V_1 \oplus \cdots\cdots \oplus V_r \tag{8.1}$$

とする．

$(F_H)^G = \bigoplus_{t\in H\backslash G} F\otimes t$ において，$u = \sum_{t\in H\backslash G} 1\otimes t$ とおけば $u \in \mathrm{Inv}_G((F_H)^G)$ である．一方 $\mathrm{Inv}_G((F_H)^G) \simeq \mathrm{Inv}_H(F_H) = F$ であるから $\mathrm{Inv}_G((F_H)^G) = Fu$ となる．よって $\mathrm{Inv}_G((F_H)^G) = \bigoplus_i \mathrm{Inv}_G(V_i)$ より $V_i \supset Fu$ となる i が唯一つ存在する．そこで $S = V_i$ とおけば，これが (a) をみたし，また (8.1) の直既約分解において (a) をみたす唯一つの直既約因子であることは明らかである．

次に (c) については，まず $\mathrm{Syl}_p(H) \ni Q$ であるから F_H は Q-射影的，したがって $F_H \mid (F_Q)^H$ となり，$S \mid (F_H)^G \mid (F_Q)^G$ であるから $\mathrm{vx}(S) \leq_G Q$ となる．一方 $U = \bigoplus_{\substack{t\in H\backslash G\\ t\neq 1}} F\otimes t$ とおけば，FQ-加群として

$$((F_H)^G)_Q = Fu \oplus U$$

と直和分解されるが，$Fu \subset S$ であるから $S_Q = Fu \oplus (S \cap U)$ となり $F_Q | S_Q$ である．よって $\mathrm{vx}(F_Q) = Q \leq_G \mathrm{vx}(S)$ となり $\mathrm{vx}(S) =_G Q$ をえる．また定理 8.1 より $\mathrm{s}(S) = F_Q$ である．

さて Green 対応はヴァーテックスとソースを保つから $\mathrm{vx}(fS) = Q$，$\mathrm{s}(fS) = F_Q$ である．よって $fS \mid (F_Q)^N$ となるが，$Q \lhd N$ より $(F_Q)^N \simeq F[N/Q]$ であるから，fS は $F[N/Q]$-加群とみることができてその主直既約加群である．一方，適当な同一視を行って

$$0 \neq {}_{FG}(F_G, S) \subset {}_{FG}(F_G, (fS)^G) \simeq {}_{FN}(F_N, fS)$$

となるから $\mathrm{soc}(fS) \simeq F_N$ となり，fS は $F[N/Q]$-加群としてその自明な加群の射影被覆である．また (c) をみたす直既約因子の一意性は Green 対応が 1 対 1 の対応であることから明らかである．

最後に (b) については，$\widehat{fS}$ を fS の反傾加群とするとき III, 1.12 (iii) より $fS \simeq \widehat{fS}$ (FN-同型) となり，問 4.5 より $\widehat{fS} \simeq f\hat{S}$ であるから $S \simeq \hat{S}$ (FG-同型) となる．よって $F_G \mid \mathrm{soc}(S)$ より $F_G \mid \mathrm{hd}(\hat{S}) \simeq \mathrm{hd}(S)$ となる．また (b) をみたす直既約因子の一意性は ${}_{FG}((F_H)^G, F_G) \simeq {}_{FH}(F_H, F_H) \simeq F$ より導かれる． □

上の定理のような加群 S を $S(G, H)$，または G で考えていることが明らかなときは $S(H)$ と表し，このような加群を **Scott 加群** とよぶ．これは同型を度外視すれば G と H だけできまる．

上の定理の条件 (c) とそれをみたす加群の一意性から直ちに次がえられる．

系 8.5 $G \geq H$，H' とし，Q，Q' をそれぞれ H，H' の Sylow p-部分群とするとき次が成り立つ：

$$S(H) \simeq S(H') \iff Q =_G Q'.$$

特に $S(H) \simeq S(Q)$ である．

G の p-部分群 Q に対して，$S(Q)$ を **Q をヴァーテックスにもつ Scott 加群** とよぶ．

G とその部分群の Scott 加群の間には次のような関係がある．

定理 8.6 $G \geq H \geq Q$ で Q は p-部分群とする．また $S = S(G, Q)$，S_1

$= S(H, Q)$ とおけば次が成り立つ：

（i）$S \mid S_1{}^G$,　　（ii）$S_1 \mid S_H$.

［証明］ $N_G = N_G(Q)$, $N_H = N_H(Q)$ とおき, $f_G = f(G, Q, N_G)$, $f_H = f(H, Q, N_H)$ をそれぞれ Green 対応とする．このとき定理 8.4 (c) の性質より全準同型 $f_H S_1 \to F_{N_H/Q}$ があり，したがって全準同型 $(f_H S_1)^{N_G} = (f_H S_1)^{N_G/Q} \xrightarrow{\lambda} (F_{N_H/Q})^{N_G/Q}$ がある．これと $\mu : (F_{N_H/Q})^{N_G/Q} \to F_{N_G/Q}$ $(\sum_{\bar{t}} a_{\bar{t}} \otimes \bar{t} \mapsto \sum_{\bar{t}} a_{\bar{t}})$ を合成して全準同型 $\mu \circ \lambda : (f_H S_1)^{N_G} \to F_{N_G/Q}$ がえられるが, $(f_H S_1)^{N_G}$ は $F[N_G/Q]$-加群として射影的であるから I，10.18 により $f_G S \mid (f_H S_1)^{N_G}$ となる．よって定理 4.8 より (i) がえられる．

また全準同型 $f_G S \to F_{N_G/Q}$ があるから，全準同型 $(f_G S)_{N_H} \to F_{N_H/Q}$ があり, $(f_G S)_{N_H}$ は $F[N_H/Q]$-加群として射影的であるから，上と同様にして $f_H S_1 \mid (f_G S)_{N_H}$ となる．よって定理 4.8 より (ii) が成り立つ． □

また次の定理が成り立つ．

定理 8.7 $G \geq H \geq Q$ で Q は p-部分群とし, $S = S(G, Q)$ とおく．また W は自明なソースをもつ直既約な FH-加群とする．このとき $S \mid W^G$ ならば, $G \ni x$ があって $W = S(H, Q^x)$ となる．

［証明］ $Q' = \mathrm{vx}(W)$ (H の p-部分群) とおけば $W \mid (F_{Q'})^H$ となり，したがって $S \mid W^G \mid (F_{Q'})^G$ であるから $S = S(G, Q')$ である．よって系 8.5 より $Q' = Q^x$ となる $x \in G$ がある．ここで適当な同一視を行って

$$0 \neq {}_{FG}(F_G, S) \subset {}_{FG}(F_G, W^G) \simeq {}_{FH}(F_H, W)$$

であるから $W = S(H, Q') = S(H, Q^x)$ となる． □

次に $\mathfrak{o} = R$ のときを考察しよう． U, V は RG-加群とするとき, RG-準同型 $\lambda : U \to V$ は自然に FG-準同型 $\lambda_* : U^* \to V^*$ $(u^* \mapsto \lambda(u)^*)$ を引き起す．(ただし $U^* = U/\pi U$, $V^* = V/\pi V$ とする．) したがって準同型

$$\Phi : {}_{RG}(U, V) \longrightarrow {}_{FG}(U^*, V^*) \qquad (\lambda \mapsto \lambda_*)$$

が存在する．

補題 8.8 上において V がトーションのない R-加群ならば

(8.2) $$\mathrm{Ker}\Phi = \pi\cdot{}_{RG}(U, V).$$

したがって Φ は次のような単準同型を引き起す：

(8.3) $$\Phi^*:\ {}_{RG}(U, V)^* = {}_{RG}(U, V)/\pi\cdot{}_{RG}(U, V) \longrightarrow {}_{FG}(U^*, V^*).$$

［**証明**］ (8.2) において左辺 ⊃ 右辺は明らかである．逆に $\mathrm{Ker}\Phi \ni \lambda$ とすれば $\lambda(U) \subset \pi V$，したがって各 $u \in U$ に対し $\lambda_1(u) \in V$ で $\lambda(u) = \pi\lambda_1(u)$ となるものが一意的に定まる．このとき $\lambda_1 \in {}_{RG}(U, V)$，$\lambda = \pi\lambda_1$ となり左辺 ⊂ 右辺がえられる． □

注意 上の補題のような場合には ${}_{RG}(U, V) \ni \lambda$ に対し ${}_{RG}(U, V)^* \ni \lambda^*$ と $\Phi^*(\lambda^*)$ を同一視して ${}_{FG}(U^*, V^*) \ni \lambda^*\,(: u^* \mapsto \lambda(u)^*)$ と考えてよい．

特に置換加群の直和因子については次が成り立つ．

定理 8.9 (i) U, V がともに R 上の置換加群の直和因子ならば，(8.3) の Φ^* は同型である：

(8.4) $$\Phi^*:\ {}_{RG}(U, V)^* \xrightarrow{\sim} {}_{FG}(U^*, V^*).$$

特に $\mathrm{E}_{RG}(V)^* \simeq \mathrm{E}_{FG}(V^*)$ である．

(ii) R 上の置換加群の直和因子 V に対して次が成り立つ：

$$V \text{ が直既約} \iff V^* \text{ が直既約}.$$

またこのとき $\mathrm{vx}(V) =_G \mathrm{vx}(V^*)$ である．

(iii) F 上の置換加群の直和因子 T は R 上の置換加群の直和因子 V に持ち上げ可能である：$V^* = T$．またこのような V は（同型を度外視して）一意的に定まる．

［**証明**］ (i) まず可移な置換加群 $U = (R_H)^G$，$V = (R_L)^G$ に対しては，(8.3) の Φ^* は単準同型であるが，補題 8.3 より両辺の F 上の次元はともに $|L\backslash G/H|$ に等しいから Φ^* は同型である．よって U, V が置換加群のとき，あるいはそれらの直和因子のときも Φ^* は同型である．（以下 (8.4) の両辺を同一視することにする．）

(ii) $E = \mathrm{E}_{RG}(V)$ とおけば $E^* = \mathrm{E}_{FG}(V^*)$ で，E が局所環であることと E^* が局所環であることは同値であるから最初の主張が成り立つ．

次に $\mathrm{vx}(V) = P$，$\mathrm{vx}(V^*) = Q$ とおくと，まず $V|(V_P)^G$ より $V^*|(V^*{}_P)^G$ となるから $Q \le_G P$ である．一方 $\mathrm{E}_{FQ}(V^*) \ni \gamma$ で $\mathrm{id}_{V^*} = \mathrm{Tr}_Q^G(\gamma)$ となるものが存在する

が，(i) より $\lambda \in \mathrm{E}_{RQ}(V)$ で $\lambda^* = \gamma$ となるものがあるから

$$\mathrm{id}_V \equiv \mathrm{Tr}_Q^G(\lambda) \qquad (\mathrm{mod}\ \pi\, \mathrm{E}_{RG}(V))$$

となる．よって $\mathrm{E}_{RG}(V) = \mathrm{Tr}_Q^G(\mathrm{E}_{RQ}(V)) + \pi \mathrm{E}_{RG}(V) = \mathrm{Tr}_Q^G(\mathrm{E}_{RQ}(V))$ となり，V は Q-射影的，したがって $P \leq_G Q$ となる．

(iii) 前半は T が可移な置換加群 $(F_H)^G$ の直和因子のとき示せばよい．$(F_H)^G = T \oplus T'$ とし，τ を T への射影とする．$E = \mathrm{E}_{RG}((R_H)^G)$ とおけば，$((R_H)^G)^* = (F_H)^G$ であるから $E^* = \mathrm{E}_{FG}((F_H)^G)$ となる．よって $\tau \in E^*$ は E のべき等元 ε に持ち上げられる：$\varepsilon^* = \tau$．このとき $V = \varepsilon((R_H)^G)$ とおけば $V^* = T$ となる．

次に一意性を示すため U，V はともに R 上の置換加群の直和因子で，FG-同型 $\gamma: U^* \cong V^*$ が存在するものと仮定する．このとき RG-準同型 $\lambda: U \to V$ で $\lambda^* = \gamma$ となるものがあるが，$V = \lambda(U) + \pi V = \lambda(U)$ となるから λ は全準同型である．一方 U，V は単項イデアル整域 R 上の自由加群で，仮定よりそれらの R 上の階数は等しいから $\mathrm{Ker}\,\lambda = 0$ (I，11.8 (i) 参照)，したがって λ は同型である． □

さて G の p-部分群 Q をヴァーテックスにもつ Scott 加群を $S(Q)$ とすれば，$(F_Q)^G$ は

$$(8.5) \qquad (F_Q)^G = S(Q) \oplus (\bigoplus_i T_i)$$

と直既約分解され，$S(Q)$ は ${}_{FG}(S(Q), F_G) \neq 0$ となる唯一つの直既約因子である．定理 8.9 より (8.5) は $(R_Q)^G$ の直既約分解

$$(R_Q)^G = S'(Q) \oplus (\bigoplus_i V_i) \qquad (S'(Q)^* = S(Q),\ \ V_i{}^* = T_i)$$

に持ち上げられ，$S'(Q)$ は ${}_{RG}(S'(Q), R_G) \neq 0$ となる唯一つの直既約因子で，また $\mathrm{vx}(S'(Q)) = Q$ である．この $S'(Q)$ を Q をヴァーテックスにもつ (R 上の) Scott 加群ということがある．

問 題 IV

(K, R, F) は p-モジュラー系とし，$\mathfrak{o}$ は R または F を表すものとする．

1. $P = \langle x \rangle$ は巡回 p-群とし，P の n 次の F-表現 $\boldsymbol{X}_n$ を次のように与える ($1 \leq n$

$\leq |P|)$：

$$X_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

このとき $\{X_n\,;\,1 \leq n \leq |P|\}$ は P の直既約な F-表現の完全代表系である (Jordan 標準形の理論).

2.　$P = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ $(x^p = y^p = 1)$ と $\alpha \in F$ に対し，P の 2 次の F-表現 X_α を次のように与える．

$$X_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_\alpha(y) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき $\alpha \neq \beta$ ならば X_α と X_β は同値でない．

3.　$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とする．

(i)　P が巡回群ならば $|\mathrm{IND}(FG)| < \infty$ である．

(ii)　P が巡回群でなければ $|\mathrm{IND}(FG)| = \infty$ であることを次の方針で証明せよ．

(a)　$|F| = \infty$ ならば問題 2 に帰着される．

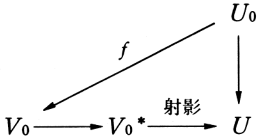
(b)　F が有限体のときは問題 II，8 (ii) を利用する．

4.　(Thompson)　V_0 を RG-表現加群とし，$V_0{}^* = V_0/\pi V_0$ は FG-射影加群 U を直和因子にもつものとする：$V_0{}^* = U \oplus W$．このとき RG-射影加群 U_0 と RG-加群 W_0 があって

$$V_0 \simeq U_0 \oplus W_0 \quad , \qquad U_0{}^* \simeq U \quad , \qquad W_0{}^* \simeq W$$

が成り立つことを以下の方針にしたがって証明せよ．

(i)　(R の完備性から)　$U_0{}^* \simeq U$ となる RG-射影加群 U_0 と次の可換図形がある．



(ii)　$\mathrm{Im}\,f \cap \pi V_0 = \pi\, \mathrm{Im}\, f$.

(iii)　f は単射であって，R-準同型としては分裂する．

(iv)　問 2.3 より $U_0 | V_0$ が成り立つ．

5. $U = eFG$ を F_G の射影被覆とする ($e \in \mathrm{pi}(FG)$).

(i) $\mathrm{Inv}_G(FG) = F\sigma = \mathrm{Tr}_1^G(U) = \mathrm{soc}(U)$. ただし $\sigma = \sum_{x \in G} x$.

(ii) V_{FG} に対し, $\dim_F \mathrm{Tr}_1^G(V)$ は V の直既約分解における U の重複度に等しい.

(iii) H を G の p'-部分群とする. $f = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} x$ とおけば, f は FG のべき等元であって, $U \mid fFG$.

6. $G \triangleright H$, $\bar{G} = G/H$, $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$ とする.

(i) V が H-射影的ならば, $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ が存在して,

$$V_H \simeq a \bigoplus_{t \in T(W) \backslash G} W^t \qquad (a \geq 1).$$

(ii) $\mathrm{Ker}_G V \supset H$ ならば, $\mathrm{vx}(V_{\mathfrak{o}\bar{G}}) = \mathrm{vx}(V)H/H$.

(iii) もし V_H が絶対直既約ならば, $\mathrm{vx}(V)H/H \in \mathrm{Syl}_p(\bar{G})$.

(iv) Y_{FH} に対し, $\Omega^m(Y^G) \simeq \Omega^m(Y)^G \quad (\forall\, m \in \boldsymbol{Z})$.

(v) $p \nmid |G:H|$ ならば, $J(FG) = J(FH)FG$.

(vi) $\bar{G}$ は p 群で, F は代数的閉体と仮定する. このとき $W \in \mathrm{IRR}(FH)$ に対し, $W^G \leftrightarrow |T(W):H|U \ (\exists\, U \in \mathrm{IRR}(FG))$.

7. $G \geq H$ とする. もし $|G:H|$ が p のべきならば, $(\mathfrak{o}_H)^G$ は直既約である.

8. $(K, R, F) \leq (K', R', F')$ とする. $V \in \mathrm{IND}(RG)$ と $\forall\, U \in \mathrm{Comp}(R' \otimes_R V)$ に対し $\mathrm{vx}(U) =_G \mathrm{vx}(V)$.

9. F は代数的閉体と仮定する. $G = G_1 \times G_2$, $V_i \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G_i)$, $\mathrm{vx}(V_i) = P_i \quad (i = 1, 2)$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) $V_1 \otimes_{\mathfrak{o}} V_2 \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G)$.

(ii) $\mathrm{vx}(V_1 \otimes_{\mathfrak{o}} V_2) =_G P_1 \times P_2$.

10. P は G の p-部分群とする. $N = N_G(P)$ とし, $F[N/P] = \bigoplus_{i=1}^{m} a_i W_i$ を主直既約加群への分解とする. このとき

(i) $\mathrm{vx}((W_i)_{FN}) = P \quad (1 \leq i \leq m)$.

(ii) $f = f(G, P, N)$ とし, $V_i = f^{-1}(W_i)$ とおく. このとき $(F_P)^G \simeq M \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} a_i V_i$ と表され, $\forall\, U \in \mathrm{Comp}(M)$ に対し, $\mathrm{vx}(U) \lneqq_G P$.

11. $G \triangleright H$ とし, F は代数的閉体と仮定する. このとき $W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ に対し次が成り立つ:

$$W^G \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G) \iff T(W)/H \text{ は } p \text{ 群}.$$

12. G は F の拡大体 L に作用しているものとし，$F \subset L^G$ と仮定する．このとき自明な因子団をもつ捩れ型の群環 $A = (L, G, 1) = \bigoplus_{x \in G} u_x L$ に対し次が成り立つ．

(i) $N = \{x \in G; \gamma^x = \gamma, \ \forall \gamma \in L\}$ とし，$I = \bigoplus_{x \in N} (u_x - 1)L$ とおけば $IA = AI$．

(ii) N が p 群ならば IA はべき零である．

(iii) $A/IA \simeq M_n(K)$．ただし $K = L^G$，$n = \dim_K L$．

13. $G \triangleright H$，G/H は p 群とする．もし F が有限体ならば，$\forall W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H)$ に対し，W^G は同型な直既約加群の直和である．

14. $G \geq H, T$ とし，$|G : H| = |G : T| = n$ とする．

(i) $(\mathfrak{o}_H)^G \simeq (\mathfrak{o}_T)^G$ ならば H と T の Sylow p-部分群は G-共役である．

(ii) n が p のべきならば上の逆も正しい．

15. G が p' 群ならば任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し，その $\tilde{\boldsymbol{Q}}_p$(p-進数体) 上の Schur 指数は 1 である．

16. (Alperin) G の p-局所部分群から誘導される $\mathfrak{o}G$-加群のいくつかの直和を局所加群とよぶ．$\mathfrak{o}G$-加群 V に対し局所加群 U, U' と射影加群 P, P' が存在して，次の同型が成り立つ：

$$V \oplus U \oplus P \simeq U' \oplus P'$$

(ヒント：V は直既約としてよい．$\mathrm{vx}(V)$ の位数に関する帰納法.)

17. V_{FG}, U_{FG} と $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し　$\Omega^n(V) \otimes_F U \simeq \Omega^n(V \otimes_F U) \oplus P$　が成り立つ．ただし P は射影加群である．

18. $G \geq H$ とする．

(i) W_{FH} が周期加群*ならば，W^G は周期加群と射影加群の直和である．

(ii) V_{FG} が周期加群ならば，V_H は周期加群と射影加群の直和である．

19. P は p 群とし，$\Phi(P)$ を P の Frattini 部分群とする．

(i) $J(F\Phi(P)) \subset J(FP)^2$　が成り立つ．

(ii) $F_0 = \boldsymbol{Z}/(p)$ とすれば $P/\Phi(P)$ は F_0-加群である．このとき次の F-同型が成り立つ：

$$F \otimes_{F_0} P/\Phi(P) \simeq J(FP)/J(FP)^2 \qquad (\alpha \otimes \bar{x} \mapsto \alpha(x-1) + J(FP)^2).$$

(iii) $\Omega^2(F_P) \simeq F_P \iff P$ は巡回群．

---

*) $\Omega^n(W) \simeq W$ となるような自然数 n があるとき W を周期加群とよぶ．

20. $(K,R,F)\leq(K',R',F')$ とする．A は R-多元環とし，V,W を R-有限生成な A-加群とするとき次が成り立つ：

(i)　$V^{R'}|W^{R'}\implies V|W$.

(ii)　$V^{R'}\simeq W^{R'}\implies V\simeq W$.

(ヒント：(i)　まず V を直既約と仮定して証明せよ．I, 11.12 を使う.)

21. (Maranda)　R を任意の離散付値環とし，その商体の標数は $|G|$ を割らないものとする．RG の表現加群 V,W に対し $V/\pi^nV\simeq W/\pi^nW$ がすべての $n\geq 0$ について成り立つならば $V\simeq W$ であることを以下の方針にしたがって証明せよ．ただし $(\pi)=J(R)$ とする．

(i)　n を一つ固定する．同型写像 $V/\pi^nV\simeq W/\pi^nW$ は V,W が R-自由であるから V から W への R-同型 f に持ち上げることができる．したがって任意の $x\in G$ に対し次が成り立つ：

$$f^x-f\equiv 0\qquad \mathrm{mod}\ \pi^n\,\mathrm{Hom}_R(V,W).$$

(ii)　$x\in G$ に対し $g(x)=\pi^{-n}(f^x-f)$ とおくと g は G の 1-コサイクルである；$g\in Z^1(G,\mathrm{Hom}_R(V,W))$.

(iii)　$|G|R=(\pi^k)$ とすれば II, 7.3 (i) より $h\in\mathrm{Hom}_R(V,W)$ があって次が成り立つ：

$$\pi^kg(x)=h^x-h\qquad(\forall x\in G).$$

(iv)　$n>k$ とすると　$(f-\pi^{n-k}h)^x=f-\pi^{n-k}h$　が任意の $x\in G$ について成り立ち，$f-\pi^{n-k}h$ は V から W への RG-同型となる．

V　ブロックの理論

この章ではブロックに関するBrauerの第1，2，3主定理と，主として Fongによるブロックの被覆の理論を主題として関連する事柄についてのべる．特に第2，3主定理についてはGreen，津島，渡辺，Juhász等のアイディアによる新しい証明を与えている．また本書ではBrauer対応を指標を用いるBrauer流の方法で定義しているが，最近のAlperin, Burry等による加群論的な定義との関係は§10でのべてある．最後の§12はAlperinによるGlauberman対応の考察を（Isaacsの方法に従って）少し一般的にのべたものである．

本章を通じて(K, R, F)はp-モジュラー系とし，特に断らない限りKは1の原始$|G|$-乗根を含むものとする．また加群あるいは多元環は係数環上有限生成と仮定する．Rの極大イデアルを(π)と表し，自然な準同型$R \to R/(\pi)=F$による$R \ni \alpha$の像をα^*と表す．R-加群Vについても$V \to V^* = V/\pi V\,(v \mapsto v^* = v + \pi V)$は自然な準同型とする．

IV章と同様に係数環がRのときとFのときを統一して論じたいときは，RまたはFを$\mathfrak{o}$と表す．このときもその極大イデアルを(π)と表す．したがって$\mathfrak{o}=F$のときは$(\pi)=0$である．

§1. ブロックの不足群

この節では系1.10まで，Kは1の原始$|G|$乗根を含まなくてもよいものとする．

次の **Rosenberg の補題** は簡単であるが有用である．

補題 1.1 (Rosenberg) A は $\mathfrak{o}$-多元環とし，$I_1, \cdots, I_r$ は A のイデアルとする．このとき $\mathrm{pi}(A) \ni e$ が $I_1 + \cdots + I_r$ に含まれるならば，e はある I_i に含まれる．

［**証明**］ $e \in eI_1e + \cdots + eI_re \subset eAe$ となり，eAe は e を単位元とする局所環である．よって $eI_ie \subsetneqq eAe$ $(\forall i)$ ならば各 $eI_ie \subset J(eAe)$ となり，$e \in J(eAe)$ となって矛盾である．□

まず話を少し一般にして G-多元環について考察する．G は群，A は $\mathfrak{o}$ 上の G-多元環とし，G の部分群 H に対し $\mathrm{Inv}_H A$ を A^H と表すことにする．またトレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G\colon A^H \to A^G$ の像を $\mathrm{Tr}_H^G(A)$ と略記し

$$A_H^G = \mathrm{Tr}_H^G(A) + \pi A^G$$

とおく．このとき IV，1.6 より A_H^G は A^G のイデアルで，また G の部分群 H，L に対して次が成り立つ：

(1.1) $$A_H^G A_L^G \subset \sum_{t \in H\backslash G/L} A_{H^t \cap L}^G.$$

定理 1.2 $\mathrm{pi}(A^G) \ni e$ に対し，次の 2 条件をみたす G の p-部分群 D が G-共役を度外視して一意的に定まる：

(a) $e \in A_D^G$.

(b) $e \in A_H^G \Longrightarrow D \leq_G H$.

［**証明**］ D は $e \in A_D^G$ をみたす位数最小の部分群とする．G の部分群 H に対し $e \in A_H^G$ とすれば，(1.1) より

$$e \in A_D^G A_H^G \subset \sum_t A_{D^t \cap H}^G$$

となり，Rosenberg の補題より $e \in A_{D^t \cap H}^G$ となる t がある．このとき D の位数の最小性より $D^t \cap H = D^t \leq H$ となり (b) が成り立つ．またこれから（G-共役を度外視しての）一意性も導かれる．

さらに $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とすれば，$e = 1/|G:P|\mathrm{Tr}_P^G(e) \in A_P^G$ であるから $D \leq_G P$ となり，D は p-部分群である．□

上の定理のような p-部分群 D を e $(\in \mathrm{pi}(A^G))$ の **不足群** とよび，その一つ

を $\delta(e)$ と表す．

問 1.3 $\mathrm{pi}(A^G) \ni e$ に対し次が成り立つ：

$$e \in A_H^G \Longleftrightarrow e \in \mathrm{Tr}_H^G(A).$$

不足群とヴァーテックスの間には次のような関係がある．

定理 1.4 $\mathfrak{o}G$-加群 V に対し $E = \mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(V)$ とおく．このとき $E^G = \mathrm{E}_{\mathfrak{o}G}(V)$ の原始べき等元 ε に対し次が成り立つ：

$$\delta(\varepsilon) =_G \mathrm{vx}(\varepsilon V).$$

［証明］ $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(\varepsilon V) = \varepsilon E \varepsilon$ において ε は単位元で，$\varepsilon \in \mathrm{Tr}_H^G(E)$ となることと $\varepsilon \in \mathrm{Tr}_H^G(\varepsilon E \varepsilon)$ となることは同値である．よって IV，2.2 より $\delta(\varepsilon)$ は εV のヴァーテックスである．□

以下 $A = \mathfrak{o}G$ について考える．これは共役の作用で G-多元環となり，このとき $A^G = Z(\mathfrak{o}G)$ （$\mathfrak{o}G$ の中心）である．

補題 1.5 $G \geq H$ とし，G の元 x を含む G-共役類と H-共役類をそれぞれ C，C' とする．このとき次が成り立つ：

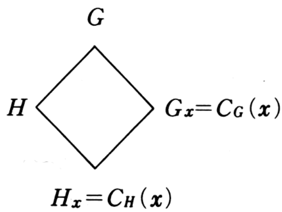
$$\mathrm{Tr}_H^G(\widehat{C'}) = |C_G(x) : C_H(x)|\, \widehat{C}.$$

［証明］ 簡単のため $G_x = C_G(x)$，$H_x = C_H(x)$ とおく．このとき

$$\widehat{C} = \mathrm{Tr}_{G_x}^G(x), \qquad \widehat{C'} = \mathrm{Tr}_{H_x}^H(x)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_H^G(\widehat{C'}) &= \mathrm{Tr}_{H_x}^G(x) = \mathrm{Tr}_{G_x}^G(\mathrm{Tr}_{H_x}^{G_x}(x))\\ &= |G_x : H_x|\,\mathrm{Tr}_{G_x}^G(x)\\ &= |G_x : H_x|\,\widehat{C} \quad \square\end{aligned}$$



III，§6.5 で定義したように $\mathrm{Cl}(G) \ni C \ni x$ に対し $C_G(x)$ の Sylow p-部分群を C の不足群とよび，その一つを $\delta(C)$ と表す．

問 1.6 補題 1.5 の記号のもとで

$$|C_G(x) : C_H(x)| \not\equiv 0 \pmod{p} \ \exists\, x \in C \Longleftrightarrow \delta(C) \leq_G H.$$

III，§6.4 と同様に RG を (RG, RG)-加群とみたときの直既約分解

$$RG = \bigoplus_{B \in \mathrm{Bl}(G)} B$$

の各直既約因子 B を G のブロックとよび，その単位元 e_B ($\in \mathrm{pi}(Z(RG))$) をブロックべき等元という．また

(1.2) $$e_B = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \beta_B(C)\hat{C} \qquad (\beta_B(C) \in R)$$

とする．

G の p-部分群 Q に対し

(1.3) $$Z_Q(\mathfrak{o}G) = \sum_{\delta(C) \leq_G Q} \mathfrak{o}\hat{C} + \pi Z(\mathfrak{o}G) \qquad (C \in \mathrm{Cl}(G))$$

とおくとき次が成り立つ．

補題 1.7　$G \geq Q$ を p-部分群とするとき

(i)　$(\mathfrak{o}G)_Q^G = Z_Q(\mathfrak{o}G)$.

(ii)　$(FG)_Q^G = (RG)_Q^G/\pi Z(RG)$.

(iii)　ブロックべき等元 e_B に対し

$$e_B \in (RG)_Q^G \Longleftrightarrow e_B{}^* \in (FG)_Q^G.$$

また不足群について $\delta(e_B) = \delta(e_B{}^*)$ が成り立つ．

(iv)　(1.2) において

$$\beta_B(C)^* \neq 0 \Longrightarrow \delta(C) \leq_G \delta(e_B).$$

またある $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し $\beta_B(C)^* \neq 0$，かつ $\delta(C) =_G \delta(e_B)$ が成り立つ．

［**証明**］ (i)　$(\mathfrak{o}G)_Q^G = \sum_{C'} \mathfrak{o}\mathrm{Tr}_Q^G(\hat{C}') + \pi Z(\mathfrak{o}G)$ (C' は G における Q-共役類) であるから，補題 1.5 と問 1.6 から $(\mathfrak{o}G)_Q^G \subset Z_Q(\mathfrak{o}G)$ が成り立つ．一方 $\delta(C) \leq_G Q$ のとき，$C \ni x$ を $|C_G(x) : C_Q(x)|$ が p と素になるようにとり，x を含む Q-共役類を C' とすれば，$\hat{C} = |C_G(x) : C_Q(x)|^{-1}\,\mathrm{Tr}_Q^G(\hat{C}')$ となるから $Z_Q(\mathfrak{o}G) \subset (\mathfrak{o}G)_Q^G$ が成り立つ．

(ii) は (i) より，(iii) は (ii) より明らかである．

(iv)　$D = \delta(e_B)$ とおくと，$e_B{}^* \in (FG)_D^G = Z_D(FG)$ より前半は明らかである．また後半が成り立たないと仮定すると $e_B{}^* \in \sum_{Q \lneqq D} Z_Q(FG)$ となり，Rosenberg の補題より $e_B{}^* \in Z_Q(FG)$ となる $Q \lneqq D$ が存在して矛盾である．□

ブロックべき等元 e_B の不足群 $\delta(e_B)$ を**ブロック B の不足群**とよび $\delta(B)$ と表す．

$G \geq H$ のとき，G における H-共役類の全体を $\mathrm{Cl}_H(G)$ と表す．このとき $(\mathfrak{o}G)^H = \bigoplus_{C' \in \mathrm{Cl}_H(G)} \mathfrak{o}\widehat{C}'$ となり，$\mathrm{Cl}_H(G) \ni C' \ni x$ ならば $\widehat{C}' = \mathrm{Tr}^H_{C_H(x)}(x)$ である．

次の補題は後で Brauer による一連の主定理を証明する際にも必要になる．

補題 1.8 (Green-津島) $G \geq H$ とし，V は$\mathfrak{o}$-自由な $\mathfrak{o}G$-加群とし，$\mathfrak{o}H$-加群 W は V_H の直既約因子とする．また $\mathrm{Cl}_H(G) = \{C_1', \cdots, C_r'\}, C_i' \ni x_i$ とする．このとき $(\mathfrak{o}G)^H \ni a = \sum_{i=1}^r \alpha_i \widehat{C}_i'$ に対し $Wa = W$ となるならば次のような i が存在する：

$$\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{(\pi)} \quad かつ \quad W は C_H(x_i)\text{-射影的.}$$

[**証明**] 一般に $c \in \mathfrak{o}G$ は $\mathfrak{o}$-準同型 $\gamma_c : V \to V$ $(v \mapsto vc)$ を引き起し，$G \ni x$ に対し $(\gamma_c)^x = \gamma_{x^{-1}cx}$ となる．よって $\mathrm{Tr}^H_{C_H(x_i)}(\gamma_{x_i}) = \sum_{x \in C_i'} \gamma_x$ となり，特に $\gamma_a = \sum_i \alpha_i \mathrm{Tr}^H_{C_H(x_i)}(\gamma_{x_i})$ である．いま γ_c の W への制限を γ_c' と表すことにすれば，仮定により $\gamma_a'(W) = W$ で，W は $\mathfrak{o}$-自由であるから $\mathrm{Ker}\,\gamma_a' = 0$ となり，γ_a' は W の $\mathfrak{o}H$-自己同型である．

直和分解 $V_H = W \oplus W'$ における W への射影を π_W とすると，これは $\mathfrak{o}H$-準同型で次が成り立つ：

$$\mathrm{id}_W = \gamma_a'^{-1}\pi_W\gamma_a' = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathrm{Tr}^H_{C_H(x_i)}(\gamma_a'^{-1}\pi_W\gamma_{x_i}').$$

ここで $\mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(W)$ は局所環であるから I, 5.8 よりある i に対し $\alpha_i \mathrm{Tr}^H_{C_H(x_i)}(\gamma_a'^{-1}\pi_W\gamma_{x_i}')$ はその正則元になる．このとき $\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$，かつ $\mathrm{Tr}^H_{C_H(x_i)}(\mathrm{E}_{\mathfrak{o}}(W)) = \mathrm{E}_{\mathfrak{o}H}(W)$ となって W は $C_H(x_i)$-射影的である (IV, 2.2 (3) 参照)．□

さて直既約加群のヴァーテックスと，それが属するブロックの不足群の間には次のような関係がある．

定理 1.9 (Green) V は $\mathfrak{o}$-自由な直既約 $\mathfrak{o}G$-加群でブロック B に属するとする．このとき次が成り立つ．

(i) $\mathrm{vx}(V) \leq_G \delta(B)$.

(ii) $\nu(\mathrm{rank}_{\mathfrak{o}} V) \geq \nu(|G|) - \nu(|\delta(B)|)$.

特に上で等号が成立すれば $\mathrm{vx}(V) =_G \delta(B)$ である．

［**証明**］ $e_B=\sum_C \beta_B(C)\hat{C}$ とすれば $Ve_B=V$ であるから，上の補題で $H=G$ として，ある $C\in \mathrm{Cl}(G)$ に対し $\beta_B(C)^*\neq 0$，かつ V は $\delta(C)$-射影的になる．このとき $\mathrm{vx}(V)\leq_G \delta(C)\leq_G \delta(B)$ （補題 1.7 参照）となり (i) が成り立つ．また (ii) は IV, 7.5 から容易に導かれる．□

系 1.10 V は R-自由な RG-加群で V^K は既約な KG-加群とする．またその既約指標 $\chi\in \mathrm{Irr}(B)$ と仮定する．このとき

(i) $G\ni x$ に対し

$$x_p\notin_G \delta(B) \Longrightarrow \chi(x)=0.$$

(ii) $$\mathrm{ht}(\chi)=0 \Longrightarrow \mathrm{vx}(V)=_G \delta(B).$$

［**証明**］ V_{RG} は明らかにブロック B に属する直既約加群であるから，上の定理より $\mathrm{vx}(V)\leq_G \delta(B)$ である．よって IV, 7.4 より (i) がえられる．また (ii) は上の定理の (ii) より明らかである．□

この節では以下

<u>K は 1 の原始 $|G|$ 乗根を含む</u>

と仮定する．

III, § 6.4 と同様に $\omega_B{}^*$ は B に属する $Z(FG)$ の既約表現を表す．また $G_{p'}$ は G の p-正則元の全体，$\mathrm{Cl}(G_{p'})$ は p-正則な G-共役類の全体とする．このとき III, 6.22 (ii) より次が成り立つ：

$$\beta_B(C)\neq 0 \Longrightarrow C\in \mathrm{Cl}(G_{p'}).$$

このことと補題 1.7 (iv) より次の定理の (i) は明らかである．

定理 1.11 ブロック B の不足群 $\delta(B)$ について次が成り立つ．

(i) $\delta(B)$ は $\beta_B(C)^*\neq 0$ となる p-正則な共役類 C の不足群 $\delta(C)$ のうち（G-共役を度外視して）最大のものである．

(ii) $\omega_B{}^*(\hat{C})\neq 0 \Longrightarrow \delta(B)\leq_G \delta(C)$.

また p-正則な共役類 C で $\omega_B{}^*(\hat{C})\neq 0$，かつ $\delta(C)=_G \delta(B)$ をみたすものが存在する．

したがって $\delta(B)$ は $\omega_B{}^*(\hat{C})\neq 0$ となる p-正則な共役類の不足群 $\delta(C)$ の

うち（G-共役を度外視して）最小のものである．

(iii) B の不足群と不足数の間には次の関係がある：

$$|\delta(B)| = p^{d(B)}.$$

［証明］ (ii) $Z(B^*)$ は局所環であるから，$\omega_B{}^*(\hat{C}) \neq 0$ とすれば $\omega_B{}^*(\hat{C}) = \omega_B{}^*(e_B{}^*\hat{C}) \neq 0$ より $e_B{}^*\hat{C}$ は $Z(B^*)$ の正則元である．よって $Z(B^*) = Z(B^*)\hat{C} \ni e_B{}^*$ となる．$\delta(C) = Q$ とおけば，$\hat{C} \in Z_Q(FG)$ で $Z_Q(FG)$ は $Z(FG)$ のイデアルであるから $e_B{}^* \in Z_Q(FG)$ となり，$\delta(B) \leq_G Q$ をえる．

また $1 = \omega_B{}^*(e_B{}^*) = \sum_C \beta_B(C)^* \omega_B{}^*(\hat{C})$ より $\beta_B(C)^* \neq 0$，かつ $\omega_B{}^*(\hat{C}) \neq 0$ となる $C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ がある．このとき $\delta(C) =_G \delta(B)$ である．

(iii) $\beta_B(C)^* \neq 0 \neq \omega_B{}^*(\hat{C})$ となる C をとれば $\delta(C) =_G \delta(B)$ となり $|\delta(B)| = |\delta(C)| = p^{d(c)}$ をえる．一方このとき，III，6.27 より $d(C) = d(B)$ となるから $|\delta(B)| = p^{d(B)}$ である．□

上の証明の中で示したように，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $\mathrm{Cl}(G_{p'}) \ni C$ で

$$\beta_B(C)^* \neq 0 \neq \omega_B{}^*(\hat{C})$$

となるものがある．このような C をブロック B の **不足類** とよぶことにする．(注意：不足類は一意的に定まるものではない.)

系 1.12 $\mathrm{Bl}(G) \ni B, B'$，$\delta(B) =_G \delta(B')$ と仮定する．このとき $B = B'$ となるため必要十分な条件は，$\delta(C) =_G \delta(B)$ となる任意の $C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})$ に対して $\omega_B{}^*(\hat{C}) = \omega_{B'}{}^*(\hat{C})$ が成り立つことである．

［証明］ 必要条件であることは明らかである．十分条件であることは次のように示される．$\delta(B') =_G \delta(B)$ と定理 1.11 より

$$\omega_{B'}{}^*(e_B{}^*) = \sum_{\substack{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'}) \\ \delta(C) =_G \delta(B)}} \beta_B(C)^* \omega_{B'}{}^*(\hat{C}) = \omega_B{}^*(e_B{}^*) = 1.$$

よって $B' = B$ をえる．□

§2. Brauer 準同型と第1主定理

この節では K は必ずしも1の原始 $|G|$ 乗根を含まなくてもよいものとする．

2.1 Brauer 準同型

$\mathrm{Cl}(G) = \{C_\alpha\}_{1\le\alpha\le k}$, $C_\alpha \ni x_\alpha$ とし，$Z(RG)$において

$$\widehat{C}_\alpha\widehat{C}_\beta = \sum_\gamma t_{\alpha\beta\gamma}\widehat{C}_\gamma \tag{2.1}$$

とおけば

$$t_{\alpha\beta\gamma} = \#\{(a,b) \in C_\alpha\times C_\beta;\ ab = x_\gamma\} \tag{2.2}$$

である.

補題2.1　$t_{\alpha\beta\gamma} \not\equiv 0 \pmod p \Longrightarrow \delta(C_\gamma) \le_G \delta(C_\alpha)$, $\delta(C_\gamma) \le_G \delta(C_\beta)$.

[証明]　$\delta(C_\gamma) = Q \in \mathrm{Syl}_p(C_G(x_\gamma))$ とすれば，(2.2) の右辺の集合は共役の作用で Q-集合となり，仮定により長さ1の Q-軌道 $\{(a,b)\}$ がある. このとき $Q \le C_G(a) \cap C_G(b)$ となる. □

以下 $G \ge Q$ は p-部分群とし，$\mathrm{Cl}(G) \ni C$ に対し $C^0 = C \cap C_G(Q)$ とおく. このとき C^0 は (共役の作用で) $N_G(Q)$-不変で，したがって $N_G(Q)$ のいくつかの共役類の和集合である.

問2.2　$C^0 \ne \phi \Longleftrightarrow Q \le_G \delta(C)$.

定理2.3　$C_G(Q) \le H \le N_G(Q)$ とするとき，$Z(FH)$ において次が成り立つ：

$$\widehat{C}^0_\alpha\widehat{C}^0_\beta = \sum_\gamma t^*_{\alpha\beta\gamma}\widehat{C}^0_\gamma.$$

よって次の多元環準同型

$$\mathrm{Br}_Q\colon\ Z(FG) \longrightarrow Z(FH)\quad (\widehat{C} \mapsto \widehat{C}^0)$$

がえられる.（ただし $C^0 = \phi$ のときは $\widehat{C}^0 = 0$ とする.）

[証明]　$x_\gamma \in C^0_\gamma = C_\gamma \cap C_G(Q)$ とするとき

$$\#\{(a,\ b) \in C^0_\alpha\times C^0_\beta;\ ab = x_\gamma\} \equiv t_{\alpha\beta\gamma} \pmod p$$

を示せばよい. いま $C'_\alpha = C_\alpha - C^0_\alpha$ とおけば，$C^0_\alpha C'_\beta$ と $C'_\alpha C^0_\beta$ はともに x_γ を含まない. よって　$C_\alpha\times C_\beta = C^0_\alpha\times C^0_\beta \cup C^0_\alpha\times C'_\beta \cup C'_\alpha\times C^0_\beta \cup C'_\alpha\times C'_\beta$　において，$X = \{(a,\ b) \in C^0_\alpha\times C^0_\beta;\ ab = x_\gamma\}$, $Y = \{(a',\ b') \in C'_\alpha\times C'_\beta;\ a'b' = x_\gamma\}$　とおくとき $t_{\alpha\beta\gamma} = |X|+|Y|$ となる. ここで Y は Q-集合で，$Y \ne \phi$ ならばその Q-軌道の長さはすべて1より大であるから $|Y| \equiv 0 \pmod p$ となり $|X| \equiv t_{\alpha\beta\gamma} \pmod p$ をえる. □

問 2.4 $\operatorname{Ker}\mathrm{Br}_Q=\sum_{Q\not\leq_G\delta(C)}F\hat{C}$.

上の定理の準同型 Br_Q を（(G,Q,H) に関する）**Brauer 準同型** とよぶ．ブロックの不足群は Brauer 準同型によって次のように特徴づけることができる．

定理 2.5 G のブロックべき等元 e_B に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*)\neq 0 \iff Q\leq_G\delta(B).$$

すなわち B の不足群 $\delta(B)$ は，$\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*)\neq 0$ となる p-部分群 Q のうち（G-共役を度外視して）最大のものである．

［**証明**］ 補題 1.7 (iv) より

$$e_B{}^*=\sum_{\delta(C)\leq_G\delta(B)}\beta_B(C)^*\hat{C}.$$

($\Rightarrow$) $Q\not\leq_G\delta(B)$ と仮定すれば，$\delta(C)\leq_G\delta(B)$ となる $C\in \mathrm{Cl}(G)$ に対し $Q\not\leq_G\delta(C)$ であるから $e_B{}^*\in\operatorname{Ker}\mathrm{Br}_Q$ となる．

($\Leftarrow$) $\beta_B(C)^*\neq 0$ かつ $\delta(C)=_G\delta(B)$ となる $C\in\mathrm{Cl}(G)$ があるから，$Q\leq_G\delta(B)$ ならば問 2.4 より $e_B{}^*\notin\operatorname{Ker}\mathrm{Br}_Q$ である．□

$C_G(Q)\leq H\leq N_G(Q)$ のとき，$\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*)\neq 0$ ならばこれは $Z(FH)$ のべき等元であるから，$Z(FH)$ において

$$\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*)=e_{b_1}{}^*+\cdots\cdots+e_{b_r}{}^*$$

と原始べき等元分解される．このとき $\mathrm{Bl}(H)\ni b_i$ $(1\leq i\leq r)$ は（(Q,H) に関して）B（$\in\mathrm{Bl}(G)$）に **随伴するブロック** であるという．

2.2 第1主定理

G のブロック B で Q を不足群にもつものの全体を $\mathrm{Bl}(G|Q)$ と表す：$\mathrm{Bl}(G|Q)=\{B\in\mathrm{Bl}(G)\,;\,\delta(B)=_G Q\}$．Brauer の**第1主定理**（定理 2.15）は $\mathrm{Bl}(G|Q)$ と $\mathrm{Bl}(N_G(Q)|Q)$ が Brauer 準同型 Br_Q を通して1対1に対応することを主張するもので，それを示すため準備をしておく．

$G\triangleright H$ とし，$\bar{G}=G/H$ とおく．このとき自然な環準同型

$$\mu_H:\ FG\to F\bar{G}\qquad \Big(\sum_{x\in G}a_x x\mapsto\sum_{x\in G}a_x\bar{x}\Big)$$

が考えられる．特に $H=G$ のとき，すなわち

$$\mu_G:\ FG \to F \qquad (\sum_x a_x x \mapsto \sum_x a_x)$$

を FG の**添加写像**（augmentation map）といい，$\mathrm{Ker}\,\mu_G$ を**添加イデアル**（augmentation ideal）とよんで $I(G)$ と表す．明らかに次が成り立つ：

$$I(G) = \mathrm{Ker}\,\mu_G = \bigoplus_{x \in G} F(x-1).$$

なお以上の用語は F が一般の可換環の場合にも用いられる．

補題 2.6 $G \triangleright H, \bar{G} = G/H$ とする．

(i) $\mathrm{Ker}\,\mu_H = I(H)\cdot FG = FG\cdot I(H)$.

(ii) $\mathrm{Cl}(G) \ni C \ni x$ とし，$\bar{x}$ を含む $\bar{G}$ の共役類を $\bar{C}$ とすれば

$$\mu_H(\hat{C}) = |C_{\bar{G}}(\bar{x}) : \overline{C_G(x)}\|H : C_H(x)|\hat{\bar{C}}.$$

(iii) 上の(ii)において $\mu_H(\hat{C}) \neq 0$ となるため必要十分な条件は，次の2条件がともにみたされることである：

(a) $\delta(C)$ は H のある Sylow p-部分群を含む．

(b) $\overline{C_G(x)} = HC_G(x)/H$ は $C_{\bar{G}}(\bar{x})$ のある Sylow p-部分群を含む．

［**証明**］ (i) $FG \ni a = \sum_{t \in H\backslash G}\sum_{h \in H} a_{ht}ht$ に対し

$$\mu_H(a) = \sum_{\bar{t} \in \bar{G}}(\sum_{h \in H} a_{ht})\,\bar{t}$$

となることから明らかである．

(ii) $\bar{C} \ni \bar{x}$ に対し $\bar{y} = \bar{x}$ となる $y \in C$ の個数は $\bar{x}$ のとり方によらず一定で，それぞれ $|C|/|\bar{C}|$ 個ずつあるから $\mu_H(\hat{C}) = |C|/|\bar{C}|\hat{\bar{C}}$ である．ここで $C_G(\bar{x}) = \{a \in G \mid \bar{a}^{-1}\bar{x}\bar{a} = \bar{x}\}$ とおけば，$C_{\bar{G}}(\bar{x}) = C_G(\bar{x})/H$ であるから

$$\begin{aligned}|C|/|\bar{C}| &= |G : C_G(x)|/|G : C_G(\bar{x})| = |C_G(\bar{x}) : C_G(x)|\\ &= |C_G(\bar{x}) : HC_G(x)\|HC_G(x) : C_G(x)|\\ &= |C_G(\bar{x})/H : HC_G(x)/H\|H : H \cap C_G(x)|\\ &= |C_{\bar{G}}(\bar{x}) : \overline{C_G(x)}\|H : C_H(x)|\end{aligned}$$

となる．

(iii) $\mu_H(\hat{C}) \neq 0$ となることと $|C|/|\bar{C}| \not\equiv 0 \pmod p$ となることは同値であるから明らかである．□

次に $N_G(Q)$ のように p-部分群 Q を正規部分群にもつ群について考察しよ

う.

補 題 2.7 $G \triangleright Q$ は p-部分群とする. このとき

(i) $\operatorname{Ker}\mu_Q \subset J(FG)$.

(ii) $\operatorname{Cl}(G) \ni C$ に対し次が成り立つ：

$$Q \leq \delta(C) \iff C \subset C_G(Q), \tag{2.3}$$

$$Q \not\leq \delta(C) \Longrightarrow \hat{C} \in J(Z(FG)). \tag{2.4}$$

(iii) P は G の p-部分群で $Q \not\leq P$ ならば, $Z_P(FG)$ は $Z(FG)$ のべき零イデアルである.

[証 明] (i) Q は p-群であるから $I(Q)$ は FQ のべき零イデアルである. したがって $\operatorname{Ker}\mu_Q = I(Q)\cdot FG = FG\cdot I(Q)$ もべき零で $J(FG)$ に含まれる.

(ii) (2.3) は $C_G(Q) \triangleleft G$ より明らかである. また $Q \not\leq \delta(C)$ ならば補題2.6で $H = Q$ とおいて, (iii) の条件 (a) がみたされないから $\hat{C} \in \operatorname{Ker}\mu_Q \cap Z(FG) \subset J(Z(FG))$ となる.

(iii) $Z_P(FG) = \sum_{\delta(C) \leq_G P} F\hat{C}$ であるが, $\delta(C) \leq_G P$ ならば $Q \not\leq \delta(C)$ となるから, (2.4) より $Z_P(FG) \subset J(Z(FG))$ をえる. □

定 理 2.8 $G \triangleright Q$ が p-部分群ならば, 任意の $B \in \operatorname{Bl}(G)$ に対し次が成り立つ.

(i) $Q \leq \delta(B)$.

(ii) $e_B \in (RC_G(Q))^G \quad (= \operatorname{Inv}_G(RC_G(Q)) \subset Z(RC_G(Q)))$.

[証 明] (i) $D = \delta(B)$ とおけば $e_B{}^* \in Z_D(FG)$ である. ここで $Q \not\leq D$ とすれば, 上の補題 (iii) より $Z_D(FG)$ はべき零となり矛盾である.

(ii) $e_B = \sum_C \beta_B(C)\hat{C}$ において $e_1 = \sum_{Q \leq \delta(C)} \beta_B(C)\hat{C}$, $e_2 = \sum_{Q \not\leq \delta(C)} \beta_B(C)\hat{C}$ とおけば, 上の補題より $e_2{}^*$ はべき零で, $e_2{}^{*p^m} = 0$ となる m がある. このとき $e_B{}^* = e_B{}^{*p^m} = e_1{}^{*p^m} + e_2{}^{*p^m} = e_1{}^{*p^m} \in Z(FC_G(Q))$ となる. ここで $Z(RC_G(Q))^* = Z(FC_G(Q))$ であるから $Z(RC_G(Q))$ のべき等元 ε で $\varepsilon^* = e_B{}^*$ となるものが唯一つ定まる (I, 14.2, 4.6参照). このとき任意の $x \in G$ に対し $\varepsilon^x \in Z(RC_G(Q))$, $(\varepsilon^x)^* = (\varepsilon^*)^x = e_B{}^{*x} = e_B{}^*$ となるから $\varepsilon^x = \varepsilon$, したがって $\varepsilon \in Z(RG)$ である. よって I, 4.6 より $e_B = \varepsilon \in (RC_G(Q))^G$ をえる. □

G の単位表現 $\mathbf{1}_G$ の属するブロックを G の **主ブロック** とよび，普通 $B_0(G)$ または単に B_0 と表す．

問2.9　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対して $\delta(B) \in \mathrm{Syl}_p(G)$ となることと，$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ で $(p, \chi(1)) = 1$ となるものが存在することは同値である．特に B_0 を G の主ブロックとすれば $\delta(B_0) \in \mathrm{Syl}_p(G)$ である．

問2.10　G の正規 p-部分群 $Q \lhd G$ が存在して $C_G(Q) \leq Q$ をみたせば G のブロックは主ブロックのみである．(ヒント：定理2.8 (ii) で $C_G(Q)$ は p-群である．)

以下では環 A のイデアル I を (単位元をもつとは限らない) 環と考えることがある．このとき I における原始べき等元は I，§4 と同様に定義され，その全体を $\mathrm{pi}(I)$ と表す．

補題2.11　A は (単位元をもつ) 可換なアルチン環とし，$I_0 \subset I$ はともに A のイデアルとする．また $\bar{A} = A/I_0$ とおく．このとき次が成り立つ．

(i)　$\{e \in \mathrm{pi}(A)\,;\, e \in I\} = \mathrm{pi}(I)$.

(ii)　自然な準同型 $\varphi : A \to \bar{A}$ により $\{e \in \mathrm{pi}(A); e \in I, e \notin I_0\}$ と $\mathrm{pi}(\bar{I}) = \mathrm{pi}(I/I_0)$ の間に1対1の対応がつく．

[**証明**]　(i)　左辺 $\subset$ 右辺 は明らかである．逆に $\mathrm{pi}(I) \ni e$ が A において $e = e_1 + e_2$ と直交するべき等元の和に分解されたとすれば，$e_i = ee_i \in I$ $(i = 1, 2)$ となり矛盾である．よって $e \in \mathrm{pi}(A)$ となる．

(ii)　$e \in \mathrm{pi}(A)$，$e \notin I_0$ とすれば，eA $(= eAe)$ は局所環で $eI_0 \subsetneq eA$ である．よって $\bar{e}\bar{A} \simeq eA/eI_0$ も局所環で $\bar{e} \in \mathrm{pi}(\bar{A})$ となる．

$1 = (\sum_{e \notin I_0} e) + (\sum_{e' \in I_0} e')$　を1の原始べき等元分解とすれば，$\bar{1} = \sum_{e \notin I_0} \bar{e}$ は $\bar{1}$ の原始べき等元分解となり，φ は全単射　$\{e \in \mathrm{pi}(A)\,;\, e \notin I_0\} \to \mathrm{pi}(\bar{A})$　を引き起す．ここで $e \in \mathrm{pi}(A)$，$e \notin I_0$ のとき，$e \in I$ と $\bar{e} \in \bar{I}$ とは同じことであるから主張が成り立つ．□

$G \geq Q$ が p-部分群のとき

$$Z_Q^0(FG) = \sum_{\delta(C) =_G Q} F\hat{C}, \qquad Z_Q^1(FG) = \sum_{\delta(C) \lneq_G Q} F\hat{C}$$

とおく．(注意：上で $\delta(C) \lneqq_G Q$ は $\delta(C)$ が Q のある真部分群に G-共役であることを意味する．) このとき

$$Z_Q(FG) = Z_Q^0(FG) \oplus Z_Q^1(FG) \tag{2.5}$$

となり，$Z_Q^1(FG) = \sum_{X \lneqq Q} Z_X(FG)$ であるからこれは $Z(FG)$ のイデアルである．

補題 2.12 $G \geq Q$ が p-部分群のとき次が成り立つ．

(i) $Z_Q(FG) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Br}_Q = Z_Q^1(FG)$.

(ii) $\{e_B{}^* ; B \in \mathrm{Bl}(G|Q)\} = \{e_B{}^* ; e_B{}^* \in Z_Q(FG),\ e_B{}^* \notin Z_Q^1(FG)\}$ で，これは $\mathrm{pi}(Z_Q(FG)/Z_Q^1(FG))$ と (自然な準同型で) 1対1に対応する．

[証明] (i) 問2.4より明らかである．

(ii) 前半は明らか．後半は補題2.11 (ii) で $A = Z(FG)$, $I = Z_Q(FG)$, $I_0 = Z_Q^1(FG)$ とおいてえられる．□

補題 2.13 $G \rhd Q$ が p-部分群のとき，(2.5) について次が成り立つ．

(i) $Z_Q^1(FG)$ は $Z(FG)$ のべき零イデアルである．

(ii) $\mathrm{Br}_Q(Z_Q(FG)) = Z_Q^0(FG)$ で，これは (単位元をもつとは限らない) 環である．

(iii) $\mathrm{pi}(Z_Q(FG)) = \mathrm{pi}(Z_Q^0(FG)) = \{e_B{}^* ; B \in \mathrm{Bl}(G|Q)\}$.

[証明] (i) 補題2.7より明らかである．

(ii) (2.5) と補題2.12 (i) より $\mathrm{Br}_Q(Z_Q(FG)) = \mathrm{Br}_Q(Z_Q^0(FG))$ となるが，Br_Q の定義から $\mathrm{Br}_Q(Z_Q^0(FG)) = Z_Q^0(FG)$ である．

(iii) 定理2.8 (ii) より $\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*) = e_B{}^*$ ($\forall B = \mathrm{Bl}(G)$) である．したがって $Z_Q(FG) \ni e_B{}^*$ ならば上の (ii) より $Z_Q^0(FG) \ni e_B{}^*$ ($\notin Z_Q^1(FG)$) となり，$\{e_B{}^* ; B \in \mathrm{Bl}(G|Q)\} = \mathrm{pi}(Z_Q(FG))$ がえられる．また補題2.12 (ii) より $\mathrm{pi}(Z_Q(FG)) = \mathrm{pi}(Z_Q^0(FG))$ となる．□

最後に群論的な補題を一つ準備しておく．

$G \geq Q$ が p-部分群のとき

$$\mathrm{Cl}(G|Q) = \{C \in \mathrm{Cl}(G) ; \delta(C) =_G Q\}$$

とおく．このとき次が成り立つ．

補題 2.14 $N = N_G(Q)$ とおくとき

$$\mathrm{Cl}(G \mid Q) \ni C \Longrightarrow C^0 = C \cap C_G(Q) \in \mathrm{Cl}(N \mid Q).$$

また C に C^0 を対応させて $\mathrm{Cl}(G \mid Q)$ と $\mathrm{Cl}(N \mid Q)$ は 1 対 1 に対応する．

［**証 明**］ $\mathrm{Cl}(G \mid Q) \ni C$ とするとき，$C \cap C_G(Q) \ni x, y$ に対し $y = x^a$ となる $a \in G$ がある．Q は $C_G(x), C_G(y)$ の Sylow p-部分群であるが，Q^a はまた $C_G(x)^a = C_G(y)$ の Sylow p-部分群であるから $Q^{ac} = Q$ となる $c \in C_G(y)$ がある．このとき $ac \in N = N_G(Q)$，$x^{ac} = y$ となるから $C \cap C_G(Q)$ は N の一つの共役類である．また Q がその不足群であることは明らかである．

後半は C に C^0 を対応させる写像が単射であることは明らかであるから，これが全射であることを示せばよい．そのため $\mathrm{Cl}(N \mid Q) \ni C'$ とすれば $C' \subset C_G(Q)$ である．$C' \ni x$ とし，また C' を含む $C \in \mathrm{Cl}(G)$ をとる．このとき $Q \notin \mathrm{Syl}_p(C_G(x))$ とすれば $Q \lneqq P$ となる $P \in \mathrm{Syl}_p(C_G(x))$ があり，p-群の性質から $Q \lneqq N_P(Q) \leq N_G(Q) \cap C_G(x)$ となって $\delta(C') = Q$ に矛盾する．よって $\delta(C) =_G Q$ となり，前半で示したことから $C' = C \cap C_G(Q)$ をえる．□

以上の準備のもとで次の主定理が示される．

定 理 2.15 （第 1 主定理） $G \geq Q$ が p-部分群のとき，全単射

$$\varphi:\ \mathrm{Bl}(G \mid Q) \longrightarrow \mathrm{Bl}(N_G(Q) \mid Q)$$

が存在して，$\mathrm{Bl}(G \mid Q) \ni B$ に対し $\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*) = e_{\varphi(B)}{}^*$ となる．

［**証 明**］ $N = N_G(Q)$ とおくとき，（(G, Q, N) に関する）Brauer 準同型 Br_Q を $Z_Q(FG)$ に制限して

$$\mathrm{Br}'_Q:\ Z_Q(FG) = Z_Q^0(FG) \oplus Z_Q^1(FG) \longrightarrow Z_Q(FN)$$

がえられる．ここで $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Br}'_Q = Z_Q^1(FG)$，また補題 2.14 より $\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}'_Q = Z_Q^0(FN)$ であるから，Br_Q は次の同型を引き起す：

$$Z_Q(FG)/Z_Q^1(FG) \cong Z_Q^0(FN).$$

よって補題 2.12，13 から定理の主張がえられる．□

系 2.16 $G \geq Q$ は p-部分群で $N_G(Q) \leq H \leq G$ とするとき，全単射

$$\psi:\ \mathrm{Bl}(G \mid Q) \longrightarrow \mathrm{Bl}(H \mid Q)$$

が存在して，$\mathrm{Bl}(G \mid Q) \ni B$ に対して $\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*) = \mathrm{Br}_Q(e_{\psi(B)}{}^*)$ となる．

[証明] $N_H(Q) = N_G(Q)$ で，これを N とおけば第1主定理のような全単射

$$\varphi_G : \mathrm{Bl}(G \mid Q) \longrightarrow \mathrm{Bl}(N \mid Q), \qquad \varphi_H : \mathrm{Bl}(H \mid Q) \longrightarrow \mathrm{Bl}(N \mid Q)$$

がある．このとき $\psi = \varphi_H{}^{-1} \circ \varphi_G$ とおけばよい．□

群 G の最大の正規 p-部分群を $O_p(G)$ と表す．また G の最大の正規 p'-部分群を $O_{p'}(G)$ と表す．

問 2.17 $\delta(B) =_G Q$ となる $B \in \mathrm{Bl}(G)$ が存在すれば $O_p(N_G(Q)) = Q$ である．
(ヒント：第1主定理と定理 2.8 (i) を用いよ．)

§3. Brauer 対応

$G \geq H$ のとき，次のような R-線形写像と F-線形写像が定義される：

$$s_H : Z(RG) \longrightarrow Z(RH) \qquad (\widehat{C} \mapsto \widehat{C \cap H}),$$
$$s_H{}^* : Z(FG) \longrightarrow Z(FH) \qquad (\widehat{C} \mapsto \widehat{C \cap H}).$$

よって $b \in \mathrm{Bl}(H)$ に対し F-線形写像

$$\omega_b{}^* \circ s_H{}^* : \ Z(FG) \longrightarrow F$$

が定義されるが，これが多元環の準同型になるならば $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ で $\omega_b{}^* \circ s_H{}^* = \omega_B{}^*$ となるものが一意的に定まる．このとき $B = b^G$ と表し，**b^G が定義される** という．また b に b^G を対応させる対応を **Brauer 対応** という．

補題 3.1 $G \geq H$，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$，$\mathrm{Irr}(b) \ni \theta$ とする．

(i) $\mathrm{Cl}(G) \ni C$ に対し次が成り立つ：

$$\omega_\theta \circ s_H(\widehat{C}) = \frac{\theta^G(\widehat{C})}{\theta^G(1)}. \tag{3.1}$$

(ii) θ^G が既約ならば b^G が定義できて $\theta^G \in \mathrm{Irr}(b^G)$ となる．

[証明] (i) $\omega_\theta \circ s_H(\widehat{C}) = \omega_\theta(\widehat{C \cap H}) = \theta(\widehat{C \cap H})/\theta(1)$ である．一方 $C \ni x$ とすれば

$$\theta^G(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \hat{\theta}(txt^{-1}) = \frac{|C_G(x)|}{|H|} \theta(\widehat{C \cap H}).$$

(ただし $\hat{\theta}$ は H の外では 0, H では θ に一致するものとする.)

したがって

$$\frac{\theta^G(\hat{C})}{\theta^G(1)} = \frac{|G|}{|C_G(x)|}\frac{\theta^G(x)}{|G:H|\theta(1)} = \frac{\theta(\widehat{C \cap H})}{\theta(1)}$$

となり (3.1) が成り立つ.

(ii) θ^G が既約ならば, (3.1) より $\omega_b^* \circ s_H^* = \omega_{\theta^G}^*$ となる. したがって $\theta^G \in B$ $(\in \mathrm{Bl}(G))$ とすれば $\omega_b^* \circ s_H^* = \omega_B^*$ となり, b^G が定義できて $b^G = B$ となる. □

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とするとき, G の類関数 $\varphi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$ に対して

(3.2)
$$\varphi_B = \sum_{\chi \in B} a_\chi \chi$$

と定義し, これを φ の **B-成分**という. このとき $\chi \in B$ ならば $\chi(xe_B) = \chi(x)$, $\chi \notin B$ ならば $\chi(xe_B) = 0$ であるから次が成り立つ:

(3.3)　　$\varphi_B(x) = \varphi(xe_B)$　　特に　　$\varphi_B(1) = \varphi(e_B)$.

系 3.2　$G \geq H$, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$, $\mathrm{Irr}(b) \ni \theta$ とし, b^G が定義されているものとする. このとき $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し次が成り立つ:

(i)　$B \neq b^G$ ならば　　$\nu((\theta^G)_B(1)) > \nu(\theta^G(1))$,

(ii)　$B = b^G$ ならば　　$\nu((\theta^G)_B(1)) = \nu(\theta^G(1))$.

[証明]　(3.1) より

$$\frac{(\theta^G)_B(1)}{\theta^G(1)} = \frac{\theta^G(e_B)}{\theta^G(1)} = \omega_\theta(s_H(e_B)) \in R$$

となる. ここで b^G が定義されていることより $\omega_\theta(s_H(e_B))^* = \omega_{b^G}^*(e_B^*)$ となり, これは $B \neq b^G$ ならば 0, $B = b^G$ ならば 1 となるから主張が成り立つ. □

Brauer 対応において不足群については次が成り立つ.

補題 3.3　$G \geq H$, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し b^G が定義されておれば

$$\delta(b) \leq_G \delta(b^G).$$

[証明]　C をブロック $B = b^G$ の不足類とすれば $\delta(C) =_G \delta(B)$ で, また

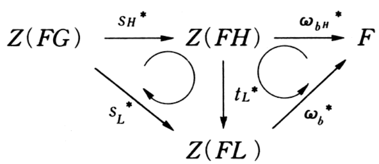
$$0 \neq \omega_B^*(\hat{C}) = \omega_b^*(\widehat{C \cap H})$$

である. したがって $C \cap H$ に含まれる $C' \in \mathrm{Cl}(H)$ が存在して $\omega_b^*(\hat{C'}) \neq 0$ となり, $\delta(b) \leq_H \delta(C') \leq_G \delta(C) =_G \delta(B)$　をえる. □

また二つの部分群に関しては次が成り立つ.

補題 3.4 $L \leq H \leq G$, $\mathrm{Bl}(L) \ni b$ とし, b^H ($\in \mathrm{Bl}(H)$) が定義されていると仮定する. このとき b^G または $(b^H)^G$ のいずれか一つが定義されておれば他方も定義されて, $(b^H)^G = b^G$ が成り立つ.

[**証明**] $t_L^* : Z(FH) \longrightarrow Z(FL)$ ($\widehat{C'} \mapsto \widehat{C' \cap L}$) とすれば, b^H が定義されているから次の可換図形がえられる:



したがって

$$\omega_b^* \circ s_L^* = \omega_b^* \circ t_L^* \circ s_H^* = \omega_{b^H}^* \circ s_H^*$$

となり, これが多元環準同型であることは b^G, または $(b^H)^G$ が定義されていることと同値で, このとき $(b^H)^G = b^G$ となる. □

さて b^G が定義される典型的な例として次のような場合があり, このとき Brauer 対応は Brauer 準同型を通してえられる.

定理 3.5 $G \geq Q$ は p-部分群とし, $QC_G(Q) \leq H \leq N_G(Q)$ と仮定する. このとき

(i) $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し次が成り立つ:

$$\omega_b^* \circ s_H^* = \omega_b^* \circ \mathrm{Br}_Q.$$

したがって b^G はつねに定義される.

(ii) $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し, $\{b \in \mathrm{Bl}(H) ; b^G = B\}$ は ((Q, H) に関して) B に随伴する H のブロックの全体である.

[**証明**] (i) $\mathrm{Cl}(G) \ni C$ に対し $C_0 = C \cap C_G(Q)$, $C_1 = C \cap (H - C_G(Q))$ とおけば $s_H^*(\widehat{C}) = \widehat{C}_0 + \widehat{C}_1$ となるが, $Q \lhd H$ より $\widehat{C}_1 \in J(Z(FH))$ (補題2.7 (ii)) となり, $\omega_b^*(\widehat{C}_1) = 0$ である. また $\widehat{C}_0 = \mathrm{Br}_Q(\widehat{C})$ であるから $\omega_b^* \circ s_H^*(\widehat{C}) = \omega_b^*(\widehat{C}_0) = \omega_b^* \circ \mathrm{Br}_Q(\widehat{C})$ をえる. ここで $\mathrm{Br}_Q : Z(FG) \longrightarrow Z(FH)$ は多元環準同型

であるから $\omega_b{}^* \circ s_H$ も多元環準同型となり b^G が定義される.

(ii) $\mathfrak{S} = \{b_1, \cdots, b_r\}$ を B に随伴する H のブロックの集合とすれば

$$b \in \mathfrak{S} \Longleftrightarrow 1 = \omega_b{}^* \circ \mathrm{Br}_Q(e_B{}^*) = \omega_{b^G}{}^*(e_B{}^*) \Longleftrightarrow b^G = B$$

であるから (ii) の主張が成り立つ. □

$G \geq H$, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対して

(3.4) $$C_G(\delta(b)) \leq H$$

が成り立つとき, b は (G において) **認容的** であるという.

注意 $\delta(b)$ は H-共役を度外視して一意的に定まるから, (3.4) が成り立つか否かは $\delta(b)$ のとり方によらない.

定理 3.6 $G \geq H$ とするとき, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ が認容的ならば b^G が定義される.

[**証明**] $Q = \delta(b)$ とおけば, 仮定により $H \geq L = QC_G(Q) = QC_H(Q)$ となる. このとき $\mathrm{Br}_Q(e_b{}^*) \neq 0$ で, b に随伴する L のブロック b_1 が存在し, 定理 3.5 より $b_1{}^H = b$ となる. また同じ定理により $b_1{}^G$ が定義されるから, 補題 3.4 より $(b_1{}^H)^G = b^G$ も定義される. □

上の定理は次のような状況でしばしば利用される.

系 3.7 $QC_G(Q) \leq H \leq G$ で Q は p-部分群とする. このとき $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ が $Q \leq_H \delta(b)$ をみたせば b は認容的で, したがって b^G が定義される.

[**証明**] 仮定により $C_G(\delta(b)) \leq_H C_G(Q) \leq H$ であるから b は認容的で b^G が定義される. □

また第1主定理の拡張である系 2.16 は次のようにのべることができる.

定理 3.8 $G \geq Q$ は p-部分群で $N_G(Q) \leq H \leq G$ と仮定する. このとき, $\mathrm{Bl}(H|Q) \ni b$ に b^G を対応させて全単射

$$\mathrm{Bl}(H|Q) \longrightarrow \mathrm{Bl}(G|Q) \qquad (b \mapsto b^G)$$

がえられる.

[**証明**] 系 2.16 で $\psi(B) = b$ とすれば, B と b には同じ $b_1 \in \mathrm{Bl}(N_G(Q)|Q)$ が随伴し, 定理 3.5 により $B = b_1{}^G$, $b = b_1{}^H$ となる. したがって補題 3.4 より $b^G = (b_1{}^H)^G = b_1{}^G = B$ となる. □

$G \geq H$ のとき，R-加群 $R[G-H]=\sum_{x\in G-H}Rx$ は共役の作用で H-加群となり，$\mathrm{Inv}_H(R[G-H])$ を $R[G-H]^H$ と表すことにする．

次の補題は補題1.8と共に以後の議論で重要である．

補題 3.9 (Juhász-渡辺) $G \geq H$，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ とし，$b^G=B$ が定義されているとする．このときブロックべき等元 e_b, e_B について次が成り立つ．

(i) $e_b s_H(e_B)$ は $e_b Z(RH)$ の正則元である．また $z \in e_b Z(RH)$ を適当にとれば

$$(3.5)\qquad z e_b e_B = e_b + c, \qquad c \in R[G-H]^H$$

となる．特に $e_b e_B \neq 0$ である．

(ii) $$e_b e_B = e_b + (1-e_B)c, \qquad c \in R[G-H]^H.$$

[**証明**] (i) 直和分解 $(RG)^H = Z(RH) \oplus R[G-H]^H$ において e_B は

$$e_B = s_H(e_B) + u, \qquad u \in R[G-H]^H$$

と分解される．したがって

$$(3.6)\qquad e_b e_B = e_b s_H(e_B) + e_b u$$

となる．ここで $\omega_B{}^* = \omega_b{}^* \circ s_H{}^*$ であるから

$$1 = \omega_B{}^*(e_B{}^*) = \omega_b{}^*(s_H(e_B)^*) = \omega_b{}^*((e_b s_H(e_B))^*)$$

となり，$e_b Z(RH)$ は局所環であるから $e_b s_H(e_B)$ はその正則元である．よって $z \in e_b Z(RH)$ が存在して $z e_b s_H(e_B) = e_b$ となる．また (3.6) より

$$z e_b e_B = e_b + c, \qquad c = z e_b u \in R[G-H]^H$$

をえる．

(ii) $z e_b e_B = (e_b + c) e_B = e_b e_B + c e_B$ であるから，$e_b + c = e_b e_B + e_B c$，よって $e_b e_B = e_b + (1-e_B)c$ をえる．□

$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対して $b^G = B$ が定義されているとき，補題3.9を用いて b と B に属する直既約加群の関係を考察しよう．一般にブロック B に属する直既約な $\mathfrak{o}G$-加群の全体を $\mathrm{IND}(B)$ と表す．

定理 3.10 (Conlon) $G \geq H$，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し $b^G = B$ が定義されているとする．このとき $W \in \mathrm{IND}(b)$ に対し

$$W \mid (W^G e_B)_H$$

となる．したがって $V \in \mathrm{IND}(B)$ で次をみたすものが存在する：

$$W \mid V_H, \qquad V \mid W^G.$$

［証明］ $\mathfrak{o} = R$ のとき示す．$\mathfrak{o} = F$ のときも同様に示される．

(3.5) のような $z \in e_b Z(RH)$ をとり，$f = ze_b e_B = e_b + c$ とおく．このとき

$$\lambda:\quad W \longrightarrow W^G e_B = W \otimes_{RH} (RG) e_B \qquad (w \mapsto w \otimes f)$$

は RH-準同型である．また

$$\mu:\quad W^G = \bigoplus_{t \in H\backslash G} W \otimes t \longrightarrow W \qquad (\textstyle\sum_t w_t \otimes t \mapsto w_1)$$

(ただし剰余類 H の代表元としては 1 をとるものとする) も RH-準同型で，その $W^G e_B$ への制限を μ' とする：$\mu' : W^G e_B \longrightarrow W$．このとき $w \in W$ に対し

$$\begin{aligned} \mu' \circ \lambda(w) &= \mu'(w \otimes f) = \mu'(w \otimes e_b + w \otimes c) \\ &= we_b = w \end{aligned}$$

となり，$\mu' \circ \lambda = \mathrm{id}_W$ をえる．よって $W \mid (W^G e_B)_H$ である．このとき $W^G e_B$ のある直既約因子 V に対し $W \mid V_H$ となるから，定理の後半が成り立つ．□

Brauer 対応と Green 対応の間には次のような関係がある．

系 3.11 (Green) $G \geq P$ は p-部分群とし，$N = N_G(P)$ とおいて $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G, P, N)$ をIV, (4.1) で定義する．また $f : \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G|\mathfrak{A}) \to \mathrm{IND}(\mathfrak{o}N|\mathfrak{A})$ をGreen対応とする．このとき $V \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}G|\mathfrak{A})$ に対し $V \in B$ $(\in \mathrm{Bl}(G))$, $fV \in b$ $(\in \mathrm{Bl}(N))$ ならば $b^G = B$ である．

［証明］ $b^G = B'$ とすれば，定理 3.10 で $W = fV$ とおいて，$\mathrm{IND}(B') \ni V'$ で $\mathrm{vx}(V') = \mathrm{vx}(fV) = \mathrm{vx}(V)$，かつ $fV \mid V'_N$ となるものがある．このとき $V' = f^{-1}(fV) = V$ となり $B' = B$ である．□

また補題 1.8，3.9 を用いて次がえられる．

定理 3.12 (永尾-Green) $G \geq H$ とし，$\mathfrak{o}G$-加群 V はブロック B に属し，$\mathfrak{o}H$-加群 W は V_H の直既約因子でブロック b に属するとする．このとき $C_G(\mathrm{vx}(W)) \leq H$ ならば $b^G = B$ である．

［証明］ $\mathfrak{o} = R$ のとき示す．$\mathrm{vx}(W) \leq_H \delta(b)$ であるから，仮定により b は認容的で b^G が定義される．$b^G = B'$ とおけば補題 3.9 より

$$e_b e_{B'} = e_b + (1 - e_{B'})c', \qquad c' \in R[G-H]^H$$

となる．ここで $B' \neq B$ と仮定すると，上の両辺に e_B をかけて

$$0 = e_b e_B + e_B c'$$

をえる．仮定より $W = We_b = We_B$ であるから $W = Wc'$ となり，補題1.8より $y \in G - H$ が存在して W は $C_H(y)$-射影的になる．このとき $\mathrm{vx}(W) \leq_H C_H(y)$，したがって $y \in_H C_G(\mathrm{vx}(W)) \leq H$ となり矛盾である．よって $B' = B$ が成り立つ．□

§4.　一般分解定数と第2主定理

次の定理は後でのべる一般分解定数に関する主定理（定理4.2）と本質的に同じで，これを第2主定理とよぶことがある．

定理4.1　$G \ni x$ は p-元とし，$C_G(x) \leq H \leq G$ と仮定する．また V は R-自由な RG-加群で G のブロック B に属するものとし，$\mathrm{Bl}(H|B) = \{b \in \mathrm{Bl}(H); b^G = B\}$ とおく．このとき $C_G(x)_{p'} \ni y$ に対し次が成り立つ：

$$\chi_V(xy) = \sum_{b \in \mathrm{Bl}(H|B)} \chi_{Ve_b}(xy).$$

［**証明**］　$V_H = \bigoplus_{b \in \mathrm{Bl}(H)} Ve_b$ であるから，$b \notin \mathrm{Bl}(H|B)$ ならば $\chi_{Ve_b}(xy) = 0$ となることを示せばよい．x は元 xy の p-部分であるから，$x \notin \delta(b)$ ならば系1.10 (i) よりこのことが成り立つ．よって $Q = \langle x \rangle \leq \delta(b)$ としてよい．このとき $C_G(Q) \leq H$ であるから b^G が定義されるが，$b^G \neq B$ ならば定理3.12より Ve_b の各直既約因子 W について $C_G(\mathrm{vx}(W)) \not\leq H$，したがって $Q \not\leq \mathrm{vx}(W)$，すなわち $x \notin \mathrm{vx}(W)$ となる．よって $\chi_W(xy) = 0$ となり，$\chi_{Ve_b}(xy) = 0$ をえる（IV，7.4参照）．□

注意　上の定理で $\mathrm{Bl}(H|B) = \phi$ ならば $\chi_V(xy) = 0$ （$\forall y \in C_G(x)_{p'}$）である．

$G \ni x$ は p-元とし，$H = C_G(x)$ とおく．また $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対し

(4.1)
$$\chi_H = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} r_{\chi\zeta}\zeta$$

とする．このとき $x \in Z(H)$ であるから，$H_{p'} \ni y$ に対し $\zeta(xy) = \lambda_\zeta \zeta(y)$ となる λ_ζ があり，$o(x) = p^m$ とすればこれは1の p^m 乗根である．いま $d^{(x)}_{\zeta\mu}$ を H における分解定数とすれば，(4.1) より

$$\chi(xy) = \sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(H)} (\sum_{\zeta} \lambda_\zeta r_{\chi\zeta} d^{(x)}_{\zeta\mu}) \mu(y)$$

$$= \sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(H)} d^x_{\chi\mu} \mu(y)$$

となる．ただし $d^x_{\chi\mu} = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(H)} \lambda_\zeta \gamma_{\chi\zeta} d^{(x)}_{\zeta\mu}$ で，これを（x に関する）**一般分解定数**とよぶ．ρ を 1 の原始 p^m 乗根とすれば $d^x_{\chi\mu} \in \boldsymbol{Z}[\rho]$である．

また $\langle x \rangle C_G(x) = C_G(x) = H$ であるから，任意の $b \in \mathrm{Bl}(C_G(x))$ に対し b^G が定義される（定理 3.5 参照）．

次は Brauer の **第 2 主定理** とよばれ，応用上重要である．

定理 4.2　（第 2 主定理）　$G \ni x$ は p-元とし，$B \in \mathrm{Bl}(G)$，$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ とする．このとき $d^x_{\chi\mu} \neq 0$ で，μ が $C_G(x)$ のブロック b に属するならば $b^G = B$ となる．

よって $C_G(x)_{p'} \ni y$ に対して次が成り立つ：

$$\chi(xy) = \sum_{b^G = B} \sum_{\mu \in \mathrm{IBr}(b)} d^x_{\chi\mu} \mu(y).$$

［**証明**］　χ を与える RG-表現加群を V として定理 4.1 を適用すれば

$$\chi(xy) = \sum_{b^G = B} \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}(b)} r_{\chi\zeta} \zeta(xy)$$

となることから明らかである．□

以下第 2 主定理のいくつかの応用についてのべよう．

G の p-元 x に対して，p-部分が x に G-共役な G の元の全体を $\mathfrak{S}(x)$ と表し，これを（p-元 x を含む）**p-セクション** とよぶ：$\mathfrak{S}(x) = \{z \in G; z_p =_G x\}$．特に $\mathfrak{S}(1) = G_{p'}$ である．

明らかに $\mathfrak{S}(x)$ は共役の作用で G-不変で，$\mathfrak{S}(x)$ に含まれる G-共役類の全体を $\tilde{\mathfrak{S}}(x)$ と表し，これを p-セクションとよぶこともある．

問 4.3　（i）　p-元 x に対し，$C_G(x)_{p'}$ に含まれる $C_G(x)$-共役類の完全代表系を $\{y_1, \cdots, y_{l_x}\}$ とすれば，$\{xy_1, \cdots, xy_{l_x}\}$ は $\tilde{\mathfrak{S}}(x)$ の完全代表系である．

（ii）　$\{x_1, \cdots, x_r\}$ を p-元からなる G-共役類の完全代表系とし，$\{y^{(i)}_1, \cdots, y^{(i)}_{l_i}\}$ を $C_G(x_i)_{p'}$ に含まれる $C_G(x_i)$-共役類の完全代表系とすれば，$\{x_i y^{(i)}_j ; 1 \leq i \leq r, 1$

$\le j \le l_i\}$ は $\mathrm{Cl}(G)$ の完全代表系である．

補題 4.4 $\varphi = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} a_\chi \chi$ を G の K-値類関数とし，$\mathfrak{S}(x)$ は一つの p-セクションとする．このとき φ が $\mathfrak{S}(x)$ 上で常に 0 の値をとれば，任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し φ_B についても同じことがいえる．(ただし φ_B は (3.2) で定義した関数である．)

［**証明**］ $H = C_G(x)$ とおけば，仮定により任意の $y \in H_{p'}$ に対し

$$0 = \varphi(xy) = \sum_{B\in\mathrm{Bl}(G)} \sum_{\chi\in B} a_\chi \chi(xy) = \sum_B \sum_{\chi\in B} \sum_\mu a_\chi d^x_{\chi\mu} \mu(y).$$

したがって第2主定理により

$$\sum_{b\in\mathrm{Bl}(H)} \sum_{\mu\in\mathrm{IBr}(b)} \Big(\sum_{\chi\in b^G} a_\chi d^x_{\chi\mu}\Big) \mu(y) = 0$$

となり，$\mathrm{IBr}(H)$ の一次独立性より任意の $\mu \in \mathrm{IBr}(b)$ に対し

$$\sum_{\chi\in b^G} a_\chi d^x_{\chi\mu} = 0$$

をえる．よって $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し

$$\begin{aligned}\varphi_B(xy) &= \sum_{\chi\in B} \sum_{b\in\mathrm{Bl}(H|B)} \sum_{\mu\in\mathrm{IBr}(b)} a_\chi d^x_{\chi\mu} \mu(y) \\ &= \sum_{b\in\mathrm{Bl}(H|B)} \sum_{\mu\in\mathrm{IBr}(b)} \Big(\sum_{\chi\in b^G=B} a_\chi d^x_{\chi\mu}\Big)\mu(y) = 0\end{aligned}$$

となる．□

上の補題より，次の第2直交関係のある意味の精密化がえられる．

定理 4.5 (第2直交関係の精密化) $G \ni u, v$ は異なる p-セクションに属する (すなわち $u_p \not\sim_G v_p$) とする．このとき任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対して次が成り立つ：

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \chi(u)\overline{\chi(v)} = 0$$

［**証明**］ 仮定と第2直交関係により $\varphi = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(v)}\chi$ は $\mathfrak{S}(u_p)$ 上で 0 の値をとる．よって $\varphi_B = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \overline{\chi(v)}\chi$ も $\mathfrak{S}(u_p)$ 上で 0 で，定理が成り立つ．□

次に第1直交関係の精密化を示すため，次の補題を証明しておく．

補題 4.6 $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \cdots, C_k\}$ とし，代表元 $x_i \in C_i$ を定めておく．また $B \in \mathrm{Bl}(G)$ とし

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi(x_i) = 0 \qquad (\forall \chi \in \mathrm{Irr}(B))$$

と仮定すれば，任意の p-セクション $\mathfrak{S}(x)$ に対し次が成り立つ：

$$\sum_{C_i \in \mathfrak{S}(x)} \alpha_i \chi(x_i) = 0 \qquad (\forall \chi \in \mathrm{Irr}(B)).$$

［証 明］ 仮定により

$$0 = \sum_{\chi \in B} |\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi(x_i)|^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_j (\sum_{\chi \in B} \chi(x_i) \overline{\chi(x_j)}).$$

ここで x_i と x_j が異なる p-セクションに属せば $\sum_{\chi \in B} \chi(x_i)\overline{\chi(x_j)} = 0$ であるから，$\{x_1, \cdots, x_r\}$ を p-元からなる共役類の完全代表系とするとき

$$0 = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{C_i, C_j \in \mathfrak{S}(x_\nu)} \alpha_i \bar{\alpha}_j (\sum_{\chi \in B} \chi(x_i) \overline{\chi(x_j)})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\chi \in B} | \sum_{C_i \in \mathfrak{S}(x_\nu)} \alpha_i \chi(x_i)|^2$$

となり，定理の主張がえられる．□

定理 4.7 （Brauer-大嶋：第 1 直交関係の精密化） $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi, \chi'$ は異なるブロックに属するとする．このとき任意の p-セクション $\mathfrak{S}(x)$ に対し次が成り立つ：

$$\sum_{z \in \mathfrak{S}(x)} \chi(z) \overline{\chi'(z)} = 0.$$

［証 明］ χ の属するブロックを B とすれば，仮定と第 1 直交関係により

$$\sum_{i=1}^{k} |C_i| \overline{\chi'(x_i)} \chi_1(x_i) = 0 \qquad (\forall \chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)).$$

よって補題より

$$0 = \sum_{C_i \in \mathfrak{S}(x)} |C_i| \overline{\chi'(x_i)} \chi_1(x_i)$$

$$= \sum_{z \in \mathfrak{S}(x)} \overline{\chi'(z)} \chi_1(z) \qquad (\forall \chi_1 \in \mathrm{Irr}(B))$$

となる．□

上の定理の特別の場合として次がえられる．

系 4.8 $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ が G の主ブロック $B_0(G)$ に属さないならば，任意の p-セクション $\mathfrak{S}(x)$ に対し次が成り立つ：

$$\sum_{z \in \mathfrak{S}(x)} \chi(z) = 0.$$

[**証明**] 定理4.7で $\chi' = \mathbf{1}_G$ とおけばよい. □

$\mathfrak{S}(x)$ を p-セクションとするとき, $R[\tilde{\mathfrak{S}}(x)] = \bigoplus_{C \in \tilde{\mathfrak{S}}(x)} R\hat{C}$ とおく.

定理4.9 $\{x_1, \cdots, x_r\}$ を p-元からなる G-共役類の完全代表系とする. このとき $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し次が成り立つ:

$$e_B R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)] \subset R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)] \qquad (1 \leq i \leq r).$$

したがって $Z(RG)$ は次のように直和分解される:

$$Z(RG) = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{B \in \mathrm{Bl}(G)} e_B R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)].$$

[**証明**] 前半については, $\tilde{\mathfrak{S}}(x_i) \ni C$ とするとき $e_B\hat{C} \in R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)]$ を示せばよい. そのため $C \ni x$ とすれば

$$e_B\hat{C} = \sum_{\chi \in B} e_\chi \omega_\chi(\hat{C}) = \sum_{\chi \in B} \Big(\sum_{y \in G} \frac{\chi(1)}{|G|} \overline{\chi(y)}\, y\Big) \frac{|C|}{\chi(1)} \chi(x)$$
$$= \frac{|C|}{|G|} \sum_{y \in G} \Big(\sum_{\chi \in B} \chi(x)\overline{\chi(y)}\Big) y$$

となるが, $y \notin \mathfrak{S}(x_i)$ ならば上の括弧の中の値は0であるから $e_B\hat{C} \in R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)]$ をえる.

後半は $Z(RG) = \bigoplus_i R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)]$, $R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)] = \bigoplus_B e_B R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)]$ となることより明らかである. □

$G \ni x$ が p-元のとき, $C_G(x)$ の分解定数, Cartan 不変数などを $d^{(x)}_{\xi\mu}$, $c^{(x)}_{\mu\nu}$ と肩に (x) をつけて表すことにする.

注 意 一般分解定数 $d^x_{\chi\mu}$ を $d^{(x)}_{\chi\mu}$ と混同してはいけない.

補題4.10 $G \ni x$ は p-元とし, $H = C_G(x)$ とおく. また $\mathrm{IBr}(H) \ni \mu$ に対応する H の主直既約指標を $\eta^{(x)}_\mu$ とおき, これに対して G の類関数 $\hat{\eta}^{(x)}_\mu$ を次のように定義する:

$$(4.2) \qquad \hat{\eta}^{(x)}_\mu(z) = \begin{cases} \eta^{(x)}_\mu(y): & z \in \mathfrak{S}(x),\ z =_G xy\ (y \in H_{p'}) \text{ のとき}, \\ 0 \quad : & z \notin \mathfrak{S}(x) \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき $\hat{\eta}^{(x)}_\mu$ の既約分解は次のようになる:

$$\hat{\eta}^{(x)}_\mu = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^x_{\chi\mu}}\, \chi.$$

特に次が成り立つ：

$$z \notin \mathfrak{S}(x) \Longrightarrow \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^x_{\chi\mu}}\chi(z) = 0.$$

［証明］ $H_{p'}$ における H-共役類の完全代表系を $\{y_1, \cdots, y_m\}$ とおくと，$\tilde{\mathfrak{S}}(x)$ の完全代表系は $\{xy_1, \cdots, xy_m\}$ である．また $C_G(xy_i) = C_H(y_i)$ であるから

$$\begin{aligned}(\hat{\eta}^{(x)}_\mu, \chi)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{z \in \mathfrak{S}(x)} \hat{\eta}^{(x)}_\mu(z_{p'})\overline{\chi(z)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^m \frac{|G|}{|C_G(xy_i)|}\eta^{(x)}_\mu(y_i)\overline{\chi(xy_i)} \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m \frac{|H|}{|C_H(y_i)|}\eta^{(x)}_\mu(y_i)\Big(\sum_\nu \overline{d^x_{\chi\nu}}\,\overline{\nu(y_i)}\Big) \\ &= \sum_\nu \overline{d^x_{\chi\nu}}(\eta^{(x)}_\mu, \nu)'_H = \overline{d^x_{\chi\mu}}\end{aligned}$$

となり，定理の主張が成り立つ．□

一般分解定数と $C_G(x)$ の Cartan 不変数の間には次の関係がある．

定理4.11　$G \ni x, x'$ を p-元とするとき次が成り立つ：

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{d^x_{\chi\mu}}\, d^{x'}_{\chi\mu'} = \begin{cases} c^{(x)}_{\mu\mu'} & : \ x = x' \text{ のとき}, \\ 0 & : \ x \nsim_G x' \text{ のとき}. \end{cases}$$

［証明］ 補題 4.10 より

$$(\hat{\eta}^{(x)}_\mu, \hat{\eta}^{(x')}_{\mu'})_G = \sum_\chi \overline{d^x_{\chi\mu}}\, d^{x'}_{\chi\mu'}$$

となるが，$x \nsim_G x'$ ならば (4.2) より左辺は 0 である．また $x = x'$ のときは (4.2) より

$$\text{左辺} = (\eta^{(x)}_\mu, \eta^{(x)}_{\mu'})'_H = c^{(x)}_{\mu\mu'}$$

となる．□

問 4.3 と同様に $\{x_1 = 1, \cdots, x_r\}$ を G の p-元からなる共役類の完全代表系とし，また $\{x_i y^{(i)}_1, \cdots, x_i y^{(i)}_{l_i}\}$ を p-セクション $\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)$ の完全代表系とするとき，$\mathrm{Cl}(G)$ の完全代表系 $\{x_i y^{(i)}_j\}$ を (i, j) の辞書式順序に従って並べておく．また $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi\}$ を行，$\{(x_i, \mu) ; 1 \le i \le r, \ \mu \in \mathrm{IBr}(C_G(x_i))\}$ を列の添字として，一般分解定数 $d^{x_i}_{\chi\mu}$ を成分とする $k(G)$ 次の正方行列を

(4.3)　$$\hat{D} = (d^{x_i}_{\chi\mu})_{\chi, (x_i, \mu)}$$

とする．このとき定理4.11から次が成り立つ．

系4.12

$$
{}^t\widehat{D}\widehat{D} = \begin{pmatrix} C^{(x_1)} & & & 0 \\ & C^{(x_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C^{(x_r)} \end{pmatrix}
$$

(ただし $C^{(x_i)}$ は $C_G(x_i)$ の Cartan 行列で，これは l_i 次の正則行列である．)

特に $\widehat{D}$ は正則行列である．

さて (4.3) の行を G のブロック $B_1, \cdots, B_t$ にまとまるように並べ，また列 (x_i, μ) については μ が $C_G(x_i)$ のブロック b に属するとき，b^G が順に $B_1, \cdots, B_t$ に等しくなるようにまとめて並べかえた行列を $\widehat{D}_1$ とすれば，第2主定理から $\widehat{D}_1$ は次のように分解する：

(4.4)
$$
\widehat{D}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{D}_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{D}_{B_t} \end{pmatrix}.
$$

ただし $\widehat{D}_{B_j} = (d^{x_i}_{\chi\mu})_{\chi,(x_i,\mu)}$ において $\chi \in \mathrm{Irr}(B_j)$ で，(x_i, μ) は $\mu \in b$ ($\in \mathrm{Bl}(C_G(x_i))$) とするとき $b^G = B_j$ となるもの全体にわたるものとする．

このとき $\widehat{D}_1$ は正則行列であるから次がえられる．

定理4.13 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とするとき，

(i) $\widehat{D}_B$ は $k(B)$ 次の正則行列である．

(ii) $k(B) = l(B) + \sum_{i=2}^{r} \sum_{b \in \mathrm{Bl}(C_G(x_i)) | B} l(b)$.

注意 上の (ii) において $x_i \in_G \delta(B)$ となる x_i のみを考えればよい．実際 $\mathrm{Bl}(C_G(x_i)) \ni b$，$b^G = B$ とすれば $x_i \in \delta(b) \leq_G \delta(B)$ となる (定理2.8，補題3.3参照)．

上の注意と関連して，次は $x \in_G \delta(B)$ となるための十分条件と必要条件を与えている．

補題4.14 $G \ni x$ は p-元で $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とする．

(i) $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$，$C_G(x)_{p'} \ni y$ が存在して $\chi(xy) \neq 0$ となるならば $x \in_G \delta(B)$ である．

(ii) $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$，$\mathrm{ht}(\chi) = 0$ とする．このとき $x \in_G \delta(B)$ ならばある y

$\in C_G(x)_{p'}$ に対し次が成り立つ：

$$\chi(xy) \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

［**証明**］ (i) $(xy)_p = x$ であるから系1.10(i)より明らかである.

(ii) $\mathrm{Cl}(G_{p'}) \ni C$ を B の不足類とすれば $\delta(C) =_G \delta(B)$, $\omega_\chi(\hat{C}) \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$ である. $C \ni y$ とすれば

$$\omega_\chi(\hat{C}) = \frac{|G|}{|C_G(y)|}\frac{\chi(y)}{\chi(1)} \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

ここで $\mathrm{ht}(\chi) = 0$, $\delta(C) =_G \delta(B)$ であるから $\chi(y) \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$ となる. y を適当にとれば $\delta(C) = \delta(B)$ としてよく, また $x \in \delta(B) = \delta(C)$ としてよい. このとき $y \in C_G(x)_{p'}$ で .

$$\chi(xy) \equiv \chi(y) \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi)$$

となる. □

1の原始 n 乗根の一つを ε_n とし, 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に ε_n を添加した体 $\boldsymbol{Q}(\varepsilon_n)$ を $\boldsymbol{Q}_n$ と略記することにする. このとき $\boldsymbol{Q}_n$ は $\boldsymbol{Q}$ の Abel 拡大で $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_n/\boldsymbol{Q}) \simeq (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$ となる（永尾[4], 例題39.5参照).

問4.15 $(m, n) = 1$ のとき次が成り立つ：

(i) $\boldsymbol{Q}_{mn} = \boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{Q}_n$, (ii) $\boldsymbol{Q}_m \cap \boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{Q}$.

（ヒント： (ii) $|\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_{mn}/\boldsymbol{Q})| = |\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_m/\boldsymbol{Q})||\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_n/\boldsymbol{Q})|$ と (i) を用いよ.）

さて $|G| = g$ とし, $L = \boldsymbol{Q}_g$ とする. このとき $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$, $\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q}) \ni \sigma$ に対し $\chi^\sigma(x) = \chi(x)^\sigma$ とおいて定義される関数 χ^σ はまた G の既約指標で, χ に**代数的共役**であるという. また $\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q}) \ni \sigma$ に対して $\varepsilon_g{}^\sigma = \varepsilon_g{}^m$, $(m, g) = 1$ となる m が g を法として一意的に定まるが, このとき $\mathrm{Cl}(G) \ni C$ に対し $C^\sigma = \{x^m; x \in C\}$ はまた G-共役類で, これも C に代数的共役であるという. このようにして $\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ は $\mathrm{Irr}(G)$ と $\mathrm{Cl}(G)$ に作用するが, $C \ni x$ のとき C^σ の代表元の一つを x^σ と表すことにすれば $\chi^\sigma(x) = \chi(x^\sigma)$ が成り立つ. したがって Brauer の置換補題（III, 2.18）より次がえられる.

定理4.16 $\mathrm{Irr}(G)$ と $\mathrm{Cl}(G)$ における代数的共役類の個数は等しい（問題

III，8参照)．

$|G| = g = p^a h$，$(p, h) = 1$ とするとき，$\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q}_h)$ とおくと $\mathfrak{G} \simeq \mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_{p^a}/\boldsymbol{Q})$ である．$\mathfrak{G} \ni \sigma$ のとき χ^σ は χ に **p-共役** であるという．このとき χ と χ^σ は $G_{p'}$ 上で同じ値をとり，したがって分解定数に関して次が成り立つ：

$$d_{\chi^\sigma\varphi} = d_{\chi\varphi} \qquad (\forall \sigma \in \mathfrak{G},\ \forall \varphi \in \mathrm{IBr}(G)).$$

また χ^σ は χ と同じブロックに属する．

特に $\chi^\sigma = \chi$ $(\forall \sigma \in \mathfrak{G})$ が成り立つとき，すなわち $\chi(x) \in \boldsymbol{Q}_h$ $(\forall x \in G)$ となるとき χ は **p-有理** であるという．

問 4.17 $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ が p-有理であることは，任意の p-元 x と任意の $\mu \in \mathrm{IBr}(C_G(x))$ に対し $d^x_{\chi\mu} \in \boldsymbol{Z}$ となることと同値である．

$\mathfrak{G} \ni \sigma$ に対し $\varepsilon_g{}^\sigma = \varepsilon_g{}^m$，$(m, g) = 1$ となる m をとると $\varepsilon_g{}^{p^a}$ $(= \varepsilon_h)$ は σ-不変であることから $m \equiv 1 \pmod h$ となる．したがって任意の $y \in G_{p'}$ に対し $y^m = y$ となる．よって $G \ni x$ は p-元，$C_G(x)_{p'} \ni y$ とするとき次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \chi^\sigma(xy) &= \chi(x^m y^m) = \chi(x^m y) \\ &= \sum_\mu d^{x^m}_{\chi\mu}\mu(y) \end{aligned}$$

(ただし μ は $C_G(x) = C_G(x^m)$ の既約な Brauer 指標全体にわたる.)

したがって

$$d^x_{\chi^\sigma\mu} = d^{x^m}_{\chi\mu} \tag{4.5}$$

が成り立ち，これから次がえられる．

定理 4.18 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$d(B) > 0$ とするとき，

(i) $\mathrm{Irr}(B)$ は少なくとも $(l(B)+1)$ 個の互いに p-共役でない指標を含む．

(ii) $p > 2$，または $p^a = 2^a \le 4$ ならば $\mathrm{Irr}(B)$ は少なくとも $l(B)$ 個の p-有理な指標を含む．

［証 明］（i）$\mathfrak{G} \ni \sigma$ に対し m は定理の上でのべたような自然数とする．このとき（4.4）で定義した $k(B)$ 次の正則行列

$$\widehat{D}_B = (d^x_{\chi,\mu})_{\chi,(x,\mu)}$$

$$(\text{ただし } \chi \in \mathrm{Irr}(B),\ \mu \in b \in \mathrm{Bl}(C_G(x)),\ b^G = B)$$

について，σ は χ を χ^σ にうつして行の置換を，また (x,μ) を (x^m,μ) にうつして列の置換を引き起す．このようにして $\mathfrak{G}$ は $\widehat{D}_B$ の行，列に作用するが，（4.5）から Brauer の置換補題が適用できて，行と列の $\mathfrak{G}$-軌道の個数は一致する．特に $l(B)$ 個の列 $(1,\mu)$ $(\mu \in \mathrm{IBr}(B))$ は $\mathfrak{G}$-不変で，$d(B) > 0$ より $k(B) > l(B)$ であるから，列について少なくとも $(l(B)+1)$ 個の $\mathfrak{G}$-軌道があり，したがって行についても同じことがいえる．

（ii）仮定により $\mathfrak{G}$ は巡回群である（永尾［4］，定理 21.13）．よって $\mathfrak{G}$-不変な行と列の個数は一致するが，上でみたように $\mathfrak{G}$ は少なくとも $l(B)$ 個の列を不変にするから（ii）が成り立つ．□

§5. ブロックと正規部分群

一般に $G \geq H$，$G \ni x$ とするとき，RH のブロックイデアル $b \in \mathrm{Bl}(H)$ に対し $x^{-1}bx = b^x$ は H^x のブロックイデアルである．これを b に **G-共役なブロック** という．明らかに $(e_b)^x = e_{b^x}$ が成り立ち，また不足群については $\delta(b^x) =_{H^x} \delta(b)^x$ が成り立つ．

5.1 ブロックの被覆

この節では以下 §5.3 まで特に断らない限り

<u>H は G の正規部分群</u>

と仮定する．このとき $b \in \mathrm{Bl}(H)$ に対し，それに G-共役なブロック b^x はまた H のブロックである．また

$$T(b) = \{x \in G;\ b^x = b\}$$

は G の（H を含む）部分群で，これを b の **惰性群** とよぶ．

さて

$$f_b = \sum_{x \in T(b)\backslash G} (e_b)^x$$

とおけば，f_b は RG の中心的べき等元であるから，$Z(RG)$ において

(5.1) $$f_b = \sum_{i=1}^{r} e_{B_i} \qquad (B_i \in \mathrm{Bl}(G))$$

と原始べき等元分解される．このとき G のブロック B_i は H のブロック b を**被覆する**という．

問 5.1 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ が $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆するため必要十分な条件は $e_B e_b \neq 0$ が成り立つことである．

f_b は $RH \cap Z(RG) = (RH)^G$ のべき等元であるが，これについて次が成り立つ．

補題 5.2 $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し f_b は $(RH)^G$ の原始べき等元である．したがって $\{b_1, \cdots, b_m\}$ を $\mathrm{Bl}(H)$ の G-共役類の完全代表系とすれば

(5.2) $$1 = f_{b_1} + f_{b_2} + \cdots + f_{b_m}$$

は $(RH)^G$ における 1 の原始べき等元分解である．

［**証明**］ $(RH)^G$ において f_b が $f_b = e_1 + e_2$ とべき等元分解されたと仮定する．このとき $Z(RH)$ ($\supset (RH)^G$) において e_b は e_1 の原始べき等元分解に現れるとしてよい．そのとき $e_1 e_b \neq 0$ であるから，任意の $x \in G$ に対し $0 \neq (e_1 e_b)^x = e_1 (e_b)^x$ となり $(e_b)^x$ は e_1 の原始べき等元分解に現れる．よって $e_1 = f_b$，$e_2 = 0$ となり矛盾である．したがって f_b は $(RH)^G$ の原始べき等元である．また $1 = \sum_{b \in \mathrm{Bl}(H)} e_b$ より後半は明らかである．□

$Z(RG)$ における原始べき等元分解 $1 = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} e_B$ とべき等元分解 (5.2) を比較して次のことがわかる．

補題 5.3 任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ はある $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆する．また B によって被覆される H のブロックは一つの G-共役類をつくる．

RG-加群の H への制限については次が成り立つ．

補題 5.4 $B \in \mathrm{Bl}(G)$ は $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆するとする．このとき RG-加群 V ($\neq 0$) が B に属するならば次が成り立つ：

$$V_H = \bigoplus_{x \in T(b)\backslash G} Ve_{b^x}, \qquad Ve_{b^x} \neq 0.$$

[証明] $e_B = e_B f_b = \sum_x e_B e_{b^x}$ であるから $V = Ve_B = \bigoplus_x Ve_{b^x}$ をえる．ここである x に対し $0 = Ve_{b^x} = (Ve_b)^x$ と仮定すれば $Ve_b = 0$，したがって $V = 0$ となって仮定に反する．□

前と同様に H に含まれる G-共役類の全体を $\mathrm{Cl}_G(H)$ と表す．

定理 5.5 (Passman) $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ が $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆するため必要十分な条件は，任意の $C \in \mathrm{Cl}_G(H)$ に対して次が成り立つことである：

$$\omega_B{}^*(\hat{C}) = \omega_b{}^*(\hat{C}).$$

[証明] $(FH)^G = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}_G(H)} F\hat{C} = Z(FG) \cap Z(FH)$ であるから，$\omega_B{}^*$ と $\omega_b{}^*$ はともに $(FH)^G$ から F への多元環準同型を引き起す．ここで $\omega_b{}^*(f_b{}^*) = 1$ で，また B が b を被覆するため必要十分な条件は $\omega_B{}^*(f_b{}^*) = 1$ となることである．補題 5.2 よりこのことは $\omega_b{}^*$ と $\omega_B{}^*$ が $(FH)^G$ 上で一致することと同値で，したがって定理が成り立つ．□

系 5.6 G/H が p-群ならば，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し b を被覆する $B \in \mathrm{Bl}(G)$ は唯一つ存在する．

[証明] $\mathrm{Bl}(G) \ni B, B'$ が b を被覆するとする．このとき任意の p-正則な $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，仮定より $C \subset H$ であるから $\omega_B{}^*(\hat{C}) = \omega_b{}^*(\hat{C}) = \omega_{B'}{}^*(\hat{C})$ となり，$B = B'$ をえる（III，6.24 参照）．□

ブロックの被覆と指標（または表現）の制限の間には次のような関係がある．

補題 5.7 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ とする．

（i） B が b を被覆すれば，$\mathrm{Irr}(B)$（または $\mathrm{IBr}(B)$）$\ni \chi$ に対し χ_H の任意の既約成分はある b^x $(x \in G)$ に属する．また b に属する χ_H の既約成分が少なくとも一つは存在する．

（ii） $\mathrm{Irr}(B)$（または $\mathrm{IBr}(B)$）$\ni \chi$ に対し，χ_H がある $\zeta \in \mathrm{Irr}(b)$（または $\mathrm{IBr}(b)$）を既約成分にもてば B は b を被覆する．

[証明] （i） 補題 5.4 より明らかである．

（ii） (i) より明らかであるが次のようにも示される．$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ を与える表現加群を V_{KG} とする．B が b を被覆しないと仮定すれば $e_B e_b = 0$，したがって $0 =$

$Ve_Be_b = Ve_b$ となり，V_H は b に属する既約成分をもたない．(Brauer 指標についても同様である.) □

補題 5.8 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ が $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆するとき次が成り立つ．

(i) b に属する任意の主直既約 RH (または FH)-加群 W に対し，B に属する主直既約 RG (または FG)-加群 V が存在して $W \mid V_H$ となる．

(ii) 任意の $\zeta \in \mathrm{Irr}(b)$ (または $\mathrm{IBr}(b)$) に対して，$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ (または $\mathrm{IBr}(B)$) が存在して ζ は χ_H の既約成分になる．

[証明] (i) 主直既約 FH-加群 W について示せば，RH-加群については持ち上げを考えて証明できる．

まず主直既約 FH-加群 Y に対して，Y^G が主直既約 FG-加群 X を直和因子にもてば $Y \mid X_H$ となる．実際このとき $X_H \mid (Y^G)_H$ となるが，$(Y^G)_H = \bigoplus_x Y \otimes x$ は直既約分解であるから $Y \otimes x \mid X_H$ となる x があり，したがって $Y \mid X_H$ となる．

さて U_{FG} を B に属する任意の主直既約加群とすれば，補題 5.4 より b に属する主直既約加群 W'_{FH} で $W' \mid U_H$ となるものがある．このとき主直既約 FH-加群の列

$$W' = W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_r = W$$

で，各 i について W_i と W_{i+1} は共通の既約成分をもつものがあるから，$r = 2$ のとき補題のような V が存在することを示せばよい．すなわち b に属する主直既約加群 Y で

$$\mathrm{Hom}_{FH}(Y, W') \neq 0 \neq \mathrm{Hom}_{FH}(Y, W)$$

となるものが存在するとしてよい．そのとき

$$\mathrm{Hom}_{FG}(Y^G, U) \simeq \mathrm{Hom}_{FH}(Y, U_H) \supset \mathrm{Hom}_{FH}(Y, W') \neq 0$$

であるから，Y^G は B に属する主直既約 FG-加群 X を直和因子にもち，$Y \mid X_H$ となる．よって

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{FH}(Y, W) \subset \mathrm{Hom}_{FH}(X_H, W) \simeq \mathrm{Hom}_{FG}(X, W^G)$$

となるから，W^G は B に属するある主直既約加群 V を直和因子にもち，最初の注意から $W \mid V_H$ となる．

(ii) 主直既約 RH-加群 W で，それによる表現の指標が ζ を既約成分とするものをとれば (i) から明らかである．(Brauer 指標についても同様である.) □

上の補題から次の定理がえられる．

定理5.9 $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$, χ' の属するブロック B, B' が同じ $b \in \mathrm{Bl}(H)$ を被覆するため必要十分な条件は，G の既約指標の列

$$\chi = \chi_1, \quad \chi_2, \quad \cdots, \quad \chi_r = \chi'$$

で，各 i について χ_i と χ_{i+1} は同じブロックに属するか，または $(\chi_i)_H$ と $(\chi_{i+1})_H$ は共通の既約成分をもつようなものが存在することである．(Brauer 指標についても同様のことが成り立つ．)

[**証明**] まず B, B' がともに b を被覆するとすれば，補題5.8より $\mathrm{Irr}(b) \ni \zeta$ に対し $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(B)$, $\chi_1' \in \mathrm{Irr}(B')$ が存在して ζ は $(\chi_1)_H$, $(\chi_1')_H$ の既約成分となる．このとき既約指標の列 χ, χ_1, χ_1', χ' は定理の条件をみたす．

逆に定理のような列があるとして，$(\chi_i)_H$ と $(\chi_{i+1})_H$ がともに ζ を既約成分に含むとき，$\zeta \in \mathrm{Irr}(b)$ とすれば χ_i, χ_{i+1} の属するブロックはともに b を被覆する．このことから条件の十分性は明らかである．□

5.2 惰性群

$\mathrm{Bl}(H) \ni b$, $\mathrm{Irr}(b) \ni \zeta$ とすれば明らかに $T(\zeta) \leq T(b)$ となる．簡単のため $T = T(b)$ とおく．また b を被覆する G のブロックの全体を $\mathrm{Bl}(G|b)$ とおくとき，$\mathrm{Bl}(G|b)$ と $\mathrm{Bl}(T|b)$ の間に次のような Clifford 型の定理が成り立つ．

定理5.10 (Fong-Reynolds)

(i) $\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$ ならば $\tilde{B}^G$ が定義されて，$\tilde{B}$ に $\tilde{B}^G$ を対応させることによって $\mathrm{Bl}(T|b)$ と $\mathrm{Bl}(G|b)$ の間に1対1の対応がつく．

(ii) $\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$, $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\chi}$ に対し $\tilde{\chi}^G \in \mathrm{Irr}(\tilde{B}^G)$ となり，$\tilde{\chi}$ に $\tilde{\chi}^G$ を対応させて $\mathrm{Irr}(\tilde{B})$ と $\mathrm{Irr}(\tilde{B}^G)$ の間に1対1の対応がつく．また $\mathrm{IBr}(\tilde{B})$ と $\mathrm{IBr}(\tilde{B}^G)$ についても同様のことが成り立つ．

(iii) $\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$ と $\tilde{B}^G$ の分解行列，Cartan 行列はともに一致する．すなわち $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\chi}$, $\mathrm{IBr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}'$ に対し，分解定数と Cartan 不変数について次が成り立つ：

$$d_{\tilde{\chi}\tilde{\varphi}} = d_{\tilde{\chi}^G\tilde{\varphi}^G}, \qquad c_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}'} = c_{\tilde{\varphi}^G\tilde{\varphi}'^G}.$$

(ただし $\eta_{\tilde{\varphi}} = \sum_{\tilde{\varphi}'} c_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}'}\tilde{\varphi}'$ とする。)

(iv) $\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B} \Longrightarrow \delta(\tilde{B}) =_G \delta(\tilde{B}^G)$.

(v) $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B \Longrightarrow \delta(B) \leq_G T(b)$.

[**証明**] $\mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(G|b)) = \bigcup_{B\in \mathrm{Bl}(G|b)} \mathrm{Irr}(B)$ とおき，III章と同様に $\mathrm{Irr}(H) \ni \zeta$ に対し $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ で χ_H が ζ を既約成分にもつものの全体を $\mathrm{Irr}(G|\zeta)$ と表せば，補題5.7より次が成り立つ：

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(G|b)) = \bigcup_{\zeta\in \mathrm{Irr}(b)} \mathrm{Irr}(G|\zeta).$$

$\mathrm{IBr}(\mathrm{Bl}(G|b))$, $\mathrm{IBr}(G|\zeta)$ (ただし $\zeta \in \mathrm{IBr}(H)$) も同じように定義すれば，上と同様のことが成り立つ。

さて $\mathrm{Irr}(b) \ni \zeta$ とすれば $T(\zeta) \subset T$ であるから，Cliffordの定理 (III, 3.4参照) より全単射 $\mathrm{Irr}(T|\zeta) \to \mathrm{Irr}(G|\zeta)$ $(\tilde{\chi} \mapsto \tilde{\chi}^G)$ がえられる．よって

$$\mathrm{Ind}_T^G : \mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(T|b)) \longrightarrow \mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(G|b)) \qquad (\tilde{\chi} \mapsto \tilde{\chi}^G)$$

は全単射である．同様に全単射

$$\mathrm{Ind}_T^G : \mathrm{IBr}(\mathrm{Bl}(T|b)) \longrightarrow \mathrm{IBr}(\mathrm{Bl}(G|b))$$

がえられ，$\mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(T|b)) \ni \tilde{\chi}$, $\mathrm{IBr}(\mathrm{Bl}(T|b)) \ni \tilde{\varphi}$ とするとき，分解定数に関して明らかに次が成り立つ：

(5.3) $$d_{\tilde{\chi}\tilde{\varphi}} = d_{\tilde{\chi}^G\tilde{\varphi}^G}.$$

したがって $\mathrm{Irr}(\mathrm{Bl}(T|b)) \ni \tilde{\chi}, \tilde{\chi}'$ に対してこれらが同じブロックに属することと $\tilde{\chi}^G$, $\tilde{\chi}'^G$ が同じブロックに属することは同値である．

$\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$, $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\chi}$ とすれば $\tilde{\chi}^G$ は既約であるから，補題3.1 (ii) より $\tilde{B}^G$ が定義できて $\tilde{\chi}^G \in \tilde{B}^G$ となる．したがって上の注意から Ind_T^G は全単射 $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \to \mathrm{Irr}(\tilde{B}^G)$ を引き起し，(5.3) から分解行列，Cartan行列について $D_{\tilde{B}} = D_{\tilde{B}^G}$, $C_{\tilde{B}} = C_{\tilde{B}^G}$ が成り立つ．また $d(\tilde{B}) = d(\tilde{B}^G)$ となることも明らかである．

このようにして $\tilde{B}$ に $\tilde{B}^G$ を対応させて $\mathrm{Bl}(T|b)$ と $\mathrm{Bl}(G|b)$ の間に1対1の対応がつき，(i)〜(iii) が成り立つ．

(iv) については，一般に $\delta(\tilde{B}) \leq_G \delta(\tilde{B}^G)$ であるが，$d(\tilde{B}) = d(\tilde{B}^G)$ より $\delta(\tilde{B}) =_G \delta(\tilde{B}^G)$ が成り立つ．(v) はこれより明らかである．□

系 5.11 $\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$ に対し $B = \tilde{B}^G$ とおくとき

(i) $G \ni x, y$, $x \not\equiv y \pmod{T} \Longrightarrow (e_{\tilde{B}})^x(e_{\tilde{B}})^y = 0$.

(ii)　$e_B = \sum_{x \in T\backslash G} (e_{\tilde{B}})^x$.

(ただし $T = T(b)$ とする.)

[**証明**]　$\mathrm{Bl}(T|b) = \{\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_r\}$ とする.

(i)　$e_b = \sum_{i=1}^r e_{\tilde{B}_i}$ で, $e_{\tilde{B}_i} = e_b e_{\tilde{B}_i} = e_{\tilde{B}_i} e_b$ が成り立つ. ここで $x \not\equiv y \pmod T$ ならば $(e_b)^x (e_b)^y = 0$ であるから $(e_{\tilde{B}_i})^x (e_{\tilde{B}_i})^y = 0$ となる.

(ii)　$g_{\tilde{B}_i} = \sum_{x \in T\backslash G} (e_{\tilde{B}_i})^x$ とおけば, これは RG の中心的べき等元で

$$f_b (= \sum_{x \in T\backslash G} (e_b)^x) = \sum_{i=1}^r g_{\tilde{B}_i} \tag{5.4}$$

は f_b の中心的べき等元分解である. 一方 $B_i = \tilde{B}_i{}^G$ とおけば, 定理 5.10 より $\mathrm{Bl}(G|b) = \{B_1, \cdots, B_r\}$ で

$$f_b = \sum_{i=1}^r e_{B_i} \tag{5.5}$$

は f_b の中心的原始べき等元分解である. ここで補題 3.9 (i) より $e_{\tilde{B}_i} e_{B_i} \neq 0$, したがって $g_{\tilde{B}_i} e_{B_i} \neq 0$ であるから, (5.4) と (5.5) を比較して $g_{\tilde{B}_i} = e_{B_i}$ をえる. □

ブロック B に属する RG-加群の全体を (同型なものを同一視して) $\mathfrak{M}_B$ と表す. このとき次の定理が成り立つ.

定理 5.12　$\mathrm{Bl}(T|b) \ni \tilde{B}$ とする.

(i)　$\mathfrak{M}_{\tilde{B}} \ni \tilde{V}$ とすれば $\tilde{V}^G \in \tilde{B}^G$ となり, $\tilde{V}$ に $\tilde{V}^G$ を対応させて全単射

$$\Phi : \mathfrak{M}_{\tilde{B}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\tilde{B}^G} \qquad (\tilde{V} \mapsto \tilde{V}^G)$$

がえられる. またこの逆写像は $V \mapsto V_T\, e_{\tilde{B}}$ である.

(ii)　$\mathfrak{M}_{\tilde{B}} \ni \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ に対し次が成り立つ:

$$\mathrm{Hom}_{RT}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(\tilde{V}_1{}^G, \tilde{V}_2{}^G).$$

(F 上の加群についても同様のことが成立する.)

[**証明**]　$B = \tilde{B}^G$ とおく.

(i)　$\mathfrak{M}_{\tilde{B}} \ni \tilde{V}$ とするとき, $\tilde{V}^G = \bigoplus_{x \in T\backslash G} \tilde{V} \otimes x$ において

$$\tilde{v} \otimes x = \tilde{v} e_{\tilde{B}} \otimes x = \tilde{v} \otimes e_{\tilde{B}} x = (\tilde{v} \otimes x)(e_{\tilde{B}})^x \qquad (\tilde{v} \in \tilde{V}) \tag{5.6}$$

となる. よって上の系より

$$(\tilde{v} \otimes x) e_B = (\tilde{v} \otimes x)(e_{\tilde{B}})^x e_B = (\tilde{v} \otimes x)(e_{\tilde{B}})^x = \tilde{v} \otimes x$$

が成り立ち $\tilde{V}^G \in \mathfrak{M}_B$ をえる.

このようにして写像 $\Phi: \mathfrak{M}_{\tilde{B}} \to \mathfrak{M}_B$ $(\tilde{V} \mapsto \tilde{V}^G)$ がえられるが，一方写像 $\Psi: \mathfrak{M}_B \to \mathfrak{M}_{\tilde{B}}$ $(V \mapsto Ve_{\tilde{B}})$ を考え，$\Psi \circ \Phi$，$\Phi \circ \Psi$ がともに恒等写像であることを示せばよい．

まず $\tilde{V}^G$ において，(5.6) より $\tilde{V} \otimes x = (\tilde{V} \otimes x)(e_{\tilde{B}})^x$ であるから，$x \notin T$ ならば $(\tilde{V} \otimes x)e_{\tilde{B}} = 0$ となる．よって $(\tilde{V}^G)e_{\tilde{B}} = \tilde{V}$ となり $\Psi \circ \Phi$ は恒等写像である．

次に $\mathfrak{M}_B \ni V$ に対し次のような

$$(Ve_{\tilde{B}})^G = \bigoplus_{x \in T\backslash G} Ve_{\tilde{B}} \otimes x \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} V$$

写像 λ，μ を $\lambda(ve_{\tilde{B}} \otimes x) = ve_{\tilde{B}}x$，$\mu(v) = \sum_{x \in T\backslash G} vx^{-1}e_{\tilde{B}} \otimes x$　と定義すれば，これらはともに RG-準同型である．ここで　$\lambda \circ \mu(v) = \sum_x v(e_{\tilde{B}})^x = ve_B = v$，また $\mu \circ \lambda(ve_{\tilde{B}} \otimes x) = \sum_{y \in T\backslash G} ve_{\tilde{B}}xy^{-1}e_{\tilde{B}} \otimes y$　となるが，$xy^{-1} \notin T$ ならば　$e_{\tilde{B}}xy^{-1}e_{\tilde{B}} = xy^{-1}(e_{\tilde{B}})^{xy^{-1}}e_{\tilde{B}} = 0$　であるから　$\mu \circ \lambda(ve_{\tilde{B}} \otimes x) = ve_{\tilde{B}} \otimes x$　となり，$\lambda \circ \mu$，$\mu \circ \lambda$ はともに恒等写像である．よって $(Ve_{\tilde{B}})^G \simeq V$ となり，$\Phi \circ \Psi$ も恒等写像である．

(ii)　$\otimes_{RT}$ を $\otimes$ と略記することにすれば

$$((\tilde{V}_2)^G)_T = \bigoplus_{y \in T\backslash G/T} \tilde{V}_2 \otimes R[TyT]$$

となり，$y \notin T$ ならば $TyT \ni x$ $(\notin T)$ に対し $e_{\tilde{B}}xe_{\tilde{B}} = xe_{\tilde{B}}{}^x e_{\tilde{B}} = 0$ であるから $(\tilde{V}_2 \otimes R[TyT])e_{\tilde{B}} = \tilde{V}_2 \otimes e_{\tilde{B}}R[TyT]e_{\tilde{B}} = 0$　となる．よって　$\mathrm{Hom}_{RT}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \otimes R[TyT]) = 0$　である．したがって

$$\mathrm{Hom}_{RT}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) \simeq \mathrm{Hom}_{RT}(\tilde{V}_1, (\tilde{V}_2{}^G)_T) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(\tilde{V}_1{}^G, \tilde{V}_2{}^G)$$

をえる．□

5.3 ブロックの正則性

最初に約束したように $H \lhd G$ と仮定する．このとき $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対して $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ で $b^G = B$ となるものがあれば，$\omega_B{}^* = \omega_b{}^* \circ s_H{}^*$ であるから次が成り立つ：

(5.7)　　$\mathrm{Cl}(G) \ni C$，$C \cap H = \phi \implies \omega_B{}^*(\hat{C}) = 0.$

一般に $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ が (5.7) をみたすとき，B は（H に関して）**正則** であるというが，次で示すように実は上でのべたことの逆も成り立つ．

定理5.13　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ とする．

（i）　$B = b^G$ ならば B は正則で，また B は b を被覆する．

（ii）　逆に B が正則なとき，B が b を被覆するとすれば $b^G = B$ となり，B は $\mathrm{Bl}(G|b)$ の中で唯一つの正則なブロックである．

［**証明**］（i）　B の正則性はすでにのべたが，任意の $C \in \mathrm{Cl}_G(H)$ に対して $\omega_B^*(\hat{C}) = \omega_b^* \circ s_H^*(\hat{C}) = \omega_b^*(\hat{C})$　であるから，定理5.5により B は b を被覆する．

（ii）　B は正則で b を被覆するとすれば，(5.7) と定理5.5より $\omega_B^*(\hat{C}) = \omega_b^* \circ s_H^*(\hat{C})$（$\forall C \in \mathrm{Cl}(G)$）が成り立ち $b^G = B$ となる．

また $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B'$ が正則とすれば，上で示したことより $\omega_{B'}^* = \omega_b^* \circ s_H^* = \omega_B^*$ となり $B' = B$ をえる．□

補題5.14　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $C_G(\delta(B)) \leq H$ ならば B は正則である．

［**証明**］$\mathrm{Cl}(G) \ni C$ に対し $\omega_B^*(\hat{C}) \neq 0$ とすれば，$\delta(B) \leq_G \delta(C)$ であるから，ある $x \in C$ に対し $x \in C_G(\delta(B)) \leq H$ となり，$C \cap H \neq \phi$ である．よって (5.7) が成り立つ．□

定理5.15　正規 p-部分群 $Q \lhd G$ があって $C_G(Q) \leq H$ となるならば，任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ は正則である．したがって任意の $b \in \mathrm{Bl}(H)$ に対して b を被覆する $B = b^G \in \mathrm{Bl}(G)$ が一意的に定まり，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ にそれが被覆する $b \in \mathrm{Bl}(H)$ の集合を対応させて，$\mathrm{Bl}(G)$ と $\mathrm{Bl}(H)$ の G-共役類の集合の間に1対1の対応がつく．

［**証明**］$Q \leq \delta(B)$ であるから $C_G(\delta(B)) \leq C_G(Q) \leq H$ となり，上の補題より B は正則である．よって定理5.13より $b \in \mathrm{Bl}(H)$ に対し $\mathrm{Bl}(G|b)$ は唯一つのブロック b^G だけからなり後半がいえる．□

正則性の条件を少し弱めて，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $\mathrm{Cl}(G) \ni C$ で

(5.8)　　$\omega_B^*(\hat{C}) \neq 0,\qquad \delta(C) =_G \delta(B),\qquad C \subset H$

をみたすものが存在するとき，B は（H に関して）**弱正則**であるという．

B が正則であればその不足類 C は (5.8) をみたし，したがって B は弱正則

である．

次の定理はブロックの被覆を考えるとき基本的である．

定理 5.16 (Fong) $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ とする．

(i) $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B$ が弱正則であるため必要十分な条件は，B が $\mathrm{Bl}(G|b)$ の中で最大の不足数をもつことである．またこのとき次が成り立つ．

(a) $$\mathrm{Bl}(G|b) \ni B' \Longrightarrow \delta(B') \leq_G \delta(B).$$

(b) B の不足群を $\delta(B) \leq T(b)$ となるようにとれば

(5.9) $$|T(b) : H\delta(B)| \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

(5.10) $$d(B) = d(b) + \nu(|T(b) : H|).$$

(ii) 任意の $B' \in \mathrm{Bl}(G|b)$ に対し $\delta(B') \leq T(b)$ となるように不足群をとれば

$$\delta(B') \cap H =_H \delta(b).$$

[**証明**] (i) まず B は弱正則とし，$\omega_B{}^*(\hat{C}) \neq 0$，$\delta(C) =_G \delta(B)$ となる $C \in \mathrm{Cl}_G(H)$ をとる．このとき定理 5.5 より，任意の $B' \in \mathrm{Bl}(G|b)$ に対し

$$\omega_{B'}{}^*(\hat{C}) = \omega_b{}^*(\hat{C}) = \omega_B{}^*(\hat{C}) \neq 0$$

となり，$\delta(B') \leq_G \delta(C) =_G \delta(B)$ をえる．

逆に任意の $B' \in \mathrm{Bl}(G|b)$ に対し $d(B') \leq d(B)$ が成り立つと仮定する．いま

$$f_b = \sum_{B' \in \mathrm{Bl}(G|b)} e_{B'} = \sum_{C \in \mathrm{Cl}_G(H)} \alpha(C)\hat{C}$$

とすれば，$\omega_B{}^*(f_b{}^*) = 1$ より次をみたす $C_0 \in \mathrm{Cl}_G(H)$ が存在する：

(1) $\alpha(C_0)^* \neq 0$, (2) $\omega_B{}^*(\hat{C}_0) \neq 0$.

このとき(2)より $\delta(B) \leq_G \delta(C_0)$．また(1)よりある $B' \in \mathrm{Bl}(G|b)$ があって，$e_{B'} = \sum_C \beta_{B'}(C)\hat{C}$ とするとき $\beta_{B'}(C_0)^* \neq 0$，したがって $\delta(C_0) \leq_G \delta(B')$ となる．よって仮定により $\delta(B) =_G \delta(C_0)$ $(=_G \delta(B'))$ となり，C_0 は (5.8) をみたすから B は弱正則で，(i) の前半と (a) が示された．

次に (b) を示すため $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B$ は弱正則とし，$\mathrm{Bl}(T(b)|b) \ni \tilde{B}$ で $\tilde{B}^G = B$ となるものをとれば，定理 5.10 より $\delta(\tilde{B}) =_G \delta(B)$ となり $\tilde{B}$ はまた弱正則である．よって $G = T(b)$ と仮定してよい．このとき $f_b = e_b$ である．

さて $\mathrm{Cl}_G(H) \ni C_0$ を上の(1), (2)をみたすようにとれば, $\delta(B) =_G \delta(C_0)$ であるから $x \in C_0$ を適当にとって $\delta(C_0) = \delta(B) \in \mathrm{Syl}_p(C_G(x))$ としてよい. ここで $t = |G : HC_G(x)|$ とおけば C_0 に含まれる H-共役類は t 個ある. そのうち x を含むものを C_0' とすれば, b が G-不変であることより

$$0 \neq \omega_B{}^*(\hat{C_0}) = \omega_b{}^*(\hat{C_0}) = t^*\omega_b{}^*(\hat{C_0}')$$

となり $t^* \neq 0$, したがって $|G : H\delta(B)| = |T(b) : H\delta(B)| \not\equiv 0 \pmod p$ となって (5.9) が成り立つ.

また $\omega_b{}^*(\hat{C_0}') \neq 0$ より $\delta(b) \leq_H \delta(C_0') = H \cap \delta(C_0) = H \cap \delta(B)$ となるが, 一方 $0 \neq \alpha(C_0)^* = \beta_b(C_0')^*$ より $\delta(C_0') \leq_H \delta(b)$ となるから

(5.11) $$\delta(b) =_H H \cap \delta(B)$$

をえる. よって $\delta(b) = H \cap \delta(B)$ とすれば, (5.9), (5.11) より

$$\begin{aligned} d(B) - d(b) &= \nu(|\delta(B) : \delta(b)|) = \nu(|H\delta(B) : H|) \\ &= \nu(|G : H|) = \nu(|T(b) : H|) \end{aligned}$$

となり (5.10) が成り立つ.

(ii) 上と同様に $G = T(b)$ と仮定してよい. また上で示したように $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B$ が弱正則であれば (5.11) が成り立つ.

さて $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B'$ を任意にとり, W は b に属する既約な FH-加群とし $\nu(\dim_F W) = \nu(|H|) - d(b)$ をみたすものとする. このとき $\nu(|H|) - \nu(|\mathrm{vx}(W)|) \leq \nu(\dim_F W)$ (IV, 7.5参照) より $d(b) \leq \nu(|\mathrm{vx}(W)|)$ となるが, 一方 $\mathrm{vx}(W) \leq_H \delta(b)$ であるから $\mathrm{vx}(W) =_H \delta(b)$ となる. よって $\mathrm{vx}(W) = \delta(b)$ としてよい.

補題 5.8 より B' に属する既約な FG-加群 V で W が V_H の既約成分となるものがあるが, V_H は完全可約であるから $W | V_H$ となり $\mathrm{vx}(W) \leq_G \mathrm{vx}(V)$ $(\leq_G \delta(B'))$ となる. よって

$$\delta(b) = \mathrm{vx}(W) \leq_G \delta(B') \cap H$$

となるが, 一方 $\delta(B') \cap H \leq_G \delta(B) \cap H =_G \delta(b)$ であるから $\delta(b) =_G \delta(B') \cap H$ をえる. ここで b は G-不変であるから $\delta(b)$ の G-共役はまた b の不足群である. よって $\delta(b) =_H \delta(B') \cap H$ をえる. □

定理 5.17 $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ に対し $\mathrm{Irr}(b) \ni \zeta$ で次をみたすものがある:

$$\mathrm{ht}(\zeta) = 0, \qquad |T(b) : T(\zeta)| \not\equiv 0 \pmod p.$$

さらに詳しく $\mathrm{Bl}(G|b) \ni B$ は弱正則とし，$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ は $\mathrm{ht}(\chi) = 0$ で

$$\chi_H = e\Big(\sum_{x \in T(\zeta)\backslash G} \zeta^x\Big) \qquad (\zeta \in \mathrm{Irr}(b))$$

とすれば次が成り立つ：

$$(e, p) = 1, \qquad \mathrm{ht}(\zeta) = 0, \qquad |T(b) : T(\zeta)| \not\equiv 0 \pmod p.$$

［**証明**］ $G = T(b)$ と仮定して後半を示せばよい．$\chi(1) = e|G : T(\zeta)|\zeta(1)$ より

$$\nu(\chi(1)) = \nu(e) + \nu(|G : T(\zeta)|) + \nu(\zeta(1))$$

となる．一方 $\mathrm{ht}(\chi) = 0$ と (5.10) より

$$\begin{aligned}\nu(\chi(1)) &= \nu(|G|) - d(B) = \nu(|G|) - \nu(|G : H|) - d(b)\\ &= \nu(|H|) - d(b)\end{aligned}$$

となるが，$\nu(\zeta(1)) \geq \nu(|H|) - d(b)$ であるから

$$\nu(e) = \nu(|G : T(\zeta)|) = 0, \qquad \nu(\zeta(1)) = \nu(|H|) - d(b)$$

をえる．□

5.4 第1主定理の精密化(1)

$G \geq Q$ は p-部分群とする．このとき第1主定理によれば $\mathrm{Bl}(G|Q)$ と $\mathrm{Bl}(N_G(Q)|Q)$ は Brauer 対応によって1対1に対応する．ここで $N = N_G(Q)$，$H = QC_G(Q)$ とおいて $H \lhd N$ にこの節の結果を適用してみよう．

$C_N(Q) \leq H$ であるから，定理 5.15 より $\mathrm{Bl}(N) \ni \hat{B}$ にはそれが被覆する H のブロックの N-共役類 $\{b\}$ が対応して $b^N = \hat{B}$ となる．ここで b の N における惰性群を $T(b)$ と表せば次が成り立つ．

問 5.18 $\delta(\hat{B}) = Q$ となるため必要十分な条件は

(5.12) $\qquad \delta(b) = Q, \qquad |T(b) : H| \not\equiv 0 \pmod p$

が成り立つことである．（ヒント：定理 5.16，(5.9)，(5.10) を用いよ．）

(5.12) をみたす $b \in \mathrm{Bl}(H)$ の全体を $\Lambda(Q)$ と表し，その N-共役類の全体を $\Lambda(Q)/N$ と表すことにすれば，上の考察から第1主定理は次のように精密化される．

定理 5.19 上の記号のもとで次のような1対1の対応

$$\mathrm{Bl}(G\,|\,Q) \longleftrightarrow \mathrm{Bl}(N\,|\,Q) \longleftrightarrow \Lambda(Q)/N \qquad (B \leftrightarrow \widehat{B} \leftrightarrow \{b\})$$

が存在し，$b^N = \widehat{B}$，$\widehat{B}^G = B$ となる．

注 意　§8において，これはさらに $QC_G(Q)/Q$ の不足数0の既約指標と関係づけられる(定理8.13参照)．

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) =_G Q$ であるとき，$\mathrm{Bl}(QC_G(Q)) \ni b$ で $b^G = B$ となるものを B の **根** とよぶ．このとき $N = N_G(Q)$ とおけば，$Q \leq \delta(b) \leq_N \delta(b^N) \leq_G \delta(b^G) =_G Q$　であるから $Q = \delta(b) = \delta(b^N)$ となり $b \in \Lambda(Q)$ で，上の定理の対応で $B \leftrightarrow b^N \leftrightarrow \{b\}$ となる．このことと B の不足群の共役性から次が成り立つ．

定 理 5.20　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ の根は互いに G-共役である．

$\mathrm{Bl}(G\,|\,Q) \ni B$ の根 b に対し，b の $N_G(Q)$ における惰性群を $T(b)$ と表し，これを単に b の **惰性群** とよぶ．また

$$e(B) = |T(b) : QC_G(Q)| \not\equiv 0 \pmod p$$

を B の **惰性指数** とよぶ．

最後にこの節の結果の応用として次の定理を示しておこう．(Brauer [14], Alperin-Broué [1] 参照)

定 理 5.21　$G \geq H$，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$，$\delta(b) = Q$　とし，b は認容的 (すなわち $C_G(Q) \leq H$) と仮定する．このとき $\delta(b^G) = D$ を適当にとれば $D \cap H = Q$ となり，また次が成り立つ：

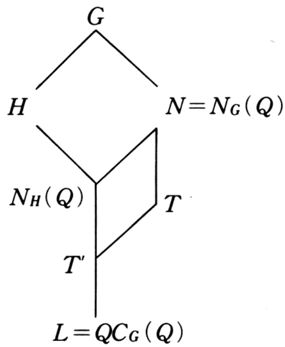
(5.13)　　$$Z(D) \leq C_D(Q) = Z(Q) \leq Q \leq D.$$

特に $\delta(b^G)$ が Abel 群ならば $\delta(b^G) =_G \delta(b)$ となる．

［**証 明**］ (奥山)　$B = b^G$ とおき $|\delta(B)|/|Q|$ に関する帰納法で示す．$L = QC_G(Q) = QC_H(Q)$，$N = N_G(Q)$　とおく．また $\mathrm{Bl}(L) \ni b_L$ を b の根とし $(b_L)^N = b_N$ とおけば，$(b_N)^G = (b_L)^G = ((b_L)^H)^G = b^G = B$　となる．$T = T(b_L)$ は N における b_L の惰性群とする．このとき定理5.15より N の任意のブロックは L に関して正則であるから，定理5.16より $\delta(b_N) = P$ を適当にとって

$$P \leq T, \qquad P \cap L = Q$$

としてよい．また $T' = T \cap N_H(Q)$ とおくと $|T' : L| \not\equiv 0 \pmod p$ となる（問5.18参照）．よって $L \lhd T'$ であることに注意すれば $P \cap T' = Q$ となる．



ここで $P = Q$ のときは第1主定理により $\delta(B) =_G Q$ であるから $D = Q$ とおけばよい．

また $P \gneqq Q$ のときは $|\delta(B)|/|P| < |\delta(B)|/|Q|$ であるから，H，b の代りに N，b_N を考えて帰納法の仮定を適用すれば，$\delta(B) = D$ を適当にとって $P = D \cap N$ としてよい．このとき

$$
\begin{aligned}
Q = P \cap T' = P \cap T \cap N_H(Q) &= P \cap N \cap H \\
&= D \cap N \cap H
\end{aligned}
$$

となる．ここで $Q \lneqq D \cap H$ と仮定すれば，p-群の性質から $Q \lneqq D \cap H \cap N$ となって矛盾である．よって $Q = D \cap H$ をえる．

このときまた $C_D(Q) = D \cap C_G(Q) \leq D \cap H = Q$ であるから (5.13) がえられる．特に D が Abel 群ならば $Z(D) = D$ であるから $Q = D$ となる．□

§6. 第3主定理

この節でも <u>K は1の原始 $|G|$ 乗根を含む</u>ものと仮定し，G の主ブロックを $B_0(G)$ と表す．Brauer 対応と主ブロックに関する次の定理は Brauer の **第3主定理** とよばれ，この節の目的はこれを証明することである．

定理6.1（第3主定理） $G \geq H$ とし，$\mathrm{Bl}(H) \ni b$ は認容的であるとする．このとき次が成り立つ：

$$b^G = B_0(G) \Longleftrightarrow b = B_0(H).$$

上の定理を示すため少し準備をしておく．まず添加写像

$$\mu_G : \quad RG \longrightarrow R \qquad (\sum_{x \in G} \alpha_x x \mapsto \sum_x \alpha_x)$$

は多元環準同型であるから，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $\mu_G(e_B)$ は0か1で，また唯一

つの B に対し $\mu_G(e_B)=1$ となる．これについて次が成り立つ．

補題 6.2 $\mu_G(e_B)=1 \Longleftrightarrow B=B_0(G)$.

[**証明**] 簡単のため $B_0=B_0(G)$ とおく．また $u=\frac{1}{|G|}(\sum_{x\in G}x)$ $(\in KG)$ とおけば，任意の $a\in KG$ に対し $au=\mu_G(a)u$ となる．特に $uKG=uK$ は自明な G-加群で，したがって $u\in e_{B_0}KG$ となる．よって $e_{B_0}u=u$，したがって $\mu_G(e_{B_0})=1$ となり，B_0 は $\mu_G(e_B)=1$ となる唯一つのブロックである．□

また次の補題が成り立つ．

補題 6.3 $G\geq Q$ は p-部分群とし，$QC_G(Q)\leq H\leq G$ とする．このとき $R[G-H]^H\ni c$ ならば $\mu_G(c)^*=0$ である．

[**証明**] $G-H\ni x$ に対し $\mu_G(\mathrm{Tr}^H_{C_H(x)}(x))=|H:C_H(x)|\equiv 0 \pmod p$ を示せばよい．いまこれを否定するとある $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$ に対し $P\leq C_H(x)$ となる．このとき $Q\leq_H P$ であるから $x\in_H C_G(Q)\leq H$，よって $x\in H$ となり矛盾である．□

以上の準備のもとに，第3主定理を Juhász [1] に従って示す．

[**第3主定理の証明**] ($\Leftarrow$) $b=B_0(H)$ は認容的とし，$B=b^G$ とおく．このとき補題3.9により次のような $c\in R[G-H]^H$ がある：$e_be_B=e_b+(1-e_B)c$．仮定により $\mu_G(e_b)^*=1$ であるから，補題6.3より $\mu_G(e_B)^*=1$ となり $B=B_0(G)$ をえる．

($\Rightarrow$) $\delta(b)=Q$ とおき，Q を含む $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ をとって $|P:Q|$ に関する帰納法で示す．仮定により $QC_G(Q)=QC_H(Q)\leq H$ である．$\mathrm{Bl}(H)\ni b$ の根を $\tilde{b}$ $(\in \mathrm{Bl}(QC_G(Q)\,|\,Q)$, $\tilde{b}^H=b)$ とし，また $N=N_G(Q)$，$\tilde{b}^N=\tilde{B}$ とおけば，仮定により $\tilde{B}^G=\tilde{b}^G=(\tilde{b}^H)^G=b^G=B_0(G)$ となる．このとき $\tilde{B}=B_0(N)$ となることをまず示す．

$P=Q$ のとき：($\Leftarrow$) より $B_0(N)^G=B_0(G)$ である．一方 $P=\delta(\tilde{b})\leq\delta(\tilde{B})$ より $\delta(\tilde{B})=P$ となり，第1主定理より $\tilde{B}=B_0(N)$ をえる．

$P\gneqq Q$ のとき：$Q=\delta(\tilde{b})\leq\delta(\tilde{B})$ であるが，$\delta(\tilde{B})=Q$ とすると第1主定理より $Q=\delta(\tilde{B}^G)=\delta(B_0(G))\lneqq P$ となり矛盾である．よって $|P:\delta(\tilde{B})|<|P:Q|$ となり，H，b の代りに N，$\tilde{B}$ をとって，これに帰納法の仮定を適用して $\tilde{B}=B_0(N)$ をえる．

さて $\tilde{b}_0=B_0(QC_G(Q))$ とおくと，($\Leftarrow$) より $\tilde{b}_0{}^N=B_0(N)=\tilde{b}^N$ となり $\tilde{b}$ と $\tilde{b}_0$

は N-共役である．ここで明らかに $\tilde{b}_0$ は N-不変であるから $\tilde{b} = \tilde{b}_0$，したがって $b = \tilde{b}^H = \tilde{b}_0{}^H = B_0(H)$ をえる．□

§7. 正規 p'-部分群に関する被覆

$G \triangleright H$ は正規 p'-部分群とし，$\bar{G} = G/H$ とおく．このとき H のブロック b は唯一つの既約指標 ζ からなり $e_b = e_\zeta$ である．この節では b を被覆する G のブロックを考察し，それがある巡回 p'-群の $\bar{G}$ による中心拡大のブロックの考察に帰着できるという Fong の結果とその応用についてのべる．

まず定理 5.10 より $\underline{T(b) = G}$ と仮定してよい．このとき e_b は RG の中心的べき等元で

$$e_b = e_{B_1} + \cdots + e_{B_r}$$

を e_b の中心的原始べき等元分解とすれば $\mathrm{Bl}(G|b) = \{B_i\,;1 \le i \le r\}$ となる．また

$$e_bRG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r \qquad (B_i = e_{B_i}RG)$$

は e_bRG のブロック分解である．

問題の考察に入るまえに少し準備をしておく．

補題 7.1 ブロック $b = e_bRH$ は（R-多元環として）$M_n(R)$ に同型である．

［**証明**］ 既約指標 ζ を与える R-表現を $\boldsymbol{F}: y \mapsto (a_{ij}(y))$ とする．このとき b^K $(= K \otimes_R b)$ を $M_n(K)$ と同一視して，その行列単位 $\{c_{ij}\}$ に関して $e_by = \sum_{ij} a_{ij}(y)c_{ij}$ としてよい．そのとき明らかに $b \subset M_n(R) = \bigoplus_{i,j} Rc_{ij}$ である．

一方 $c_{kl} = \sum_y \gamma_y y$ とすれば III, 2.21 (Fourier の反転公式) により

$$\gamma_y = |H|^{-1}(\sum_{\theta\in\mathrm{Irr}(H)} \theta(1)\theta(c_{kl}y^{-1})) = |H|^{-1}\zeta(1)\zeta(c_{kl}y^{-1})$$

となるが，$c_{kl}y^{-1} = c_{kl}e_by^{-1} = \sum_j a_{lj}(y^{-1})c_{kj}$ より $\zeta(c_{kl}y^{-1}) = a_{lk}(y^{-1}) \in R$，したがって $\gamma_y \in R$ となる．よって $c_{kl} \in e_bRH$ となり $M_n(R) \subset b$ をえる．□

強次数つき多元環に関する次の定理は e_bRG のブロック分解を調べるのに

必要である．

定理 7.2 (係数分離定理) $A=\bigoplus_{x\in G}A_x$ は (R 上の) G-強次数つき多元環とし，$A_1\simeq M_n(R)$ と仮定する．このとき次が成り立つ．

(i) $A\simeq A_1\otimes_R C_A(A_1)$.

(ii) $C_A(A_1)$ は G の R 上の一般群環である：

$$C_A(A_1)=\bigoplus_{x\in G}Ru_x,\qquad u_xu_y=\alpha(x,y)u_{xy}.$$

注 意 R 上の一般群環も体上の場合と同様に定義される (II, § 8.2 参照).

［**証 明**］ $A_1=M_n(R)$ としてよい．また $A_x=A_1v_x=v_xA_1$, v_x は A の正則元とする (IV, 6.2 参照)．このとき $a\mapsto v_x^{-1}av_x$ ($a\in A_1$) は A_1 の自己同型であるから，II, 4.8 よりこれは A_1 の内部自己同型である．したがって $A_1^\times\ni m_x$ が存在して $v_x^{-1}av_x=m_x^{-1}am_x(\forall a\in A_1)$ となり，$u_x=v_xm_x^{-1}$ とおけば $u_x\in C_A(A_1)$, $A_x=A_1u_x$ となる．

ここで $C=\bigoplus_xRu_x$ とおけば，$u_xu_yu_{xy}^{-1}\in A_1\cap C_A(A_1)=Z(A_1)=R$ であるから

$$u_xu_y=\alpha(x,y)u_{xy}\qquad(\alpha(x,y)\in R^\times)$$

となり，C は G の R 上の一般群環である．

また $A=A_1\otimes_RC$ となることは明らかであるが，$A\ni a=\sum_x n_x\otimes u_x$ ($n_x\in A_1$) が $C_A(A_1)$ に属することと $n_x\in Z(A_1)=R$ ($\forall x\in G$) となることは同値であるから $C_A(A_1)=C$ をえる．□

さて話を元に戻して $\bar{G}=G/H$ の各元 $\bar{x}$ の代表元 x をきめておく．ただし $\bar{1}$ の代表元は 1 としておく．このとき

$$A=e_bRG=\bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}}bx,\qquad A_{\bar{x}}=bx$$

とおけば，$T(b)=G$ という仮定から A は $\bar{G}$-強次数つき多元環となる．ここで $b=M_n(R)$ としてよいから，上の定理より

$$A=b\otimes_RC\qquad(C=C_A(b)),$$

$$C=\bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}}Ru_{\bar{x}},\qquad u_{\bar{x}}u_{\bar{y}}=\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})u_{\bar{x}\bar{y}},$$

$$bx=b\otimes u_{\bar{x}}\qquad(\forall\bar{x}\in\bar{G})$$

となる．ただし $u_{\bar{1}}=1$ とする．

いま $C=\bigoplus_{i=1}^{r}\bar{B}_i$ をブロック分解とすると

$$A=\bigoplus_{i=1}^{r} b\otimes_R \bar{B}_i \tag{7.1}$$

となり，(II, 4.1 は R-自由な多元環でも成り立つから) $Z(b\otimes_R \bar{B}_i)=Z(b)\otimes_R Z(\bar{B}_i)=R\otimes_R Z(\bar{B}_i)=Z(\bar{B}_i)$ となるが，これは局所環であるから (7.1) は $A=e_bRG$ のブロック分解である．このように A のブロック分解は C のブロック分解の問題に帰着される．

さて因子団 $\bar{\alpha}:\bar{G}\times\bar{G}\to R^{\times}$ は $u_{\bar{1}}=1$ としたから正規化されているが，これについて III, §5.2 でのべたことと関連して少し注意しておこう．

$H\ni h$ に対し $e_bh=Y(h)\in b=M_n(R)$ とすれば，$\boldsymbol{Y}:h\mapsto Y(h)$ は既約指標 ζ を与える H の R-表現である．また $\bar{G}\ni\bar{x}$ に対し $X(x)=xu_{\bar{x}}{}^{-1}\in b=M_n(R)$ とおけば

$$\begin{aligned}X(x)Y(h)X(x)^{-1}&=xu_{\bar{x}}{}^{-1}(e_bh)u_{\bar{x}}x^{-1}=xe_bhx^{-1}\\&=e_bxhx^{-1}=Y(xhx^{-1})\end{aligned}$$

となる．よって $G\ni hx$ に対し $X(hx)=Y(h)X(x)$ とおけば，III, 5.7 の証明から G の射影表現 $\boldsymbol{X}:hx\mapsto X(hx)$ がえられ，これは $\boldsymbol{Y}$ の拡張になっている．ここで $\bar{G}\ni\bar{x},\bar{y}$ に対し，$u_{\bar{x}}$ は $yu_{\bar{y}}{}^{-1}\in b$ と可換であるから

$$\begin{aligned}X(x)X(y)&=xu_{\bar{x}}{}^{-1}yu_{\bar{y}}{}^{-1}=xy\ u_{\bar{y}}{}^{-1}u_{\bar{x}}{}^{-1}\\&=\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})^{-1}xy\ u_{\overline{xy}}{}^{-1}=\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})^{-1}X(xy)\end{aligned}$$

となり $\bar{\alpha}^{|H|^2}\sim 1$ である．実際 $(\det X(x))^{-1}$ のべきで表される $\bar{\gamma}(\bar{x})\in R$ が存在して

$$\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})^{|H|^2}=\bar{\gamma}(\bar{x})\bar{\gamma}(\bar{y})\bar{\gamma}(\overline{xy})^{-1} \tag{7.2}$$

となる (III, 5.7 の証明参照)．

ここで R を適当に拡大して R は $\bar{\gamma}(\bar{x})$ の $|H|^2$ 乗根 $\bar{\gamma}'(\bar{x})$ を含むとしてよい．このとき $\bar{\alpha}'(\bar{x},\bar{y})=\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})\bar{\gamma}'(\bar{x})^{-1}\bar{\gamma}'(\bar{y})^{-1}\bar{\gamma}'(\overline{xy})$ とおけば $\bar{\alpha}'(\bar{x},\bar{y})^{|H|^2}=1$ となる．また $\bar{\gamma}(\bar{1})=1$ に対しては $\bar{\gamma}'(\bar{1})=1$ とすれば $\bar{\alpha}'$ は正規化されている．

さらに $\mathrm{Syl}_p(G)\ni P$ とするとき，ε を 1 の原始 $|H|^2$ 乗根として $\bar{\alpha}'$ の $\bar{P}\times$

$\bar{P}$ への制限を考えれば，$H^2(\bar{P},\langle\varepsilon\rangle)$ において $\bar{\alpha}'^{|P|}\sim 1$ となり，したがって $\bar{\alpha}'\sim 1$ である．よって $\bar{\gamma}'':\bar{G}\to\langle\varepsilon\rangle$ が存在して，$\bar{P}\ni\bar{x},\bar{y}$ ならば $\bar{\alpha}'(\bar{x},\bar{y}) = \bar{\gamma}''(\bar{x})\bar{\gamma}''(\bar{y})\bar{\gamma}''(\overline{xy})^{-1}$ となる．$\bar{\alpha}''(\bar{x},\bar{y}) = \bar{\alpha}'(\bar{x},\bar{y})\bar{\gamma}''(\bar{x})^{-1}\bar{\gamma}''(\bar{y})^{-1}\bar{\gamma}''(\overline{xy})$ とおけば，これは次をみたす：

(a)　　$\bar{\alpha}''(\bar{x},\bar{y})^{|H|^2}=1,\qquad \bar{\alpha}''(\bar{x},\bar{1}) = \bar{\alpha}''(\bar{1},\bar{x}) = 1,$

(b)　　$\bar{P}\ni\bar{x},\bar{y}\Longrightarrow\bar{\alpha}''(\bar{x},\bar{y})=1.$

よって $\bar{\alpha}$ は最初から上の条件をみたすとしてよい．

さて $\{\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{y})\,;\,\bar{x},\bar{y}\in\bar{G}\}$ が生成する $R^\times$ の部分群を Z とおけば，これは巡回 p'-群である．また $\tilde{G}=Z\times\bar{G}=\{(z,\bar{x})\,;\,z\in Z,\bar{x}\in\bar{G}\}$ における乗法を

$$(z,\bar{x})(z',\bar{x}')=(\bar{\alpha}(\bar{x},\bar{x}')zz'\,;\,\overline{xx'})$$

と定義すれば $\tilde{G}$ は群になる．ここで $\{(z,\bar{1})\,;\,z\in Z\}$ と Z は同型で，$(z,\bar{1})$ と z を同一視すると $Z\le Z(\tilde{G}),\tilde{G}/Z\simeq\bar{G}$ となり，$\tilde{G}$ は巡回 p'-群 Z の $\bar{G}$ による中心拡大である．

いま $\iota:Z\to R^\times$ $(z\mapsto z)$ を埋め込みとし，これを Z の一次の表現と考えれば，対応する原始べき等元は

$$e_\iota=\frac{1}{|Z|}\sum_{z\in Z}\iota(z^{-1})z$$

となり，これは $R\tilde{G}$ の中心的べき等元である．また写像

(7.3)　　$\varphi:C=\bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}}Ru_{\bar{x}}\longrightarrow e_\iota R\tilde{G}\qquad(u_{\bar{x}}\mapsto e_\iota(1,\bar{x}))$

は多元環同型であることが容易に確かめられる．したがって C のブロック分解 $C=\bigoplus_{i=1}^{r}\bar{B}_i$ に対応して $e_\iota R\tilde{G}$ のブロック分解 $e_\iota R\tilde{G}=\bigoplus_{i=1}^{r}\tilde{B}_i$ ($\tilde{B}_i=\varphi(\bar{B}_i)$) がえられ，$\mathrm{Bl}(G|b)\ni B_i=b\otimes_R\bar{B}_i$ に $\tilde{B}_i$ を対応させて $\mathrm{Bl}(G|b)$ と $\mathrm{Bl}(\tilde{G}|\{\iota\})$ の間に1対1の対応がつく．この間の関係をもっと詳しくみるため次の補題を示しておく．

補題 7.3　ここでは $\mathfrak{o}$ は K,R,F のいずれかを表すものとし，$b=M_n(\mathfrak{o})$，C は $\mathfrak{o}$-多元環，$A=b\otimes C$ とする．また $\mathfrak{o}^n$ は $\mathfrak{o}$ 上 n 次の行ベクトル全体のつくる加群とし，これを自然に b-加群とみる．このとき次が成り立つ．

(i) C-加群 U, V に対して

$$\mathrm{Hom}_C(U, V) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{o}^n \otimes U, \mathfrak{o}^n \otimes V) \qquad (f \mapsto \mathrm{id} \otimes f).$$

特に $\mathrm{End}_C(V) \simeq \mathrm{End}_A(\mathfrak{o}^n \otimes V)$ である.

(ii) (同型な加群を同一視して，例えば C-加群の全体を $\mathfrak{M}_C$ と表すことにすれば) $\mathfrak{M}_C \to \mathfrak{M}_A$ ($V \mapsto \mathfrak{o}^n \otimes V$) は全単射で直既約性を保つ. また $\mathfrak{o}$ が体のときは，これは既約性を保つ. (ただし $\otimes$ は $\otimes_{\mathfrak{o}}$ を意味するものとする.)

[**証明**] (i) $\psi : \mathrm{Hom}_C(U, V) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{o}^n \otimes U, \mathfrak{o}^n \otimes V)$ ($f \mapsto \mathrm{id} \otimes f$) は明らかに単準同型である. また $M_n(\mathfrak{o})$ の行列単位を $\{c_{ij}\}_{i,j}$ とし，$\mathfrak{o}^n$ の単位ベクトルを $\{e_i\}_i$ とすれば $e_i c_{1j} = \delta_{i1} e_j$ となる. いま $g : \mathfrak{o}^n \otimes U \to \mathfrak{o}^n \otimes V$ を $M_n(\mathfrak{o}) \otimes C$-準同型とし，$g(e_1 \otimes u) = \sum_i e_i \otimes v_i$ とすれば，$g(e_1 \otimes u) = g((e_1 \otimes u)(c_{11} \otimes 1)) = g(e_1 \otimes u)(c_{11} \otimes 1) = e_1 \otimes v_1$ となり $f : U \to V$ ($u \mapsto v_1$) は C-準同型である. ここで $g(e_i \otimes u) = g(e_1 \otimes u)(c_{1i} \otimes 1) = (e_1 \otimes f(u))(c_{1i} \otimes 1) = e_i \otimes f(u)$ となるから $g = \mathrm{id} \otimes f$ となり ψ は全準同型でもある.

(ii) は (i) より明らかである. □

さて話を再び元に戻して (7.3) の同型 φ で対応する元を同一視して $C = e_\iota R\tilde{G}, A = b \otimes_R e_\iota R\tilde{G}$ とする. また $e_\iota(1, \bar{x})$ を $u_{\bar{x}}$ と表すことにする. このとき $\bar{\alpha}$ に関する仮定 (b) より $\{(1, \bar{x}) ; x \in P\}$ は $\tilde{G}$ の Sylow p-部分群で，同型 $P \cong \tilde{P}$ ($x \mapsto \tilde{x} = (1, \bar{x})$) が成り立つ.

以上の準備のもとで次の定理が示される.

定理 7.4 (Fong) $G \triangleright H$ は正規 p'-部分群とし，$\bar{G} = G/H$ とおく. また $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ は G-不変とする. このとき巡回 p'-群 Z の $\bar{G}$ による中心拡大 $\tilde{G}$ と Z の一次表現 ι が存在して

$$A = e_b RG = b \otimes_R e_\iota R\tilde{G}$$

とおくことができる. また次のような 1 対 1 対応

$$\mathrm{Bl}(G \mid b) \longleftrightarrow \mathrm{Bl}(\tilde{G} \mid \{\iota\}) \qquad (B \longleftrightarrow \tilde{B})$$

が存在して次が成り立つ.

(i) $B = b \otimes_R \tilde{B}$.

(ii)　1対1の対応 $\mathrm{Irr}(B) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(\tilde{B})$ $(\chi \longleftrightarrow \tilde{\chi})$ と $\mathrm{IBr}(B) \longleftrightarrow \mathrm{IBr}(\tilde{B})$ $(\varphi \longleftrightarrow \tilde{\varphi})$ が存在して，分解定数と Cartan 不変数に関して

$$d_{\chi\varphi} = d_{\tilde{\chi}\tilde{\varphi}}, \qquad c_{\varphi\varphi'} = c_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}'}$$

が成り立つ.

(iii)　1対1対応 $\mathrm{IND}(B) \longleftrightarrow \mathrm{IND}(\tilde{B})$ $(V \longleftrightarrow \tilde{V})$ が存在して，ヴァーテックスについて $\mathrm{vx}(V) \leq P$ とすれば

$$\mathrm{vx}(\tilde{V}) =_{\bar{G}} \widetilde{\mathrm{vx}(V)} \quad (\simeq \mathrm{vx}(V))$$

となる.

(iv)　$\delta(B) \leq P$ とすれば次が成り立つ：

$$\delta(\tilde{B}) =_{\bar{G}} \widetilde{\delta(B)} \quad (\simeq \delta(B)).$$

[証明]　(i) はすでに示してある.

(ii)　$b = M_n(R)$ としてよい．補題 7.3 により1対1対応 $\mathfrak{M}_{\tilde{B}} \leftrightarrow \mathfrak{M}_B$ $(\tilde{U} \leftrightarrow U = R^n \otimes \tilde{U})$ があり，$\tilde{U}^K$ と $U^K = K^n \otimes \tilde{U}^K$ の既約性は同値である．また $\mathfrak{M}_{\tilde{B}^*}$ と $\mathfrak{M}_{B^*}$ についても同様である．このことから $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\chi} = \chi_{\tilde{U}}$ ならば $\chi = \chi_U \in \mathrm{Irr}(B)$, $\mathrm{IBr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\varphi} = \varphi_{\tilde{L}}$ ならば $\varphi = \varphi_L \in \mathrm{IBr}(B)$ (ただし $L = F^n \otimes \tilde{L}$) となり，1対1対応 $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(B), \mathrm{IBr}(\tilde{B}) \leftrightarrow \mathrm{IBr}(B)$ がえられる．ここで $\mathrm{Irr}(\tilde{B}) \ni \tilde{\chi} = \chi_{\tilde{U}}$, $\tilde{U}^* \leftrightarrow \sum_{\tilde{L}} d_{\tilde{\chi}\varphi_{\tilde{L}}} \tilde{L}$ とすれば，$L = F^n \otimes \tilde{L}$ は既約であるから $(R^n \otimes \tilde{U})^* = F^n \otimes \tilde{U}^* \leftrightarrow \sum_{\tilde{L}} d_{\tilde{\chi}\varphi_{\tilde{L}}} L$　となり $d_{\tilde{\chi}\tilde{\varphi}} = d_{\chi\varphi}$ をえる．これから Cartan 不変数に関する等式も成り立つ.

(iii)　補題 7.3 より1対1対応 $\mathrm{IND}(\tilde{B}) \leftrightarrow \mathrm{IND}(B)$ $(\tilde{V} \leftrightarrow V = R^n \otimes \tilde{V})$ があり，$\mathrm{IND}(\tilde{B}) \ni \tilde{V}$ に対し同型

$$\mathrm{E}_R(\tilde{V}) \simeq \mathrm{E}_{b\otimes R}(V) \qquad (\tilde{\sigma} \mapsto \sigma = \mathrm{id} \otimes \tilde{\sigma})$$

が成り立つ.（ただし例えば $\mathrm{E}_R(\tilde{V})$ は $\mathrm{End}_R(\tilde{V})$ を意味する.）

ここで $Ve_b = V$ より $\mathrm{E}_{b\otimes R}(V) = \mathrm{E}_R(V)^H$ となることがわかる．また $\mathrm{E}_R(\tilde{V}) \ni \tilde{\sigma}$ とすると，$\tilde{V} \ni \tilde{v}$, $Z \ni z = (z, 1)$ に対し $\tilde{v}z = \tilde{v}e_\iota z = \iota(z)\tilde{v}$ となることから $\tilde{\sigma}^z = \tilde{\sigma}$ となる．さらに $G \ni x$ とすると，$e_b x = m_x \otimes u_{\bar{x}}$ $(m_x \in b)$ となることから $\sigma = \mathrm{id} \otimes \tilde{\sigma}$ に対し $\sigma^x = \mathrm{id} \otimes \tilde{\sigma}^{(1,\bar{x})}$ となる.

さて $Q \leq P$ とするとき，$\mathrm{E}_R(\tilde{V}) \ni \tilde{\sigma}$ が $Z\tilde{Q}$-不変であることと σ が HQ-不変であることは同値で，$\mathrm{E}_R(\tilde{V})^{Z\tilde{Q}} \simeq \mathrm{E}_R(V)^{HQ}$ となる．また $\bar{G} = \sum_{\bar{t} \in \bar{Q}\backslash\bar{G}} \bar{Q}\bar{t}$ とすれば

$G=\sum_{\bar{t}}HQt$, $\tilde{G}=\sum_{\bar{t}}ZQ(1,\bar{t})$ となり，$\mathrm{E}_R(\tilde{V})^{Z\tilde{Q}}\ni\tilde{\sigma}$ に対し

$$\mathrm{Tr}_{HQ}^{G}(\mathrm{id}\otimes\tilde{\sigma})=\sum_{\bar{t}}\mathrm{id}\otimes\tilde{\sigma}^{(1,\bar{t})}=\mathrm{id}\otimes\mathrm{Tr}_{Z\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$$

となるから $\mathrm{Tr}_{HQ}^{G}(\mathrm{E}_{b\otimes R}(V))=\mathrm{id}\otimes\mathrm{Tr}_{Z\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\mathrm{E}_R(\tilde{V}))$ をえる．よって V が Q-射影的であることと $\tilde{V}$ が $\tilde{Q}$-射影的であることは同値で，ヴァーテックスに関する主張が成り立つ．

(iv) は (iii) より明らかである．□

群 G の正規部分群の列

$$G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_m=1$$

が存在して，各 G_i/G_{i+1} $(0\leq i\leq m-1)$ が p-群か p'-群であるとき G は **p-可解** であるという．G が可解であることと，すべての素数 p について p-可解であることは同値である．

定理 7.4 の応用として，p-可解群に関する次の定理を示す．

定理 7.5 (Fong-Swan) G は p-可解群とする．このとき任意の $\varphi\in\mathrm{IBr}(G)$ に対し $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ で $\chi|_{G_{p'}}=\varphi$ となるものがある．

[**証明**] $(|G|_p,|G|)$ に関する 2 重帰納法で示す．$|G|_p=1$ のときは明らかであるから $|G|_p>1$ とする．また $O_p(G)\gneq 1$ のときは，$G/O_p(G)$ に帰納法の仮定を適用して定理が示されるから $O_p(G)=1$ としてよい．このとき $H=O_{p'}(G)>1$ となる．φ はブロック B に属するとし，b は B によって被覆される H のブロックとする．このとき $T(b)\lneq G$ ならば $T(b)$ に帰納法の仮定を適用できて，定理 5.10 より主張がえられる．

よって $T(b)=G$ としてよい．このときは p'-群 Z の $\bar{G}=G/H$ による中心拡大 $\tilde{G}$ を定理 7.4 のようにとれば，$|\tilde{G}|_p=|G|_p$ で，また $O_p(\bar{G})>1$ より $O_p(\tilde{G})>1$ となって $\tilde{G}$ については定理が成り立つ．よって定理 7.4 (ii) より G についても主張が成り立つ．□

注意 定理 7.4 の $\tilde{G}$ は G より扱い易い群ではあるが，一般に $|\tilde{G}|<|G|$ とはならない．上の証明で 2 重帰納法を用いたのはそのためである．

§8. ブロックと剰余群

8.1 $\mathrm{Ker}_G B$

この節の主題と少しはなれるがその一部が必要なため，ここで RG のブロックイデアル B を G の表現加群とみたときの核 $\mathrm{Ker}_G B$ についてまとめておこう．

まず B_{RG} による G の表現の指標は

$$\chi_B = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \chi(1)\chi$$

であるから

$$\mathrm{Ker}_G B = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \mathrm{Ker}\,\chi$$

である．

定理 8.1　任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し

$$\mathrm{Ker}_G B = O_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi) = \mathrm{Ker}\,\chi \cap O_{p'}(G).$$

特に主ブロック $B_0 = B_0(G)$ に対しては

$$\mathrm{Ker}_G B_0 = O_{p'}(G).$$

[証明]　B_{RG} は射影的であるから，$G \ni x$ が p'-元でなければ $\chi_B(x) = 0$ となり，したがって $x \notin \mathrm{Ker}_G B$ であるから $\mathrm{Ker}_G B \subset O_{p'}(G)$ をえる．よって　$\mathrm{Ker}_G B \subset O_{p'}(G) \cap \mathrm{Ker}\,\chi = O_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi)$　となる．

一方 $H = O_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi)$ とおき，$u = \dfrac{1}{|H|}\sum_{y \in H} y$ とすれば u は RG の中心的べき等元で，$\omega_\chi(u) = 1$ であるから $\omega_B{}^*(u^*) = 1$ となる．よって $ue_B = e_B$ となり，$B = e_B RG \subset uRG$ である．ここで $G \ni x$，$H \ni h$ に対して　$(ux)h = u(xhx^{-1})x = ux$　となるから H は uRG に自明に作用し，$H = O_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi) \subset \mathrm{Ker}_G B$ をえる．

定理の後半は χ として $\mathbf{1}_G$ をとればよい．□

Brauer 指標の核については次が成り立つ．

定理 8.2　$M = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{IBr}(B)} \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ とおけば

$$M/\mathrm{Ker}_G(B) = O_p(G/\mathrm{Ker}_G B).$$

[証明]　$\mathrm{Ker}_G B \leq M$，$O_p(G/\mathrm{Ker}_G B) \leq M/\mathrm{Ker}_G B$ となることは明らかであ

る．よって $M/\mathrm{Ker}_G B$ が p-群であることを示せばよい．

いま $M \ni x$ が p-正則元とすれば，任意の $\varphi \in \mathrm{IBr}(B)$ に対して $\varphi(x) = \varphi(1)$ であるから任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して $\chi(x) = \chi(1)$ となる．よって $x \in \bigcap_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \mathrm{Ker}\,\chi = \mathrm{Ker}_G B$ となり，$M/\mathrm{Ker}_G B$ は p-群である．□

$G = PO_{p'}(G)$，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ となるとき G は **p-べき零**であるという．上の定理を用いて p-べき零群は次のように特徴づけられる．

定理 8.3 B_0 を G の主ブロックとするとき，G が p-べき零であるため必要十分な条件は $l(B_0) = 1$ となることである．

[証明] G が p-べき零ならば，前定理により $\mathrm{IBr}(B_0) \ni \varphi$ に対し $G = \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ となり $\varphi^* = \mathbf{1}_G{}^*$，したがって $l(B_0) = 1$ をえる．

逆に $\mathrm{IBr}(B_0) = \{\mathbf{1}_G\}$ とすれば

$$O_p(G/O_{p'}(G)) = \mathrm{Ker}\,\mathbf{1}_G{}^*/O_{p'}(G) = G/O_{p'}(G)$$

となるから G は p-べき零である．□

8.2 ブロックの支配

この小節では <u>$G \rhd H$，$\bar{G} = G/H$</u> とする．このとき自然な多元環準同型

$$\mu_H : \quad KG \longrightarrow K\bar{G} \qquad (\textstyle\sum_x a_x x \mapsto \sum_x a_x \bar{x})$$

がえられる．

補題 8.4 $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ とするとき $\mu_H(e_\chi)$ について次が成り立つ．

(i) $H \leq \mathrm{Ker}\,\chi$ ならば，χ から自然に $\bar{G}$ の既約指標 $\chi' : \bar{x} \mapsto \chi(x)$ がえられ，$\mu_H(e_\chi) = e_{\chi'}$ となる．

(ii) $H \not\leq \mathrm{Ker}\,\chi$ ならば $\mu_H(e_\chi) = 0$ である．

[証明] (i) χ から上のような $\chi' \in \mathrm{Irr}(\bar{G})$ がえられることは明らかである．また

$$\begin{aligned}\mu_H(e_\chi) &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in H\backslash G}\sum_{h\in H}\chi(1)\chi((hx)^{-1})\bar{x} \\ &= \frac{|H|}{|G|}\sum_{\bar{x}\in\bar{G}}\chi'(1)\chi'(\bar{x}^{-1})\bar{x} = e_{\chi'}\end{aligned}$$

となる．

(ii) $\Lambda = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G)\,;\, H \leq \mathrm{Ker}\,\chi\}$ とすれば $\mathrm{Irr}(\bar{G}) = \{\chi'\,;\,\chi \in \Lambda\}$ である．よって

$$\bar{1} = \sum_{\chi\in\Lambda} e_{\chi'} = \sum_{\chi\in\Lambda} \mu_H(e_\chi)$$

は $K\bar{G}$ における $\bar{1}$ の中心的原始べき等元分解である．一方

$$\bar{1} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \mu_H(e_\chi)$$

であるから，$\chi \notin \Lambda$ ならば $\mu_H(e_\chi) = 0$ となる．□

上の補題 (i) における χ' を $\chi = \chi' \circ \mu_H$ と同一視して $\mathrm{Irr}(\bar{G}) \subset \mathrm{Irr}(G)$ と考えることにする．

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $\mu_H(e_B)$ は 0 か $R\bar{G}$ の中心的べき等元である．したがって $\mu_H(e_B) \neq 0$ ならば $\bar{G}$ のブロック $\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_r$ が存在して

(8.1) $$\mu_H(e_B) = e_{\bar{B}_1} + \cdots + e_{\bar{B}_r}$$

となる．このとき G のブロック B は $\bar{G}$ のブロック $\bar{B}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ を **支配する** という．$Z(R\bar{G})$ において

$$\bar{1} = \sum_{B\in\mathrm{Bl}(G)} \mu_H(e_B) = \sum_{\bar{B}\in\mathrm{Bl}(\bar{G})} e_{\bar{B}}$$

であるから，任意の $\bar{B} \in \mathrm{Bl}(\bar{G})$ は唯一つのブロック $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に支配される．

補題 8.5 $\mu_H{}^*: FG \to F\bar{G}$ を自然な準同型とするとき，$\mathrm{Bl}(\bar{G}) \ni \bar{B}$ が $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に支配されるならば次が成り立つ：

(8.2) $$\omega_B{}^* = \omega_{\bar{B}}{}^* \circ \mu_H{}^*.$$

[証明] $\mu_H(e_B) = \sum_{i=1}^r e_{\bar{B}_i}$ とすれば，準同型 $\omega_{\bar{B}_i}{}^* \circ \mu_H{}^*: Z(FG) \to F$ において $\omega_{\bar{B}_i}{}^* \circ \mu_H{}^*(e_B{}^*) = 1$ であるから (8.2) が成り立つ．□

補題 8.6 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$, $\mathrm{Bl}(\bar{G}) \ni \bar{B}$ とするとき次が成り立つ．

(i) $\mu_H(e_B) \neq 0$ なるため必要十分な条件は，$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ で $H \leq \mathrm{Ker}\,\chi$ となるものが存在することである．

(ii) $\bar{B}$ が B に支配されるため必要十分な条件は $\mathrm{Irr}(\bar{B}) \subset \mathrm{Irr}(B)$ が成り

立つことである．

[**証明**] (i) は補題8.4より明らかである．

(ii) (8.1) において $\bar{B}=\bar{B}_1$ とすれば，任意の $\chi\in\mathrm{Irr}(\bar{B}_1)$ に対し $\chi(e_B)=\chi(e_{\bar{B}_1})\neq 0$ となるから $\chi\in\mathrm{Irr}(B)$，したがって $\mathrm{Irr}(\bar{B}_1)\subset\mathrm{Irr}(B)$ をえる．

逆に $\mathrm{Irr}(\bar{B})\subset\mathrm{Irr}(B)$ とすれば，(i) より $\mu_H(e_B)\neq 0$ となる．$\chi\in\mathrm{Irr}(\bar{B})$ とすれば仮定により $\chi(e_B)\neq 0$ であるから，(8.1) を $\mu_H(e_B)$ の中心的原始べき等元分解とするとき，ある i に対し $\chi(e_{\bar{B}_i})\neq 0$ となり，このとき $\bar{B}_i=\bar{B}$ である．□

定理 8.7 $\mathrm{Bl}(G)\ni B$ とするとき次が成り立つ．

(i) $\mu_H(e_B)\neq 0 \Longrightarrow \delta(B)\cap H\in\mathrm{Syl}_p(H)$.

(ii) $\mathrm{Bl}(\bar{G})\ni\bar{B}$ が B に支配されるならば

$$\delta(\bar{B})\leq_{\bar{G}}\overline{\delta(B)}=\delta(B)H/H.$$

特に次が成り立つ：

$$d(\bar{B})\leq d(B)-\nu(|H|).$$

[**証明**] $\mu_H{}^*: FG\to F\bar{G}$ を自然な準同型とする．

(i) $e_B=\sum_C\beta_B(C)\hat{C}$，$\mu_H(e_B)\neq 0$ とする．このとき $\mu_H{}^*(e_B{}^*)=\mu_H(e_B)^*\neq 0$ であるから，$\mathrm{Cl}(G)\ni C$ で $\beta_B(C)^*\neq 0$，$\mu_H{}^*(\hat{C})\neq 0$ となるものがある．$\beta_B(C)^*\neq 0$ より $\delta(C)\leq_G\delta(B)$ となり，また $Q\in\mathrm{Syl}_p(H)$ とするとき $\mu_H{}^*(\hat{C})\neq 0$ より $Q\leq_G\delta(C)$ となる (補題2.6 (iii) 参照)．よって $\delta(B)$ は H のある Sylow p-群を含み $\delta(B)\cap H\in\mathrm{Syl}_p(H)$ をえる．

(ii) $D=\delta(B)$ とおくとき $\mu_H{}^*((FG)_D^G)\subset(F\bar{G})_{\bar{D}}^{\bar{G}}$ となる．実際 $(FG)^D\ni a$ とすれば，$\mathrm{Tr}_D^G(a)=\mathrm{Tr}_{HD}^G(\mathrm{Tr}_D^{HD}(a))$ であるから $\mu_H{}^*(\mathrm{Tr}_D^G(a))=\mathrm{Tr}_{\bar{D}}^{\bar{G}}(\mu_H{}^*(\mathrm{Tr}_D^{HD}(a)))\in(F\bar{G})_{\bar{D}}^{\bar{G}}$ となる．

さて $e_B{}^*\in(FG)_D^G$ であるから $\mu_H{}^*(e_B{}^*)\in(F\bar{G})_{\bar{D}}^{\bar{G}}$ となり，仮定により $e_{\bar{B}}{}^*=e_{\bar{B}}{}^*\mu_H{}^*(e_B{}^*)\in(F\bar{G})_{\bar{D}}^{\bar{G}}$ となる．したがって $\delta(\bar{B})\leq_{\bar{G}}\bar{D}$ をえる．また後半は (i) から明らかである．□

特に H が p'-群のときは次が成り立つ．

定理 8.8 H が p'-群のとき，$\mu_H(e_B)\neq 0$ ならば $\mu_H(e_B)$ は $\bar{G}$ のあるブロックべき等元 $e_{\bar{B}}$ に一致し，このとき

$$\mathrm{Irr}(\bar{B}) = \mathrm{Irr}(B), \qquad \delta(\bar{B}) =_{\bar{G}} \overline{\delta(B)}$$

となる．

［証明］ $\mu_H(e_B) \neq 0$ ならば補題 8.6 (i) より $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ で $H \leq \mathrm{Ker}\,\chi$ となるものがある．このとき定理 8.1 より $\mathrm{Ker}_G B = O_{p'}(\mathrm{Ker}\,\chi) \geq H$ となるから $\mathrm{Irr}(B) \subset \mathrm{Irr}(\bar{G})$ である．また $\mathrm{IBr}(B) \ni \varphi$ とすれば $H \leq \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ であるから $\varphi \in \mathrm{IBr}(\bar{G})$ と考えることができる．よって $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi_1, \chi_2$ は $\bar{G}$ の既約指標として，III, § 6.4 の意味で $\chi_1 \sim \chi_2$ となり，したがって $\mathrm{Bl}(\bar{G}) \ni \bar{B}$ があって $\mathrm{Irr}(B) = \mathrm{Irr}(\bar{B})$ となる．

$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$, $\mathrm{ht}(\chi) = 0$ とすれば，$\nu(\chi(1)) = \nu(|G|) - d(B) = \nu(|\bar{G}|) - d(B)$ であるから $d(B) \leq d(\bar{B})$ となり，定理 8.7 (ii) より $\delta(\bar{B}) =_{\bar{G}} \overline{\delta(B)}$ をえる．□

8.3　正規 p-部分群による剰余群

この小節では記号を少し変えて

(8.3)　　$\underline{G \rhd Q \text{ は } p\text{-部分群}, \ \bar{G} = G/Q}$

とする．

補題 8.9　$\mathrm{Cl}(G_{p'}) \ni C$ は $C_G(Q)$ に含まれるとする．このとき $C \ni x$ に対し $\bar{x}$ を含む $\bar{G}$-共役類を $\bar{C}$ とすれば次が成り立つ．

(i)　$C_{\bar{G}}(\bar{x}) = C_G(x)/Q \quad (= \overline{C_G(x)})$.

(ii)　$\delta(\bar{C}) =_{\bar{G}} \overline{\delta(C)}$.

(iii)　$\mu_Q(\hat{C}) = \hat{\bar{C}}$.

［証明］ (i)　$\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y} = \bar{x}$ とすれば，$z \in Q$ があって $y^{-1}xy = xz$ となるが，仮定により x は p'-元で $Q \leq C_G(x)$ であるから両辺の位数を比較して $z = 1$ をえる．よって $C_{\bar{G}}(\bar{x}) \leq \overline{C_G(x)}$ となるが，逆の包含関係は一般に成り立つから (i) がえられる．

(ii) は (i) より明らかである．また (i) より $|\bar{C}| = |C|$ であるから (iii) が成り立つ．
□

定理 8.10　任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し $\mu_Q(e_B) \neq 0$ となる．また B が支配する $\bar{B} \in \mathrm{Bl}(\bar{G})$ で $\delta(\bar{B}) =_{\bar{G}} \overline{\delta(B)}$ となるものがある．

［証明］ 補題 2.7 より $\mu_Q^* : FG \to F\bar{G}$ の核はべき零であるから $\mu_Q^*(e_B^*) \neq 0$，し

たがって $\mu_Q(e_B) \neq 0$ である.

$e_B = \sum_C \beta_B(C)\hat{C}$ において $\beta_B(C_0)^* \neq 0 \neq \omega_B{}^*(\hat{C}_0)$ となる $C_0 \in \mathrm{Cl}(G)$ をとれば $C_0 \subset G_{p'}$ で $\delta(C_0) =_G \delta(B) \geq Q$ である. よって $C_0 \subset C_G(Q)$ となるから, $C_0 \ni x$ に対し $\bar{x}$ を含む $\bar{G}$ の共役類を $\bar{C}_0$ とすれば補題 8.9 が適用できる.

いま $\mu_Q(e_B) = \sum_{i=1}^{r} e_{\bar{B}_i}$, $e_{\bar{B}_i} = \sum_{\bar{C}} \beta_{\bar{B}_i}(\bar{C})\hat{\bar{C}}$ とすれば, $\mu_Q(\hat{C}_0) = \hat{\bar{C}}_0$ の係数をみて $\beta_B(C_0)^* = \sum_i \beta_{\bar{B}_i}(\bar{C}_0)^* \neq 0$ となり, ある i に対し $\beta_{\bar{B}_i}(\bar{C}_0)^* \neq 0$, したがって $\delta(\bar{C}_0) \leq_{\bar{G}} \delta(\bar{B}_i)$ となる. このとき $\overline{\delta(B)} =_{\bar{G}} \overline{\delta(C_0)} = \delta(\bar{C}_0) \leq_{\bar{G}} \delta(\bar{B}_i)$ であるから $\overline{\delta(B)} = \delta(\bar{B}_i)$ をえる. □

定理 8.11 $|G : C_G(Q)|$ が p べきならば, 任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し $\mu_Q(e_B) = e_{\bar{B}}$ $(\bar{B} \in \mathrm{Bl}(\bar{G}))$ となり, B に $\bar{B}$ を対応させて $\mathrm{Bl}(G)$ と $\mathrm{Bl}(\bar{G})$ の間に 1 対 1 の対応がつく. また Cartan 行列について次が成り立つ:

(8.4) $$C_B = |Q|\, C_{\bar{B}}.$$

[**証明**] 仮定により $G_{p'} \subset C_G(Q)$ となり, $\bar{G}_{p'} = \overline{G_{p'}}$ と $G_{p'}$ の元は 1 対 1 に対応している. また $\mathrm{IBr}(G) \ni \varphi$ の核は Q を含むから φ は $\bar{\varphi} \in \mathrm{IBr}(\bar{G})$ を自然に定義する.

さて $\mathrm{IBr}(G) \ni \varphi_i, \varphi_j$ に対し

$$(\varphi_i, \varphi_j)' = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G_{p'}} \varphi_i(x)\, \varphi_j(x^{-1})$$
$$= \frac{1}{|Q|} \frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{\bar{x} \in \bar{G}_{p'}} \bar{\varphi}_i(\bar{x})\, \bar{\varphi}_j(\bar{x}^{-1}) = \frac{1}{|Q|} (\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j)'$$

となるから, $G, \bar{G}$ の Cartan 行列を $C, \bar{C}$ とするとき $C = |Q|\, \bar{C}$ が成り立つ (III, 6. 11 (ii) 参照).

またこれより $|\mathrm{Bl}(G)| = |\mathrm{Bl}(\bar{G})|$ となり, 任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し $\mu_H(e_B)$ は $\bar{G}$ のあるブロックべき等元 $e_{\bar{B}}$ に一致し, (8.4) が成り立つ. □

8.4 第1主定理の精密化(2)

この小節では <u>$G \geq Q$ は p-部分群</u>とし, <u>$N = N_G(Q), H = QC_G(Q), \bar{N} = N/Q$</u> とおく.

§5.4 で示したように Q を不足群にもつ G のブロック B には $\mathrm{Bl}(H|Q)$ の

ある N-共役類が対応する．以下ではさらに，B には $\bar{H}$ の不足数 0 のある既約指標が対応することを示す．

前と同様に $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ の N における惰性群を $T(b)$ と表し，また $\mathrm{Irr}(\bar{H}) \ni \theta$ を H の既約指標と考えたとき，その N における惰性群を $T(\theta)$ と表す．

まず定理 8.11 を用いて次の補題がえられる．

補 題 8.12　$\mathrm{Bl}(H) \ni b$，$\delta(b) = Q$ ならば次が成り立つ．

(i)　$l(b) = 1$.

(ii)　$\mathrm{Irr}(b) \ni \theta$ で $\mathrm{Ker}\,\theta \geq Q$ となるものが唯一つ存在し，$\mathrm{ht}(\theta) = 0$ となる．

［**証 明**］　$H \triangleright Q$ に定理 8.11 が適用できるから，b に対し $\mu_Q(e_b) = e_{\bar{b}}$ となる $\bar{b} \in \mathrm{Bl}(\bar{H})$ が存在し，定理 8.10 より $\delta(\bar{b}) =_{\bar{H}} \overline{\delta(b)} = \bar{1}$ となる．よって $d(\bar{b}) = 0$ となり $l(\bar{b}) = 1$ である．また (8.4) より $l(b) = l(\bar{b})$ であるから (i) がえられる．

さて $\mathrm{Irr}(\bar{b}) = \{\theta\}$ とし，θ を H の既約指標とみれば $\mathrm{ht}(\theta) = 0$ である．また $\mathrm{Irr}(b) \ni \theta', \mathrm{Ker}\,\theta' \geq Q$ とすれば $\theta' \in \mathrm{Irr}(\bar{b})$ となるから $\theta' = \theta$ となり，θ の一意性が示される．□

上の補題のような θ を b の **標準指標** とよぶ．$N \ni x$ ならば b^x の標準指標は θ^x である．特に $T(b) = T(\theta)$ が成り立つ．

さて $\Lambda(Q), \Lambda(Q)/N$ は定理 5.19 と同じとすれば，1 対 1 の対応

$$\mathrm{Bl}(G\,|\,Q) \longleftrightarrow \mathrm{Bl}(N\,|\,Q) \longleftrightarrow \Lambda(Q)/N \qquad (B \leftrightarrow \hat{B} \leftrightarrow \{b\})$$

が存在し，$b^G = \hat{B}^G = B$ となる．さらに定理 5.19，補題 8.12 から第 1 主定理は次のように精密化される．

定 理 8.13　$\bar{H}$ の不足数 0 の既約指標 θ で

$$(8.5) \qquad |T(\theta) : H| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

をみたすものの全体を $\bar{\Lambda}(Q)$，その N-共役類の全体を $\bar{\Lambda}(Q)/N$ とすれば，次のような 1 対 1 の対応

$$\mathrm{Bl}(G\,|\,Q) \longleftrightarrow \bar{\Lambda}(Q)/N \qquad (B \longleftrightarrow \{\theta\})$$

が存在し，$\theta \in \mathrm{Irr}(b)$ $(b \in \mathrm{Bl}(H))$ ならば $b^G = B$ となる．

最後に補題 8.12 と関連して次の定理を示しておく.

定理 8.14 $\mathrm{Bl}(H \mid Q) \ni b$ の標準指標を θ とする. また $\mathrm{Irr}(Q) = \{\xi_1 = 1_Q, \xi_2, \cdots, \xi_r\}$ とし, 各 ξ_i に対して H の類関数 θ_i を次のように定義する:

$$\theta_i(h) = \begin{cases} 0 & : h_p \notin Q \text{ のとき}, \\ \xi_i(h_p)\theta(h_{p'}) & : h_p \in Q \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき $\mathrm{Irr}(b) = \{\theta_1 = \theta, \theta_2, \cdots, \theta_r\}$ となる.

［**証明**］ まず $\zeta \in \mathrm{Irr}(b)$ とする. $H = QC_G(Q)$ より $\xi_i{}^h = \xi_i$ $(\forall h \in H, \forall \xi_i)$ が成り立ち, したがって $\zeta_Q = e\xi_i$ となる ξ_i と自然数 e がある.

$H \ni h = h_p h_{p'}$ に対し $h_p \notin Q = \delta(b)$ ならば $\zeta(h) = 0$ である. また $h_p \in Q$ のときは $h \in Q \times \langle h_{p'} \rangle = L$ となり, ζ の L への制限は $\langle h_{p'} \rangle$ の適当な指標 α をとって $\zeta_L = \xi_i \times \alpha$ と表される. すなわち $x \in Q$ とするとき $\zeta(xh_{p'}) = \xi_i(x)\alpha(h_{p'})$ となり, 特に $\alpha(h_{p'}) = \zeta(h_{p'})/\xi_i(1)$ となって

$$\zeta(xh_{p'}) = \frac{\xi_i(x)}{\xi_i(1)}\zeta(h_{p'}) \qquad (x \in Q)$$

をえる.

補題 8.12 の証明から θ は $\bar{H}$ の不足数 0 の既約指標で, したがって H の Brauer 指標と考えることができるが, そのとき分解定数 $d_{\zeta\theta}$, Cartan 不変数 $c_{\theta\theta}$ 等が定義される.

さて $x \in Q, y \in H_{p'} (\subset C_G(Q))$ ならば

$$\zeta(xy) = \frac{\xi_i(x)}{\xi_i(1)}\zeta(y) = \frac{\xi_i(x)}{\xi_i(1)} d_{\zeta\theta}\theta(y)$$

$$= \frac{d_{\zeta\theta}}{\xi_i(1)}\theta_i(xy)$$

となるから

$$1 = (\zeta, \zeta)_H = \frac{1}{|H|}\sum_{x \in Q}\sum_{y \in H_{p'}} |\zeta(xy)|^2$$

$$= \frac{1}{|H|}\left(\frac{d_{\zeta\theta}}{\xi_i(1)}\right)^2 \sum_{x \in Q} |\xi_i(x)|^2 \sum_{y \in H_{p'}} |\theta(y)|^2$$

$$= \left(\frac{d_{\zeta\theta}}{\xi_i(1)}\right)^2 \frac{|Q|}{|H|} \sum_{\bar{y} \in \bar{H}_{p'}} |\theta(\bar{y})|^2$$

$$= \left(\frac{d_{\zeta\theta}}{\xi_i(1)}\right)^2 \frac{1}{|\bar{H}|}\sum_{\bar{y} \in \bar{H}} |\theta(\bar{y})|^2 = \left(\frac{d_{\zeta\theta}}{\xi_i(1)}\right)^2$$

となり，$d_{\zeta\theta}/\xi_i(1) = 1, \zeta = \theta_i$ をえる．

このようにして $\mathrm{Irr}(b) \ni \zeta$ はある θ_i に一致するから，$\mathrm{Irr}(b) = \{\theta_1 = \theta, \cdots, \theta_s\}$ $(s \leq r)$ としてよい．このとき

$$|Q| = c_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^{s} (d_{\theta_i\theta})^2 = \sum_{i=1}^{s} \xi_i(1)^2$$

となるから $s = r$ をえる．□

§9. 部分対と部分節

9.1 部分対

G の p-部分群 Q と $QC_G(Q)$ のブロック b の対 (Q, b) を G の**部分対** (subpair) とよぶ．このとき b^G が定義されるが，$b^G = B$ であるとき (Q, b) は **B に属する**，または **B-部分対** であるという．この小節では部分対に関する基本的な事柄を Alperin [5] に従ってのべる．

二つの部分対 (Q, b_Q) と (P, b_P) に対し，次の 3 条件

(a) $Q \lhd P$,

(b) b_Q は P-不変,

(c) $(b_Q)^{PC_G(Q)} = (b_P)^{PC_G(Q)}$

が成り立つとき $(Q, b_Q) \lhd (P, b_P)$ とかく．このとき $QC_G(Q)$，$PC_G(P) \leq PC_G(Q)$ に注意すれば $(b_Q)^G = (b_P)^G$ となり，これを B とおけば (Q, b_Q) と (P, b_P) はともに B-部分対である．

また部分対 (Q, b_Q) と (P, b_P) に対し，次のような部分対の列

$$(Q, b_Q) = (Q_1, b_{Q_1}) \lhd (Q_2, b_{Q_2}) \lhd \cdots\cdots \lhd (Q_r, b_{Q_r}) = (P, b_P)$$

が存在するとき $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ とかき，(Q, b_Q) は (P, b_P) に含まれるという．

部分対 (Q, b) と $G \ni t$ に対し (Q^t, b^t) はまた部分対で，これは (Q, b) に G-共役であるという．

$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，(Q, b) は B-部分対とすれば，一般に $Q \leq \delta(b) \leq_G \delta(b^G) =$

$\delta(B)$ となるが，特に $\delta(B) = Q$ であるとき (Q, b) は **Sylow B-部分対** であるという．このとき b は B の根である．

B-部分対については，まず次の Sylow 型の定理が成り立つ．

定理 9.1 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し次が成り立つ．

（i） Sylow B-部分対は互いに G-共役である．

（ii） 任意の B-部分対はある Sylow B-部分対に含まれる．

[**証明**] （i） 定理 5.19,20 より明らかである．

（ii） (Q, b) が ($\leq$ に関して) 極大な B-部分対ならば $\delta(B) =_G Q$，すなわちこれが Sylow B-部分対になることを示せばよい．

$H = QC_G(Q)$ とおき，b の $N_G(Q)$ における惰性群を $T(b)$ とする．また $L/H \in \mathrm{Syl}_p(T(b)/H)$ とすれば，定理 5.15 より b^L は正則で，したがって $P = \delta(b^L)$ とおけば定理5.16, (5.9) より $L = PH = PC_G(Q)$，さらに同定理 (ii) より $P \cap H = \delta(b)$ としてよい．

ここで $\mathrm{Bl}(L|P) \ni b^L$ に対し $b_P \in \mathrm{Bl}(PC_L(P))$ を適当にとれば $(b_P)^L = b^L$，すなわち $(b_P)^{PC_G(Q)} = b^{PC_G(Q)}$ となるものがあるが，$Q \leq P$ より $C_G(P) \leq C_G(Q) \leq L$，よって $C_L(P) = C_G(P)$ であるから (P, b_P) は部分対で，$Q \lhd P$，b は P-不変であるから $(Q, b) \lhd (P, b_P)$ となる．したがって (Q, b) の極大性より $Q = P = \delta(b)$ となり，$L = H$，よって $|T(b) : H| \not\equiv 0 \pmod{p}$ であるから問5. 18より $\delta(b^G) = \delta(B) =_G Q$ をえる．□

次に p-部分群と部分対の関係を調べるためまず次の補題を示す．

補題 9.2 (P, b_P) は部分対とする．

（i） $Q \lhd P$ ならば $b_Q \in \mathrm{Bl}(QC_G(Q))$ で $(Q, b_Q) \lhd (P, b_P)$ となるものが唯一つ存在する．

（ii） $R \leq Q \leq P$ で，$(R, b_R), (Q, b_Q) \lhd (P, b_P)$ なら $(R, b_R) \lhd (Q, b_Q)$ となる．

[**証明**] （i） $QC_G(Q) \lhd PC_G(Q)$ であるから $(b_P)^{PC_G(Q)}$ が被覆する $b_Q \in \mathrm{Bl}(QC_G(Q))$ があり，また定理 5.15 より $(b_Q)^{PC_G(Q)}$ は b_Q を被覆する $PC_G(Q)$ の唯

一つのブロックであるから $(b_Q)^{PC_G(Q)} = (b_P)^{PC_G(Q)}$ をえる．よって b_Q が P-不変であることを示せば $(Q, b_Q) \lhd (P, b_P)$ となる．

簡単のため $L = PC_G(Q)$ とおき，L における b_Q の惰性群を T とする．このとき，定理 5.10 (v) より $\delta((b_Q)^L) \leq_L T$ となるが，一方 $P \leq \delta(b_P) \leq_L \delta((b_P)^L) = \delta((b_Q)^L)$ であるから $P \leq_L T$ をえる．ここで明らかに $C_G(Q) \leq T$ であるから $P \leq T$ となり，b_Q は P-不変である．

このことからまた $T = L$ となり，b_Q は $(b_P)^L$ で被覆される $QC_G(Q)$ の唯一つのブロックで，したがって (Q, b_Q) の一意性がいえる．

(ii) 仮定より $R \lhd Q$，b_R は Q-不変であるから $(b_R)^{QC_G(R)} = (b_Q)^{QC_G(R)}$ を示せばよい．

簡単のため $H = QC_G(R)$，$X = PC_G(R)$ とおけば $H \lhd X$，$R \lhd X$ で $C_X(R) \leq H$ となるから定理 5.15 が適用できる．仮定により $(b_R)^X = (b_P)^X$，また $(b_Q)^{PC_G(Q)} = (b_P)^{PC_G(Q)}$ であるから $(b_Q)^X = (b_P)^X = (b_R)^X$．よって $((b_Q)^H)^X = ((b_R)^H)^X$ となるが，b_R は P-不変であるから X-不変で，したがって $(b_R)^H$ も X-不変であるから $(b_R)^X$ は H の唯一つのブロックを被覆し $(b_Q)^H = (b_R)^H$ をえる．□

上の補題から容易に次の定理がえられる．

定理 9.3 (P, b_P) は部分対とし，$Q \leq P$ とするとき，$b_Q \in \mathrm{Bl}(QC_G(Q))$ で $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ となるものが唯一つ存在する．またここで $Q \lhd P$ ならば $(Q, b_Q) \lhd (P, b_P)$ となる．

［証明］ $|P:Q|$ に関する帰納法による．$(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ となる b_Q の存在は上の補題 (i) より容易に示される．一意性を示すため $(Q, b') \leq (P, b_P)$ とする．このとき $\leq$ の定義より R，$R' \lneqq P$ が存在して $(Q, b_Q) \leq (R, b_R) \lhd (P, b_P)$，$(Q, b') \leq (R', b_{R'}) \lhd (P, b_P)$ となる．そのとき $S = R \cap R' \lhd P$ であるから $(S, b_S) \lhd (P, b_P)$ となる b_S があるが，上の補題 (ii) より $(S, b_S) \lhd (R, b_R)$，$(S, b_S) \lhd (R', b_{R'})$ となる．ここで帰納法の仮定により $(Q, b'') \leq (S, b_S)$ となる b'' が一意的に定まるが，(Q, b_Q)，$(Q, b'') \leq (R, b_R)$ より $b_Q = b''$，同様に $b' = b''$ となるから $b_Q = b'$ をえる．

後半は上の補題 (i) と定理の一意性により明らかである．□

注意 $B_0 = B_0(G)$ を G の主ブロックとするとき，第 3 主定理により (Q, b_Q) が B_0-部分

対ならば $b_Q = B_0(QC_G(Q))$ となる．また上の定理から

$$(Q, B_0(QC_G(Q))) \leq (P, B_0(PC_G(P))) \iff Q \leq P,$$
$$(Q, B_0(QC_G(Q))) \lhd (P, B_0(PC_G(P))) \iff Q \lhd P$$

となるから，B_0-部分対を考えることと G の p-部分群を考えることとは本質的に同じことである．またこの意味で定理 9.1 は群論における Sylow の定理の拡張とみることができる．

9.2 部分節

$G \ni x$ は p-元とし $\mathrm{Bl}(C_G(x)) \ni b$ とすれば $(\langle x\rangle, b)$ は部分対である．これを (x, b) と略記し，$b^G = B$ に属する **部分節** (subsection) とよぶ．例えば $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し $(1, B)$ は（自明な）部分節である．第 2 主定理によれば，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ と $\mathrm{Bl}(C_G(x)) \ni b$，$\mathrm{IBr}(b) \ni \mu$ に対し $d^x_{\chi\mu} \neq 0$ ならば (x, b) は B に属する部分節である．

二つの部分節 (x, b)，(x', b') に対し，$G \ni t$ があって $x' = x^t$，$b' = b^t$ となるとき $(x', b') = (x, b)^t$ とかき，これらは G-共役であるといって $(x', b') =_G (x, b)$ と表す．$x = x'$ のときは (x, b) と (x, b') が G-共役ならば $C_G(x)$-共役で $b' = b$ となるから，定理 4.13 (ii) より次がえられる．

定理 9.4 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とし，B に属する部分節の G-共役類の完全代表系を $\{(x_i, b_i)\}_{1\leq i\leq n}$ とすれば次が成り立つ：

$$k(B) = \sum_{i=1}^{n} l(b_i).$$

部分節 (x, b) に対し特に $\delta(b) =_G \delta(b^G)$ が成り立つとき，(x, b) は **主要部分節** であるという．定理 5.21 より次が成り立つ．

定理 9.5 $\delta(B)$ が Abel 群ならば，B に属する任意の部分節は主要部分節である．

以下では主要部分節の G-共役類の完全代表系を決定する．

定理 9.6 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) = D$ とする．このとき p-元 $x \in G$ に対し B に属する主要部分節 (x, b) が存在するため必要十分な条件は $x \in_G Z(D)$ となることである．

［証明］（必要性）　$C_G(x) \triangleright \langle x \rangle$ は p-部分群であるから $\langle x \rangle \leq \delta(b)$ となり，したがって　$x \in Z(\delta(b)) =_G Z(\delta(b^G)) = Z(D)$　をえる．

（十分性）　$Z(D) \ni x$ としてよい．また C を B の不足類とするとき $C \ni y$ を適当にとって $D \in \mathrm{Syl}_p(C_G(y))$ としてよい．このとき $x \in C_G(y)$ である．$\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$，$\mathrm{ht}(\chi) = 0$ とすれば $\omega_\chi(\hat{C})^* \neq 0$ より $\chi(y)^* \neq 0$ となる．よって

$$\chi(y) \equiv \chi(xy) = \sum_{\mu} d^x_{\chi\mu}\, \mu(y) \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}(\pi))$$

であるから $d^x_{\chi\mu}\, \mu(y) \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}(\pi))$ となる $\mu \in \mathrm{IBr}(C_G(x))$ がある．ここで $\mu \in b \in \mathrm{Bl}(C_G(x))$ とすれば第2主定理により $b^G = B$ となる．また $H = C_G(x)$ とおくと，$D \leq C_H(y)$ であるから $\mu(y)^* \neq 0$ とIII, 6.26より $d(b) \geq \nu(|C_H(y)|) = d(b^G)$ となり，一方 $\delta(b) \leq_G \delta(b^G)$ であるから $\delta(b) =_G \delta(b^G)$ となり (x, b) は B に属する主要部分節である．□

上の十分性の証明から，一般分解定数について次のことがわかる．

系 9.7　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) = D$，$Z(D) \ni x$　とするとき，高さ0の任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対し主要部分節 (x, b) と $\mu \in \mathrm{IBr}(b)$ が存在して $d^x_{\chi\mu} \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}(\pi))$ となる．

以下 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) = D$ とする．また $\mathrm{Bl}(DC_G(D)) \ni b$ を B の根とし，$Z(D) \ni x$ とすれば $C_G(x) \geq DC_G(D)$ で，$(x, b^{C_G(x)})$ は B に属する主要部分節である．

補題 9.8　B に属する任意の主要部分節 (u, b_u) は上でのべたような部分節 $(x, b^{C_G(x)})$ に G-共役である．

［証明］　$u \in Z(D)$，$\delta(b_u) = D$ としてよい．このとき $H = C_G(u) \geq DC_G(D) = DC_H(D)$ において b_u の根を $b' \in \mathrm{Bl}(DC_G(D))$ とすれば，$b'^G = (b'^H)^G = (b_u)^G = B$　であるから b' は B の根で，したがって $b'^t = b$ となる $t \in N_G(D)$ が存在する．このとき $x = u^t$ $(\in Z(D))$，$(b_u)^t = b_x \in \mathrm{Bl}(C_G(x))$ とおけば，$(b')^{C_G(u)} = b_u$ より $b^{C_G(x)} = b_x$ となり (u, b_u) は $(x, b_x) = (x, b^{C_G(x)})$ に G-共役である．□

上の形の主要部分節の共役については次が成り立つ．

補題 9.9　$\mathrm{Bl}(DC_G(D)) \ni b$ は B の根とし $T = T(b)$ とおく．このとき B に属する主要部分節 $(x, b^{C_G(x)})$ と $(y, b^{C_G(y)})$ について次の3条件は同値で

ある．ただし $x, y \in Z(D)$ とする．

（1） $(x, b^{C_G(x)}) =_G (y, b^{C_G(y)})$.

（2） $(x, b^{C_G(x)}) =_T (y, b^{C_G(y)})$.

（3） $x =_T y$.

［証明］ (1)⇒(2). $b^{C_G(x)} = b_x$, $b^{C_G(y)} = b_y$ とおき，$G \ni s$ に対し $x^s = y$, $(b_x)^s = b_y$ とする．このとき $H = C_G(y)$ とおけば $(b_x)^s = (b^s)^H = b_y = b^H$ となる．ここで $\delta(b^s) = D^s \leq_H \delta(b_y) =_H D$ となるから $\delta(b^s) =_H \delta(b_y)$ となり b^s，b はともに b_y の根である．よって $b^{sh} = b$ となる $h \in H$ が存在し，$t = sh$ $(\in T)$ とおけば $x^t = y$，$(b_x)^t = (b^t)^H = b^H = b_y$ となる．

(2)⇒(3)，(3)⇒(1) はともに明らかである．□

上の二つの補題から直ちに次の定理がえられる．

定理 9.10 $\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) = D$ とし，$\mathrm{Bl}(DC_G(D)) \ni b$ は B の根とする．また $Z(D)$ における $T(b)$-共役類の完全代表系を Λ とする．このとき

$$\{(x, b^{C_G(x)})\,;\, x \in \Lambda\}$$

は B に属する主要部分節の G-共役類の完全代表系である．

注意 一般の部分節の共役類の完全代表系は Brauer[18]で決定されている．部分節の考察はブロックの構造を調べるのに有用であるが，例えば 2 面体群を不足群にもつ 2-ブロックの構造がBrauer[19]で，また4元数群や準2面体群を不足群にもつ2-ブロックの構造がOlsson[1]で決定されている．

§10. $R[G\times G]$-加群としてのRG

10.1 ブロックのR-階数

後で必要な次の定理を Broué の方法で示しておく．

定理 10.1 (Brauer) $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し次が成り立つ：

$$\nu(\mathrm{rank}_R\, B) = 2\,\nu(|G|) - d(B).$$

注意 $\mathrm{rank}_R\, B = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} \chi(1)^2$ である．

上の定理の証明のためまず次の補題を示す．

補題 10.2 $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$ に対し

$$e_\chi{}^0 = \sum_{y \in G_{p'}} \chi(y^{-1})y$$

とおけば $e_B e_\chi{}^0 = e_\chi{}^0 \ (\in B)$ となる．

［証明］ $e_\chi{}^1 = \sum_{z \in G - G_{p'}} \chi(z^{-1})z$ とおけば $e_\chi = \chi(1)/|G|(e_\chi{}^0 + e_\chi{}^1)$ で，$e_B e_\chi = e_\chi$ より

$$e_B e_\chi{}^0 + e_B e_\chi{}^1 = e_\chi{}^0 + e_\chi{}^1 \tag{10.1}$$

となる．定理 4.9 において $x_1 = 1$ とすれば $\mathfrak{S}(x_1) = G_{p'}$，したがって $e_\chi{}^0$，$e_B e_\chi{}^0 \in R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_1)]$，$e_\chi{}^1, e_B e_\chi{}^1 \in \sum_{i=2}^r R[\tilde{\mathfrak{S}}(x_i)]$ となるから (10.1) より $e_B e_\chi{}^0 = e_\chi{}^0$ がえられる．□

ここで上の補題から次がえられることを注意しておこう．

系 10.3 $\mathrm{Irr}(B) \ni \chi$，$\mathrm{Cl}(G) \ni C$，$C \ni x$ とするとき

$$\chi(x) \not\equiv 0 \pmod{(\pi)} \implies \delta(C) \leq_G \delta(B).$$

［証明］ x の p'-部分 $x_{p'}$ に対し $\chi(x_{p'}) \equiv \chi(x) \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$，$C_G(x) \leq C_G(x_{p'})$ であるから x は最初から p' 元であると仮定してよい．$D = \delta(B)$ とおく．上の補題より $(e_\chi{}^0)^* \in e_B{}^* Z(FG) \subset Z_D(FG)$ となる．一方 $C^{-1} = \{x^{-1} ; x \in C\}$ とすれば，仮定により $(e_\chi{}^0)^*$ における $\widehat{C^{-1}}$ の係数は 0 でないから $\delta(C^{-1}) =_G \delta(C) \leq_G D$ をえる．□

次に

$$X_R(G) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} R\chi, \qquad X_R(B) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} R\chi$$

とおく．

補題 10.4 $X_R(B) \ni \theta$，$Z(RG) \ni z$ に対し次が成り立つ：

$$\nu(\theta(z)) \geq \nu(|G|) - d(B).$$

また $J(Z(RG)) \ni z$ ならば

$$\nu(\theta(z)) > \nu(|G|) - d(B). \tag{10.2}$$

［証明］ $\mathrm{Irr}(B) \ni \theta$ のとき示せばよい．このとき $\omega_\theta(z) = \theta(z)/\theta(1) \in R$ であるから $\nu(\theta(z)) \geq \nu(\theta(1)) \geq \nu(|G|) - d(B)$ となる．また $J(Z(RG)) \ni z$ ならば $\omega_\theta(z) \equiv 0 \pmod{(\pi)}$ より (10.2) がえられる．□

$X_R(B)\ni\theta$ に対し

$$\nu(\theta(1))=\nu(|G|)-d(B)+\mathrm{ht}(\theta)$$

とおくと $\mathrm{ht}(\theta)\geq 0$となるが，これを θ の **高さ** とよぶ．

補題 10.5　$X_R(B)\ni\theta$ に対し $\mathrm{ht}(\theta)=0$ であるため必要十分な条件は，ある $z\in e_BZ(RG)$ に対し

$$\nu(\theta(z))=\nu(|G|)-d(B) \tag{10.3}$$

が成り立つことである．

［**証明**］　$\theta(e_B)=\theta(1)$ であるから，$\mathrm{ht}(\theta)=0$ ならば $z=e_B$ に対し (10.3) が成り立つ．

逆を示すため $\nu(|G|)=a$，$d(B)=d$ とおけば，F-線形写像

$$(p^{-(a-d)}\theta)^*:\quad e_BZ(RG)/J(e_BZ(RG))\longrightarrow F\qquad(\bar{z}\mapsto(p^{-(a-d)}\theta(z))^*)$$

がえられ，(10.3) が成り立つとすればこれは全射である．上の左辺は $F\bar{e}_B$ であるから，このとき $p^{-(a-d)}\theta(e_B)=p^{-(a-d)}\theta(1)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}(\pi))$ となり $\mathrm{ht}(\theta)=0$ をえる．□

さて G の p-元の全体を G_p とし，その上の特性関数を（RG に線形に拡張したものを）θ とすれば III, 6.15 (iii) より $\theta\in X_R(G)$ である．よって $\theta_B(x)=\theta(e_Bx)$ とおけば $\theta_B\in X_R(B)$ となるが，これについて次が成り立つ．

補題 10.6　任意の $B\in\mathrm{Bl}(G)$ に対し $\mathrm{ht}(\theta_B)=0$ である．

［**証明**］　$\mathrm{Irr}(B)\ni\chi$，$\mathrm{ht}(\chi)=0$ とし，$e_\chi{}^0$ は補題 10.2 と同じとする．このとき $e_\chi{}^0\in e_BZ(RG)$ で

$$\theta_B(e_\chi{}^0)=\theta(e_Be_\chi{}^0)=\theta(e_\chi{}^0)=\chi(1)$$

となり，$\nu(\theta_B(e_\chi{}^0))=\nu(|G|)-d(B)$ となるから補題 10.5 より主張がえられる．□

［**定理10.1の証明**］　上の補題から $\nu(\theta_B(1))=\nu(|G|)-d(B)$ である．一方 $\theta_B(1)=\theta(e_B)=1/|G|\ (\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)}\chi(1)^2)$ であるから次が成り立つ：

$$\nu(\mathrm{rank}_R\,B)=\nu(|G|)+\nu(\theta_B(1))=2\,\nu(|G|)-d(B).\ □$$

10.2　$(RG)_{R[G\times G]}$

$RG\ni a$ に対して $G\times G\ni(x,y)$ の作用を

$$a(x,y)=x^{-1}ay \tag{10.4}$$

と定義すれば RG は $R[G \times G]$-加群となる．このとき RG のブロックイデアル B は $(RG)_{R[G\times G]}$ の直既約因子である．この節ではブロックをこのようにとらえて，そのヴァーテックスと不足群，また部分群のブロックとの関係を考察しよう．B を $R[G \times G]$-加群と考えていることを明記したいときは $B_{G\times G}$ と表すことにする．

$RG \ni a = \sum_{x\in G} \alpha_x x$ に対し $a^{(-1)} = \sum_x \alpha_x x^{-1}$ とおく．このとき $RG \xrightarrow{(-1)} RG\ (a \mapsto a^{(-1)})$ は逆同型である．また $RG \ni a$ に対する $R[G \times G] = RG \otimes_R RG \ni x \otimes y\ (x, y \in RG)$ の作用は $a(x \otimes y) = x^{(-1)}ay$ となる．

$G \ni x$ に対し $G \times G \ni (x, x)$ を x^{Δ} と表し，$G \geq H$ に対しては $H^{\Delta} = \{x^{\Delta}; x \in H\}$ とする．

$G \times G$ は (10.4) の作用で G に可移に作用し，明らかに $G \ni 1$ の安定部分群は G^{Δ} である．よって $R_{G^{\Delta}}$ を自明な G^{Δ}-加群とすれば，$R[G \times G]$-加群として

$$RG \simeq R_{G^{\Delta}} \otimes_{RG^{\Delta}} R[G \times G] = (R_{G^{\Delta}})^{G\times G}$$

となる．$B_{G\times G}$ はこの直和因子であるから次がえられる．

補題 10.7　$B_{G\times G}$ は G^{Δ}-射影的である．

$B_{G\times G}$ のヴァーテックスについては次が成り立つ．

定理 10.8　(Green)　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$，$\delta(B) = D$ とするとき

$$\mathrm{vx}(B_{G\times G}) =_{G\times G} D^{\Delta}$$

となる．

[証明]　$B(e_B{}^{(-1)} \otimes e_B) = e_B B e_B = B$ である．ここで $e_B \in (RG)_D^G$ より $e_B{}^{(-1)} \otimes e_B \in (R[G\times G])_{D\times D}^{G\times G}$ となるから B は $D\times D$-射影的である．

一方 B は G^{Δ}-射影的であるから $\mathrm{vx}(B) = Q^{\Delta}$ としてよい．このとき $Q^{\Delta} \leq_{G\times G} D \times D$ となり $Q \leq_G D$ をえる．したがって B は D^{Δ}-射影的で，IV，7.5 より

$$\begin{aligned}\nu(\mathrm{rank}_R B) &\geq \nu(|G\times G|) - \nu(|\mathrm{vx}(B)|)\\ &\geq 2\,\nu(|G|) - \nu(|D|)\end{aligned}$$

となるが，定理 10.1 より上の不等式はすべて等式となり $\mathrm{vx}(B) =_{G\times G} D^{\Delta}$ をえる．□

$G \geq P$ のとき $P \times P$ は (10.4) によって G に作用する．このとき $G \ni t$ の安定部分群を $(P \times P)_t$ と表すことにする：

$$(P \times P)_t = \{(x, y) \in P \times P\,;\, x^{-1}ty = t\}.$$

補題 10.9　上の記号のもとで次が成り立つ．

(i)　$$(P \times P)_t = \{(x, t^{-1}xt)\,;\, x \in P \cap tPt^{-1}\}.$$

(ii)　$P \times P \ni (u, v)$ に対し

$$(u, v)^{-1}((P \times P)_t)(u, v) = ((P \times P)_t)^{(u,v)} = (P \times P)_{u^{-1}tv}.$$

(iii)　$R[P\times P]$-加群として

(10.5)　$$RG \simeq \bigoplus_{t \in P\backslash G/P} R[PtP]$$

となり，また

(10.6)　$$R[PtP] \simeq R \otimes_{R[(P\times P)_t]} R[P\times P].$$

［**証明**］(i)，(ii) と (10.5) は容易に確かめられる．また $P \times P$ は PtP に可移に作用するから (10.6) がえられる．□

G のあるブロックの不足群となるような G の p-部分群については次が成り立つ．

定理 10.10　(Green)　$\mathrm{Bl}(G) \ni B$ とし，$\delta(B) = D \leq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とする．このとき $C_G(D) \ni z$ が存在して

$$D = P \cap P^z$$

となる．

［**証明**］(10.6) より $P \times P$-加群 $R[PtP]$ は自明な $(P \times P)_t$-加群 R の誘導加群に同型で，これは $(P \times P)_t$ をヴァーテックスにもつ (絶対) 直既約な $R[P\times P]$-加群である (IV，7.3，7.6 参照)．よって (10.5) から $\{t_i\}_{1\leq i\leq r}$ があって

$$B_{P\times P} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} R[Pt_iP]$$

となり，ある $t = t_i$ に対し　$\mathrm{vx}(B_{G\times G}) = D^{\Delta} =_{P\times P} (P \times P)_t$　となる (IV，3.8 参照)．したがって上の補題 (ii) より $D^{\Delta} = (P \times P)_z$ となる $z \in G$ があるが，このとき $D = P \cap zPz^{-1}$，$z \in C_G(D)$ となる．□

次に $G \geq H$ とし，$\mathrm{Bl}(G) \ni B$, $\mathrm{Bl}(H) \ni b$ とする．このとき以下でのべる

ように，$b|B_{H\times H}$ となることと $b^G=B$ となることはほぼ同値である．

まず次が成り立つ．

定理 10.11　　$b^G=B \Longrightarrow b|B_{H\times H}$.

［**証明**］ §3で定義した s_H の定義域を RG に拡張して，$RG \ni a=\sum_{x\in G}\alpha_x x$ に対し $s_H(a)=\sum_{y\in H}\alpha_y y$ と定義すれば，$R[H\times H]$-準同型 $s_H: RG\to RH$ がえられる．

さて写像 $\lambda: b\to B$ ($u\mapsto e_B u$) と $\mu: B\to b$ ($v\mapsto e_b s_H(v)$) はともに $R[H\times H]$-準同型である．ここで $b\ni u$ に対し

$$\mu\circ\lambda(u)=e_b s_H(e_B u)=e_b s_H(e_B)u$$

となり，仮定と補題 3.9 (i) より $\mu\circ\lambda: b\to b$ は同型である．よって　$B_{H\times H}\simeq\lambda(b)\oplus \mathrm{Ker}\,\mu$，$\lambda(b)\simeq b$　となる．□

上の逆については次が成り立つ（Alperin[2]，Green[6]，奥山[1]参照）．

定理 10.12　$B\in \mathrm{Bl}(G)$，$b\in \mathrm{Bl}(H)$ とする．b が G において認容的（すなわち $C_G(\delta(b))\le H$）と仮定すると次が成り立つ．

（i）　b は $(RG)_{H\times H}$ の直既約因子として重複度 1 で現れる．

（ii）　$b|B_{H\times H} \Longrightarrow b^G=B$.

［**証明**］（i）　$\delta(b)=Q$ とおく．補題 10.9 より

$$(RG)_{H\times H}=\bigoplus_{t\in H\backslash G/H} R[HtH]=RH\oplus\Big(\bigoplus_{t\notin H} R[HtH]\Big)$$

であり，$b_{H\times H}|RH$ であるから $b|(RG)_{H\times H}$ がえられる．b の重複度が 1 であることを示すには $t\notin H$ ならば $R[HtH]$ の任意の直既約因子 L に対し，$\mathrm{vx}(b_{H\times H})=Q^{\Delta}\not\le_{H\times H}\mathrm{vx}(L)$ であることを示せば十分である．(10.6) より L は $(H\times H)_t$-射影的であるから，もし $Q^{\Delta}\le_{H\times H}\mathrm{vx}(L)$ ならば $Q^{\Delta}\le((H\times H)_t)^{(u,v)}=(H\times H)_{u^{-1}tv}$ となる $(u,v)\in H\times H$ がある．これより $u^{-1}tv\in C_G(Q)\le H$，したがって $t\in H$ となり矛盾である．

（ii）　仮定から b^G が定義される（定理 3.6）．このとき定理 10.11 より $b|(b^G)_{H\times H}$ であるから (i) より $b^G=B$ でなければならない．□

注意　加群論的には B が $b|B_{H\times H}$ をみたす G の唯一つのブロックであるとき $b^G=B$ とかいて，b に B を対応させる対応を Brauer 対応という（Alperin[5]参照）．

後の都合上，上の定理の証明からえられる次の系をのべておく．

系 10.13 $G \geq Q$ は p-部分群とし，$N = N_G(Q)$ とおく．このとき $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ に対し

$$B_{N\times N} \simeq \Big(\bigoplus_{\substack{b\in \mathrm{Bl}(N),\\ b^G=B}} b\Big) \oplus M \tag{10.7}$$

となり，M の任意の直既約因子 L のヴァーテックスについて

$$Q^{\Delta} \not\leq_{N\times N} \mathrm{vx}(L) \tag{10.8}$$

となる．

［**証明**］ $\mathrm{Bl}(N) \ni b$ ならば $Q \leq \delta(b)$ であるから，$C_G(\delta(b)) \leq N$ となり，$b | B_{N\times N}$ と $b^G = B$ は同値である．$B_{N\times N}$ の直既約因子 L が RN のブロックと同型でなければ $L | R[NtN]$ となる $t \notin N$ がある．このとき (10.8) の成り立つことは定理 10.12 (i) の証明の中で示した通りである．□

§11. 下位不足群

11.1 共役類のブロック分割

G の共役類をブロックに分配することについての Brauer [15] の結果を飯塚 [2]，Broué [3]，Olsson [2] の方法でのべる．そのため少し一般的な考察からはじめる．

補題 11.1 $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{o}v_i$ は $\mathfrak{o}$-自由加群とし，$\Omega = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ はその基とする．また

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r \tag{11.1}$$

を直和分解とし，π_i は W_i への射影とする．このとき Ω の分割 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} \Omega_i$ ($i \neq j$ ならば $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$) が存在して $\pi_i(\Omega_i)\,(1 \leq i \leq r)$ は W_i の基になる．

［**証明**］ $\{w_1^{(j)}, \cdots, w_{n_j}^{(j)}\}$ を W_j の基として

$$v_i = \sum_{j,k} \alpha_{i,(j,k)}\, w_k^{(j)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

とする．このとき

$$\pi_j(v_i) = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{i,(j,k)} w_k^{(j)} \tag{11.2}$$

である．i を行の添字とし，(j,k) を辞書式に並べたものを列の添字にとってできる行列 $(\alpha_{i,(j,k)})$ を A とおけば $\det A \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$ である．したがって Laplace の展開定理から A の行を適当に並べかえて，最初から順に n_1 個，…，n_r 個の行，列をとってできる r 個の（対角線上の）小行列式はすべて $\mathfrak{o}$ の正則元であるとしてよい．この行の区分に従って分割 $\Omega = \bigcup_{j=1}^r \Omega_j$ $(|\Omega_j| = n_j)$ がえられるが，このとき (11.2) より $\pi_j(\Omega_j)$ は W_j の基である．□

上の補題のような分割 $\Omega = \bigcup_{i=1}^r \Omega_i$ を直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^r W_i$ に関する Ω の分割という．

補題 11.2　V, Ω は上の補題と同じとし，$\Omega = \bigcup_{i=1}^r \Omega_i$ は $V = \bigoplus_{i=1}^r W_i$ に関する分割とする．また V の $\mathfrak{o}$-部分加群 U とその基 Λ は次をみたすと仮定する：

(a)　$\pi_i(U) \subset U$　　$(1 \le i \le r)$，　　(b)　$\Lambda \subset \Omega$．

このとき $\Lambda = \bigcup_{i=1}^r (\Lambda \cap \Omega_i)$ は直和分解 $U = \bigoplus_{i=1}^r \pi_i(U)$ に関する Λ の分割である．したがって次が成り立つ：

$$\mathrm{rank}_{\mathfrak{o}}\, \pi_i(U) = |\Lambda \cap \Omega_i| \qquad (1 \le i \le r).$$

［**証明**］ (a) より $U = \bigoplus_{i=1}^r \pi_i(U)$ となる．また $\Lambda_i = \Lambda \cap \Omega_i$ とおけば (b) より $\bigcup_{i=1}^r \pi_i(\Lambda_i)$ は $\mathfrak{o}$-自由で，したがって $|\bigcup_{i=1}^r \pi_i(\Lambda_i)| = |\Lambda| = \mathrm{rank}_{\mathfrak{o}}\, U$ となる．また $V/\langle \bigcup_i \pi_i(\Lambda_i) \rangle$ は $\mathfrak{o}$-自由加群であるから $\bigcup_{i=1}^r \pi_i(\Lambda_i)$ は U の基となり，よって $\pi_i(\Lambda_i)$ は $\pi_i(U)$ の基である．□

さて補題 11.1 を $Z(RG)$ の直和分解 $Z(RG) = \bigoplus_{B \in \mathrm{Bl}(G)} e_B Z(RG)$ と基 $\Omega = \{\hat{C}\,;\, C \in \mathrm{Cl}(G)\}$ に適用して考えてみよう．このとき e_B をかける作用が $e_B Z(RG)$ への射影である．また次のことを注意しておこう．

補題 11.3　　$\mathrm{rank}_R\, e_B Z(RG) = k(B)$．

［**証明**］ $e_B Z(RG) = Z(B)$，また $Z(B)^K$ $(= K \otimes_R Z(B)) = Z(B^K)$ であるから $\mathrm{rank}_R\, Z(B) = \dim_K Z(B^K)$ となる．ここで $Z(B^K) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} K e_\chi$ であるからその次元は $k(B)$ である．□

以上の注意のもとでまず次のことが示される．

定理 11.4 Cl(G) の分割

(11.3) $\quad \mathrm{Cl}(G) = \bigcup_{B\in \mathrm{Bl}(G)} \Omega_B \qquad (B \neq B' \Rightarrow \Omega_B \cap \Omega_{B'} = \phi)$

が存在して次が成り立つ．

(i) $\{e_B\widehat{C}\,;\, C \in \Omega_B\}$ は $e_BZ(RG)$ の R-基である．よって $|\Omega_B| = k(B)$ である．

(ii) $\det(\omega_\chi(\widehat{C}))_{\substack{\chi\in B\\ C\in\Omega_B}}$ は $k(B)\times k$ 行列 $(\omega_\chi(\widehat{C}))_{\substack{\chi\in B\\ C\in \mathrm{Cl}(G)}}$ の $k(B)$ 次の小行列式のうち付値 ν の値が最小のものである．

［**証明**］ (i) をみたす分割 (11.3) が存在することは補題 11.1 より明らかである．また $\chi\in B$ ならば $\omega_\chi(\widehat{C}) = \omega_\chi(e_B\widehat{C})$ であるから，(ii) は (i) を用いて容易に示される．□

注意 上の (i) は $Z(FG)$ で考えても同様である．

上の定理のような分割 (11.3) を Cl(G) の **ブロック分割** とよぶ．

定理 11.5 (11.3) は Cl(G) のブロック分割とし，$G \geq Q$ は p-部分群とする．このとき次が成り立つ．

(i) $m_B(Q) = \#\{C\in\Omega_B\,;\,\delta(C) =_G Q\}$ とおけば，これはブロック分割によらず定まる．実際

(11.4) $\qquad m_B(Q) = \dim_F(e_B{}^*\, Z_Q(FG)/e_B{}^*\, Z_Q^1(FG))$

となる．($Z_Q(FG), Z_Q^1(FG)$ の定義については (1.3) と補題 2.12 の前をみよ．)

(ii) $\delta(B) = D$ とするとき

(a) $m_B(D) > 0$,

(b) $m_B(Q) > 0 \Longrightarrow Q \leq_G D$.

(iii) B に随伴する $N_G(Q)$ のブロックを $b_1, \cdots, b_s$ とし，$m_{b_i}(Q)$ を (i) と同様に定義すれば

$$\sum_{i=1}^{s} m_{b_i}(Q) = m_B(Q).$$

(iv) $\{Q_1, \cdots, Q_r\}$ を G の p-部分群全体の G-共役類の完全代表系とすれ

ば

$$\sum_{i=1}^{r} m_B(Q_i) = k(B).$$

[**証明**] (i) $Z_Q(FG)$ と $Z_Q^1(FG)$ はともに $Z(FG)$ のイデアルであるから $e_B{}^*$ をかける作用に関して閉じている．したがって補題 11.2 より $\{e_B{}^*\hat{C}\,;\,C \in \Omega_B, \delta(C) \leq_G Q\}$ と $\{e_B{}^*\hat{C}\,;\,C \in \Omega_B, \delta(C) \lneqq_G Q\}$ はそれぞれ $e_B{}^*\,Z_Q(FG), e_B{}^*\,Z_Q^1(FG)$ の基となり (11.4) が成り立つ．

(ii) $e_B{}^* \in Z_D(FG) - Z_D^1(FG)$ より (a) は明らかである．また $m_B(Q) > 0$ ならば $\mathrm{Cl}(G) \ni C$ で $e_B{}^*\hat{C} \in Z_Q(FG) - Z_Q^1(FG)$ となるものがある．よって $e_B{}^*\hat{C} = \sum_i \alpha_i{}^*\hat{C}_i$ とすれば $\alpha_i{}^* \neq 0, \delta(C_i) =_G Q$ となる i がある．一方 $e_B{}^*\hat{C} \in Z_D(FG)$ であるから，このとき $Q =_G \delta(C_i) \leq_G D$ をえる．

(iii) $N = N_G(Q)$ とおけば，定理 2.15 の証明より Br_Q は同型 $Z_Q(FG)/Z_Q^1(FG) \simeq Z_Q(FN)/Z_Q^1(FN)$ を引き起し，$\mathrm{Br}_Q(e_B{}^*) = \sum_{i=1}^{s} e_{b_i}{}^*$ となるから (iii) の等式が成り立つ．

(iv) $m_B(Q_i)$ の定義と $|\Omega_B| = k(B)$ より明らかである．□

上の定理で $m_B(Q) > 0$ であるとき，Q はブロック B の **下位不足群** (lower defect group) であるという．

次に p-正則な共役類の全体を前と同様に $\mathrm{Cl}(G_{p'})$ と表し

$$U = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})} R\hat{C}$$

とおけば次が成り立つ．

定理 11.6 (11.3) を $\mathrm{Cl}(G)$ のブロック分割とし，$\Lambda_B = \mathrm{Cl}(G_{p'}) \cap \Omega_B$ とおけば，$\mathrm{Cl}(G_{p'})$ の分割

$$\mathrm{Cl}(G_{p'}) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \Lambda_B$$

について次が成り立つ．

(i) $\{e_B\hat{C}\,;\,C \in \Lambda_B\}$ は e_BU の R-基である．また $|\Lambda_B| = l(B)$ となる．

(ii) $\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_{l(B)}\}$, $\Lambda_B = \{C_1, \cdots, C_{l(B)}\}$とし，$C_j \ni x_j$ とすれば $\det(\varphi_i(x_j)) \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$ である．

(iii) 任意の $C \in \Lambda_B$ に対し $\delta(C) \leq_G \delta(B)$ となる．また $\delta(C) =_G \delta(B)$

となる $C \in \Lambda_B$ が唯一つ存在する.

(iv) $\{|\delta(C)|\,;\, C \in \Lambda_B\}$ は B に対応する Cartan 行列 C_B の単因子の全体と一致する.

［証明］ $G_{p'}$ は 1 を含む p-セクションであるから定理 4.9 より $e_B U \subset U$ である. よって補題 11.2 より $\{e_B\hat{C}\,;\, C \in \Lambda_B\}$ は $e_B U$ の R-基である. ここで $|\Lambda_B| = l'(B)$ とおく.

$\mathrm{Bl}(G) = \{B_1, \cdots, B_t\}$ とし, $\Lambda_{B_\mu} = \{C_{(\mu,i)}\,;\, 1 \le i \le l'(B_\mu)\}$, $\mathrm{IBr}(B_\mu) = \{\varphi_{(\mu,i)}\,;\, 1 \le i \le l(B_\mu)\}$ と添字をつけ, $\varphi_{(\mu,i)}$ に対応する主直既約指標を $\eta_{(\mu,i)}$ と表すことにする. また共役類 $C_{(\mu,i)}$ の代表元を $x_{(\mu,i)}$ とし, 簡単のため $n_{(\mu,i)} = |C_G(x_{(\mu,i)})|$ とおく. このとき III, 6.10(ii) より $n_{(\nu,j)}{}^{-1}\eta_{(\mu,i)}(x_{(\nu,j)}) \in R$ である. さて

$$e_{B_\mu}\hat{C}_{(\mu,i)} = \sum_{(\nu,j)} a_{(\mu,i)(\nu,j)}\hat{C}_{(\nu,j)} \tag{11.5}$$

とおけば, $e_\chi\hat{C}_{(\mu,i)} = \omega_\chi(\hat{C}_{(\mu,i)})e_\chi$ であるから上の左辺は

$$\begin{aligned} e_{B_\mu}\hat{C}_{(\mu,i)} &= \sum_{(\nu,j)}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B_\mu)} n_{(\mu,i)}{}^{-1}\chi(x_{(\mu,i)})\overline{\chi(x_{(\nu,j)})}\,\hat{C}_{(\nu,j)} \\ &= \sum_{(\nu,j)}\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B_\mu)} n_{(\mu,i)}{}^{-1}\eta_\varphi(x_{(\mu,i)})\overline{\varphi(x_{(\nu,j)})}\,\hat{C}_{(\nu,j)} \end{aligned}$$

となり, (11.5) と比較して

$$a_{(\mu,i)(\nu,j)} = \sum_{(\mu,k)} n_{(\mu,i)}{}^{-1}\eta_{(\mu,k)}(x_{(\mu,i)})\overline{\varphi_{(\mu,k)}(x_{(\nu,j)})} \tag{11.6}$$

をえる. ここで $\{(\mu,i)\}, \{(\nu,j)\}$ は辞書式に並べることとして, l 次の正方行列 $A = (a_{(\mu,i)(\nu,j)})$ を考えると $\det A \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$ である. 簡単のため $l_\mu = l(B_\mu), l_\mu' = l'(B_\mu)$ とおく.

$Y_\mu = (n_{(\mu,i)}{}^{-1}\eta_{(\mu,k)}(x_{(\mu,i)}))_{i,k}$ を $l_\mu' \times l_\mu$ 行列とし

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Y_t \end{pmatrix}$$

とおけば Y は l 次の正方行列である. また $\Phi = (\varphi_{(\mu,k)}(x_{(\nu,j)}))_{(\mu,k),(\nu,j)}$ とおけば (11.6) より

$$A = Y\bar{\Phi}$$

となり, $\det Y \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$ をえる. これより $l_\mu' = l_\mu$ $(1 \le \mu \le t)$, $\det Y_\mu \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}(\pi))$ となる.

一方 $\Phi_\mu = (\varphi_{(\mu,i)}(x_{(\mu,j)}))_{i,j}$ とおけば，B_μ に対応する Cartan 行列 C_{B_μ} を用いて

$$Y_\mu = \mathrm{diag}(n_{(\mu,1)}{}^{-1}, \cdots, n_{(\mu,l_\mu)}{}^{-1})\, {}^t\Phi_\mu\, {}^tC_{B_\mu} \tag{11.7}$$

となるから

$$\det Y_\mu = (\prod_{i=1}^{l_\mu} n_{(\mu,i)}{}^{-1}) \cdot \det C_{B_\mu} \cdot \det \Phi_\mu,$$

$$\det Y = (\prod_{(\mu,i)} n_{(\mu,i)}{}^{-1}) \cdot \det C \cdot (\prod_\mu \det \Phi_\mu) \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}(\pi))$$

をえる．ここで III, 6.32 により $\nu((\prod_{(\mu,i)} n_{(\mu,i)}{}^{-1})\det C) = 0$ であるから $\det \Phi_\mu \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}(\pi))$ $(1 \leq \mu \leq t)$ となり (ii) が成り立つ．また (11.7) より (iv) がえられる．(iii) は定理 11.5 (ii) (b) と (iv) より明らかである．□

注意 p-元 x を含む p-セクション $\mathfrak{S}(x)$ についても $\mathfrak{S}(1) = \mathrm{Cl}(G_{p'})$ と同様の分割が考えられる．これについては冒頭の諸論文を参照されたい．

11.2 下位不足群と Scott 加群

FG は共役の作用で G-加群になる．FG をこのようにして G-加群とみるとき $(FG)_{G^\Delta}$ と表す．明らかに次の直和分解が成り立つ：

$$(11.8)\qquad \begin{aligned}(FG)_{G^\Delta} &= \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}(G)} F[C] \\ &= \bigoplus_{B \in \mathrm{Bl}(G)} B^*{}_{G^\Delta}.\end{aligned}$$

(ただし $F[C] = \bigoplus_{x \in C} Fx$ とする．)

G の p-部分群 Q をヴァーテックスにもつ Scott 加群を IV, §8 と同様に $S(Q)$ と表し，$B^*{}_{G^\Delta}$ における $S(Q)$ の(直既約因子としての)重複度を $M_B(Q)$ と表せば次が成り立つ．

定理 11.7 (Burry) $M_B(Q) = m_B(Q)$.

以下 $G \geq Q$ は p-部分群とし，$N = N_G(Q)$, $f = f(G, Q, N)$ は Green 対応として，上の定理を示すため少し準備をしておく．

補題 11.8 $\mathrm{Cl}(G) \ni C, \delta(C) =_G Q$ とするとき

(i) $F[C]_{G^\Delta} = S \oplus T \qquad (S \simeq S(Q), S(Q) \nmid T)$

と直和分解される．

(ii) $G = N_G(Q)$ ならば $\mathrm{soc}(S) = F\hat{C}$ となる．

[証明] $C \ni x, Q \in \mathrm{Syl}_p(C_G(x))$ としてよい．簡単のため $H = C_G(x)$ とおく．

(i) $F[C]_{G^\Delta}$ は可移な置換加群 $(F_H)^G$ に同型であるから IV, 8.4 より明らかである．

(ii) $G = N_G(Q)$ ならば S は自明な G/Q-加群の射影被覆で，したがって $\mathrm{soc}(S) \simeq F$ である．一方 $\mathrm{Inv}_G(F[C]) = F\hat{C}$ であるから $\mathrm{soc}(S) = F\hat{C}$ となる．□

補題 11.9 (i) $\sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} M_B(Q) = \#\{C \in \mathrm{Cl}(G)\,;\, \delta(C) =_G Q\}$.

(ii) $M_B(Q) = \sum_{\substack{b \in \mathrm{Bl}(N),\\ b^G = B}} M_b(Q)$.

[証明] (i) (11.8) より両辺とも $(FG)_{G^\Delta}$ における $S(Q)$ の重複度に一致する．

(ii) 系 10.13 より

$$B^*{}_{N^\Delta} \simeq (\bigoplus_{b^G = B} b^*{}_{N^\Delta}) \oplus M^*{}_{N^\Delta}$$

となり，$M^*{}_{N^\Delta}$ の直既約因子のヴァーテックスが Q を含まないことも容易にわかる．また IV, 4.7 より $S(Q)$ の $B^*{}_{G^\Delta}$ における重複度と $fS(Q)$ の $B^*{}_{N^\Delta}$ における重複度は一致し，$fS(Q)$ は N における Scott 加群 $S(N, Q)$ と一致するから (ii) が成り立つ．□

[**定理 11.7 の証明**] $\sum_{B,Q} m_B(Q) = \sum_{B,Q} M_B(Q) = |\mathrm{Cl}(G)|$ であるから，任意の B, Q に対し $m_B(Q) \leq M_B(Q)$ となることを示せばよい．また $m_B(Q) = \sum_{b^G = B} m_b(Q)$，$M_B(Q) = \sum_{b^G = B} M_b(Q)$ (ただし $b \in \mathrm{Bl}(N)$) であるから，$G = N$ のとき上の不等式を示せばよい．

以下 $G \triangleright Q$ と仮定し，簡単のため $m = m_B(Q)$ とおく．また $\mathrm{Cl}(G) = \bigcup_B \Omega_B$ はブロック分割とし，$\{C \in \Omega_B\,;\, \delta(C) =_G Q\} = \{C_1, \cdots, C_m\}$ とおき，$F[C_i] = S_i \oplus T_i$，$S_i \simeq S(Q)$ とする．このとき $S = \bigoplus_{i=1}^m S_i\ (\simeq mS(Q)) | B^*{}_{G^\Delta}$ を示せばよい．

$H = C_G(Q)$ とおけば，$s_H{}^* : FG \to FH\ (\sum_{x \in G} a_x x \mapsto \sum_{y \in H} a_y y)$ は $H \triangleleft G$ より G^Δ-準同型である．また $\pi_B : FG \to B^*\ (a \mapsto e_B{}^* a)$ も G^Δ-準同型で，$\{s_H{}^* \circ \pi_B(\hat{C}_i) = e_B{}^* \hat{C}_i\,;\, 1 \leq i \leq m\}$ は一次独立，かつ $\mathrm{soc}(S) = \bigoplus_i F\hat{C}_i$ であるから，次の写像

$$f = (s_H{}^* \circ \pi_B)|_S :\ S \longrightarrow (FH)_{G^\Delta}$$

は単準同型である．ここで $S, (FH)_{G^\Delta}$ はともに G/Q-加群と考えることができて，IV, 8.4 (c) より S は射影的，したがって入射的であるから G-準同型 $g: (FH)_{G^\Delta} \to S$ で $g \circ f = \mathrm{id}_S$ となるものがある．よって $S \xrightarrow{\pi_B} B^*{}_{G^\Delta} \xrightarrow{g \circ s_H^*} S$ の合成は id_S となり $S \mid B^*{}_{G^\Delta}$ をえる．□

§ 12. Glauberman 対応

群 A が群 G に作用しているとする．すなわち準同型 $\varphi: A \to \mathrm{Aut}\ G$ が与えられているとし，$A \ni \alpha, G \ni x$ に対し $x^{\varphi(\alpha)}$ を x^α と表す．このとき $A \ni \alpha$, $\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ に対し $\chi^\alpha(x) = \chi(x^{\alpha^{-1}})$ とおけば $\chi^\alpha \in \mathrm{Irr}(G)$ で，この作用で A は $\mathrm{Irr}(G)$ に作用している．A-不変な既約指標の全体を $\mathrm{Irr}_A(G)$ と表す．また A-不変な G の元の全体を $C_G(A)$ と表す：$C_G(A) = \{x \in G; x^\alpha = x\ (\forall \alpha \in A)\}$.

Glauberman [1] は $(|A|, |G|) = 1$ で A は可解群という仮定のもとで，自然な全単射

$$\pi = \pi(G, A): \quad \mathrm{Irr}_A(G) \longrightarrow \mathrm{Irr}(C_G(A))$$

が一意的に定まることを示した．

特に A が p-群のときは $\mathrm{Irr}_A(G) \ni \chi$ に対し $\zeta = \chi^\pi$ は $(\zeta^G, \chi)_G \not\equiv 0 \pmod p$ となる唯一つの $\zeta \in \mathrm{Irr}(C_G(A))$ となる．Alperin [1] はこの場合第 1 主定理から上の結果が導かれることを指摘した．

この節では Alperin の論法を $(|A|, |G|) = 1$ とは限らない一般の場合に拡張して，永尾 [3] の結果を Isaacs の注意に従ってのべる．

注意　$(|A|, |G|) = 1$ で A が非可解な場合については Isaacs [1]，Wolf [1] を，また Brauer 指標の対応については宇野 [1] を参照されたい．

$\tilde{G} \triangleright G$ とし $\tilde{G}/G$ は p-群と仮定する．G の (p-) 不足数 0 の既約指標の全体を $\mathrm{Irr}(G)^0$ と表し，そのうち $\tilde{G}$-不変なものの全体を $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0$ とする．また $\tilde{G} \geq P$ が $\tilde{G} = GP, G \cap P = 1$ をみたすとき，P を ($\tilde{G}$ における) G の **補群**

とよぶ．G の補群全体を $\tilde{G}$-共役類にわけ，その完全代表系を $\mathfrak{S} = \{P_1, \cdots, P_r\}$ とし，また $\mathfrak{T} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0$ とおく．このとき次が成り立つ．

定理 12.1 全単射

$$\pi:\ \mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \longrightarrow \mathfrak{T} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0$$

が存在して，$\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \ni \chi$，$\mathfrak{T} \ni \zeta$ に対して

$$\zeta = \chi^\pi \Longleftrightarrow (\zeta^G, \chi)_G \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

となる．ここで $i \neq j$ ならば $\mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0 \cap \mathrm{Irr}(C_G(P_j))^0 = \phi$ である．

注意 $\mathfrak{S}$ は空集合のときもあり，このとき $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0$ も空集合である．しかし G が p'-群のときは $\mathfrak{S}$ は唯一つの P から成り，上の対応は P が G に作用しているときの Glauberman 対応に他ならない．

定理の証明に入る前に §5 の結果からえられる次のことを注意しておく．系 5.6 により $\mathrm{Bl}(G) \ni B$ は唯一つの $\tilde{B} \in \mathrm{Bl}(\tilde{G})$ に被覆されるが，これについて次が成り立つ．

補題 12.2 B が $\tilde{G}$-不変で $d(B) = 0$

$$\Longleftrightarrow \delta(\tilde{B}) \text{ は } G \text{ の補群.}$$

［**証明**］ 定理 5.16 と $\tilde{G}/G$ が p-群であることより

$$T(B) = G\delta(\tilde{B}), \qquad \delta(\tilde{B}) \cap G =_G \delta(B)$$

となるから明らかである．□

［**定理 12.1の証明**］ $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \ni \chi$ に対し，上の補題で $B = \{\chi\}$ とすれば $P = \delta(\tilde{B})$ は G の補群であるから，P はある P_i に等しいとしてよい．ここで $C = C_G(P)$ とおけば明らかに $N_{\tilde{G}}(P) = N = C \times P$ となる．第 1 主定理により $\tilde{B}$ に対し $b \in \mathrm{Bl}(N)$ で $b^{\tilde{G}} = \tilde{B}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}(\tilde{G} \mid P) \ni \tilde{B} & \longleftarrow & \chi \in \mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \\ \big\downarrow & & \vdots\ \pi \\ \mathrm{Bl}(N \mid P) \ni b & \longrightarrow & \zeta \in \mathrm{Irr}(C)^0 \end{array}$$

$\delta(b) = P$ となるものが一意的に定まるが，上の補題を $N \rhd C$ に適用すると，b に対し $\mathrm{Irr}(C)^0 \ni \zeta$ で b によって被覆されるものが一意的にきまる．よって χ に ζ を対応させて写像

$$\pi:\quad \mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \longrightarrow \mathfrak{T} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0$$

がえられる．

ここで $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \ni \chi, \chi^\pi = \zeta$ とするとき

(i) $(\zeta^G, \chi)_G \not\equiv 0 \pmod p$,

(ii) $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \ni \chi' \neq \chi \Longrightarrow (\zeta^G, \chi')_G \equiv 0 \pmod p$

となることが示されれば π は単射である．

これを示すため $B = \{\chi\}$ に対し $\tilde{B}, P, C, N, b$ 等は上と同じとする．また $\eta = \zeta \times 1_P \in \mathrm{Irr}(C \times P)$ とすれば $\eta \in \mathrm{Irr}(b)$, $\eta^{\tilde{G}}(1) = \zeta(1)\,|\tilde{G}: C \times P| = \zeta(1)\,|G: C|$ である．ここで $\nu(\zeta(1)) = \nu(|C|)$ であるから

$$\nu(\eta^{\tilde{G}}(1)) = \nu(|G|) = \nu(\chi(1))$$

がえられる．

簡単のため $\mathrm{Bl}(\tilde{G}) \ni \tilde{B}'$ に対し $\eta^{\tilde{G}}$ の $\tilde{B}'$-部分を $\tilde{\eta}_{\tilde{B}'}$ と表す：$\eta^{\tilde{G}} = \sum_{\tilde{B}'} \tilde{\eta}_{\tilde{B}'}$. 特に $\mathrm{Irr}_{\tilde{G}}(G)^0 \ni \chi'$ に対し $B' = \{\chi'\}$ を被覆する $\tilde{G}$ のブロックを $\tilde{B}'$ とすれば，任意の $\tilde{\chi}' \in \mathrm{Irr}(\tilde{B}')$ に対し $\tilde{\chi}'_G = m\chi'$ となるから

$$(\tilde{\eta}_{\tilde{B}'})_G = e'\chi'$$

となり，$e' = ((\tilde{\eta}_{\tilde{B}'})_G, \chi') = ((\eta^{\tilde{G}})_G, \chi') = ((\eta_C)^G, \chi') = (\zeta^G, \chi')$ である．ここで $B' = \{\chi'\}$ は $\tilde{B}'$ が被覆する G の唯一つのブロックであることに注意すれば，$\chi' \neq \chi$ ならば $\tilde{B}' \neq \tilde{B} = b^{\tilde{G}}$ である．

したがって系3.2により $\chi' = \chi$, $\tilde{B}' = \tilde{B} = b^{\tilde{G}}$ のときは $\nu(\tilde{\eta}_{\tilde{B}}(1)) = \nu(\eta^{\tilde{G}}(1)) = \nu(\chi(1))$ となり，一方 $\tilde{\eta}_{\tilde{B}}(1) = (\zeta^G, \chi)\chi(1)$ であるから (i) がえられる．また $\chi' \neq \chi$ のときは $\nu(\tilde{\eta}_{\tilde{B}'}(1)) > \nu(\eta^{\tilde{G}}(1)) = \nu(\chi'(1))$, 一方 $\nu(\tilde{\eta}_{\tilde{B}'}(1)) = (\zeta^G, \chi')\chi'(1)$ より (ii) がえられる．

次に π が全射であることをみるため $\mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0 \ni \zeta$ とし，$P = P_i$, $C = C_G(P), N = N_{\tilde{G}}(P)$ $(= C \times P)$ とおく．また $\{\zeta\}$ を被覆する N のブロックを b とする．このとき $P \leq \delta(b)$ であるが，上の補題により $\delta(b)$ は N における C の補群であるから $P = \delta(b)$ となり，第1主定理により $b^{\tilde{G}} = \tilde{B}$ とおけば $\delta(\tilde{B}) =_{\tilde{G}} P$ である．よって $\tilde{B}$ が $B \in \mathrm{Bl}(G)$ を被覆するとすれば，再び補題により $d(B) = 0$ で $B = \{\chi\}$ は $\tilde{G}$-不変である．このとき $\chi^\pi = \zeta$ となる．

また $\mathfrak{T} \ni \zeta$ に対し $\mathrm{Irr}(C_G(P_i))^0 \ni \zeta$ となる P_i は，上でみたように $\chi^\pi = \zeta$ となる χ によってきまる $\tilde{B} \in \mathrm{Bl}(\tilde{G})$ の不足群となるから，π が単射であることから P_i

はξによって一意的に定まる．□

問　題　V

(K, R, F) は p-モジュラー系とする．また特に断らない限り K は1の原始 $|G|$ 乗根を含むものとする．

1. $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ ならば $\bar{\varphi} \in \mathrm{IBr}(G)$ である．ただし $\bar{\varphi}$ は φ の複素共役を表す．

2. P は RG の主直既約加群とし，KG-加群 U は P^K の直和因子であるとする．このとき R-自由な RG-加群 V で次をみたすものがある：

(a)　$V^K \simeq U$，すなわち V は U の R-形式である．

(b)　$\mathrm{hd}(V^*)$ は既約，したがって V^* は直既約である．

（注意：U が既約ならば適当な P に対し上の条件がみたされる．したがって (a), (b) をみたす V_{RG} がある．）

3. (i)　$\mathrm{Irr}(G) \ni \chi$ が G のすべての p-元($\neq 1$) の上で0の値をとるならば χ は不足数0の指標である．

(ii)　$\chi_1, \cdots, \chi_t$ はいずれも不足数0の既約指標とする．このとき次の2条件をみたす G の p-正則元 $y_1, \cdots, y_t$ がある．

(a)　$d(y_i^G) = 0 \qquad (1 \leq i \leq t)$　(ただし y_i^G は y_i を含む G-共役類)．

(b)　$\det(\chi_i(y_j)) \not\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\pi)$．

4. (大嶋)　$\mathrm{Irr}(G) \supset \Lambda$ に対し

$$\sum_{\chi \in \Lambda} \chi(x)\,\overline{\chi(y)} = 0 \qquad (\forall x \in G_{p'}, \forall y \in G - G_{p'})$$

が成り立つものとする．このとき G のブロック　$B_1, \cdots, B_t$　があって $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{Irr}(B_i)$ となることを以下の方針にしたがって証明せよ．

(i)　$x \in G_{p'}$ に対し，$\theta_x = \sum_{\chi \in \Lambda} \chi(x)\chi$ とおくと θ_x は G の主直既約指標の R-線形結合である．

(ii)　$\varepsilon = \sum_{\chi \in \Lambda} e_\chi$ とおけば，$\varepsilon \in RG$ となる．したがって ε は RG のブロックべき等元の和となる．

5. $\chi \in \mathrm{Irr}(B_0(G))$ ならば χ の任意の代数的共役も $B_0(G)$ に属する．

6. $\mathfrak{S}$ を G の p-セクションとする．$\lambda = \sum_{\chi} a_\chi \omega_\chi$ $(a_\chi \in K)$ は $Z(KG)$ から K へ

の線形関数で，ある $m \geq 0$ があってすべての $C \in \mathfrak{S}$ に対し $\lambda(\hat{C}) \in (\pi^m)$ となっているものとする．このとき任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ と $C \in \mathfrak{S}$ に対しても $\lambda_B(\hat{C}) \in (\pi^m)$ が成り立つ．

7. 定理 5.10 における記号と仮定のもとで次が成り立つ．

(i) $\tilde{B}$ のイデアル I に対し BIB を対応させて，$\tilde{B}$ のイデアル全体と B のイデアル全体が 1 対 1 に対応する．この対応は積を保ち，逆対応は B のイデアル L に対し $\tilde{B} \cap L$ を対応させることによって与えられる．

(ii) $J(B) = BJ(\tilde{B})B$.

8. B を G のブロックとし，$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ とする．III, 6.33 および III, 6.34 における記号を用いて次が成り立つ．

(i) $a_{\theta\chi} = a_{\chi\theta}$.

(ii) $\nu(\theta(1)) = a - d \Longrightarrow \nu(a_{\theta\chi}) = \mathrm{ht}(\chi)$.

(iii) $\theta \in \mathrm{Irr}(B), \mathrm{ht}(\theta) > 0 \Longrightarrow \nu(a_{\theta\chi}) > \mathrm{ht}(\chi)$.

(iv) $\nu(\theta(1)) = a - d \Longrightarrow \sum_{j=1}^{l} \omega_\chi(\hat{C}_j)\theta(x_j^{-1}) \not\equiv 0 \mod(\pi)$.

9. Q を G の正規 p-部分群とする．B を G の任意のブロックとするとき，次のいずれの場合においても B は $\bar{G} = G/Q$ の唯一つのブロックを支配する．

(a) $Q \subset Z(G)$ であるとき．

(b) G の正規 p-部分群 P があって，Q は P の Frattini 部分群に入る．

(ヒント：問題 I, 19, 問題 IV, 19 を用いよ.)

10. $G \triangleright H$ とする．V_{FG}, W_{FH} をともに既約加群とし，P_{FG}, Q_{FH} をそれぞれの射影被覆とする．また $T = T(W)$ とおき

$$V_H = e(\bigoplus_{a \in T\backslash G} W^a) \qquad (e \geq 1)$$

を V_H の既約分解とする．

(i) G/H が p'-群ならば次が成り立つ：

(a) $(e, p) = 1$.

(b) $P_H \simeq e(\bigoplus_{a \in T\backslash G} Q^a)$.

(ii) G/H が p-群ならば次が成り立つ：

(c) $e = 1$.

(d) $P \simeq Q^G$.

11. (Fong)　G は p-可解とする．P を FG の主直既約加群とし $V = P/PJ(FG)$ とすれば

$$\dim_F P = |G|_p (\dim_F V)_{p'}$$

が成り立つことを，前問を用いて $|G|$ に関する帰納法によって証明せよ．

12. G のブロック B に対し $D = \delta(B)$ は G の正規部分群で，しかも巡回群であるとする．$|D| = q, J(FD) = I$ とし，$U_1, \cdots, U_r$ を B^* の主直既約加群の完全代表系とするとき次が成り立つ．

(i)　$\mathrm{IND}(FD) = \{FD, I, I^2, \cdots, I^{q-1}\}$.

(ii)　任意の直既約 B^*-加群はある $U_i I^j$ に同型である．

(iii)　$U_i I^j \simeq U_k I^l \Longrightarrow (i, j) = (k, l)$.

(iv)　$\#\mathrm{IND}(B^*) = rq$.

13. $G = PO_{p'}(G)$ を p-べき零群とすれば，任意の $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し次の等式が成り立つ．

(i)　$k(B) = \#\mathrm{Irr}(\delta(B))$,　　(ii)　$l(B) = 1$.

14. (Fong)　F は標数 2 の完全体であるとする．$\boldsymbol{T}$ ($\neq \mathbf{1}_G$) が G の絶対既約な F-表現で自己反傾的ならば $\boldsymbol{T}$ の次数は偶数であることを以下の方針にしたがって証明せよ．

(i)　仮定より $XT(x)X^{-1} = {}^tT(x^{-1})$ ($\forall x \in G$) となる正則行列 $X = (x_{ij})$ がある．このとき X は対称行列であることを示せ．

(ii)　n を $\boldsymbol{T}$ の次数とし $V = F^n$ を $\boldsymbol{T}$ の表現加群とする．このとき

$$V_0 = \{v = (v_1, \cdots, v_n) \in F^n ; Q(v) = vX{}^tv = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} v_i{}^2 = 0\}$$

は V の FG-部分加群である．

(iii)　$x_{ii} = y_i{}^2$ となる $y_i \in F$ をとれば

$$V_0 = \{(v_1, \cdots, v_n) \in F^n ; \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = 0\}$$

となる．

もし $V_0 = 0$ ならば $n = 1$，したがって $\boldsymbol{T} = \mathbf{1}_G$ となって仮定に反する．$V = V_0$ ならば $\forall y_i = 0$，したがって $x_{ii} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ となる．よって n は偶数である．(標数 2 の体においては対角成分がすべて 0 であるような奇数次の対称行列は正則ではない：Z-係数の歪対称行列 $X = (x_{ij})$ ($x_{ij} = -x_{ji}$, $x_{ii} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$) については n が奇数ならば $\det X = 0$．これは mod 2 で考えても正しい．)

15. $S_1, \cdots, S_l$ を G の p'-セクションの全体とする．このとき

$$J(FG) = \{a \in FG\,;\, a\widehat{S}_i = 0\ (1 \leq i \leq l)\}$$

であることを以下の方針にしたがって証明せよ．

(i) $J(FG) = \{a \in FG\,;\, \varphi_i{}^*(aFG) = 0, \forall \varphi_i \in \mathrm{IBr}(G)\}$.

(ii) $S_{j'} = \{x^{-1}\,;\, x \in S_j\}$ とし，$\lambda: FG \to F$ を $a = \sum_{x \in G} a_x x$ に対し $\lambda(a) = a_1$ によって与える．このとき

$$\varphi_i{}^*(a) = 0\ (1 \leq \forall i \leq l) \Longleftrightarrow \sum_{x \in S_j} a_x = \lambda(a\widehat{S}_{j'}) = 0\ (1 \leq \forall j \leq l).$$

(iii) $a \in FG$ に対し

$a\widehat{S}_j = 0\ (1 \leq \forall j \leq l) \Longleftrightarrow \lambda(x^{-1}a\widehat{S}_j) = 0\ (\forall x \in G,\ 1 \leq \forall j \leq l)$

$\Longleftrightarrow \varphi_i{}^*(x^{-1}a) = 0\ (\forall x \in G,\ 1 \leq \forall i \leq l) \Longleftrightarrow a \in J(FG)$.

16. （K が 1 の原始 $|G|$ 乗根を含むことは仮定しない．）V を FG-加群とする．

(i) $y \in G_{p'}$ とするとき，$R\langle y\rangle$-表現加群 U があって，$V_{\langle y\rangle} \simeq U/\pi U$ となる．したがって $\varphi(y) = \chi_U(y)$ と定めると φ は V よりえられる G の Brauer 指標と一致する．

(ii) φ は（$G_{p'}$ 上では）G の既約 K-指標の $\boldsymbol{Z}$-線形結合となる．

（ヒント：問題 IV，16 を用いて $|G|$ に関する帰納法で示せ．）

問題の略解

問題 I

2. (i) j についての積 $\prod_{j \neq i} (I_i + I_j) = A$ を展開せよ.

(ii) $1 = v_i + w_i$ ($v_i \in I_i$, $w_i \in \prod_{j \neq i} I_j$) と表しておく. $x = (a_j + I_j) \in \bigoplus_{j=1}^{r} A/I_j$ に対し $a = \sum_j a_j w_j$ とおけば, $\varphi(a) = x$.

3. $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \subset \cdots\cdots$ となるから $\mathrm{Ker}\,\varphi^k = \mathrm{Ker}\,\varphi^{k+1} = \cdots$ ($\exists k \geq 1$). $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ とする. φ^k も全射であるから, $u = \varphi^k(v)$ をみたす $v \in V$ がある. これより $0 = \varphi^k(u) = \varphi^{2k}(v)$, すなわち $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi^{2k} = \mathrm{Ker}\,\varphi^k$ となって $u = 0$.

4. (i) いずれも $L/(L \cap V) \oplus (L \cap W)$ に同型である.

(ii) (2) ⇒ (1) は (i) より明らか. $V \supset V_1 \supsetneqq V_2, W \supset W_1 \supsetneqq W_2$ であって $\varphi: V_1/V_2 \simeq W_1/W_2$ とする. $L = \{(v, w) \in V_1 \oplus W_1 ; \varphi(v + V_2) = w + W_2\}$ とおくと $L \neq (L \cap V) \oplus (L \cap W)$.

5. M' を A' の極大右イデアルとすれば $\varphi^{-1}(M')$ は A の極大右イデアルである.

6. $V/VJ(A)$ は完全可約であるから, その極大な A-部分加群全体の共通集合は 0 である.

7. $f_i A \simeq e_i A$ $(1 \leq i \leq n)$ は A_A の自己同型を引き起すから, A の正則元 u があって $e_i A = u(f_i A)$ $(1 \leq i \leq n)$. $f_i' = u^{-1} e_i u \in f_i A$ とおくと, $1 = \sum_{i=1}^{n} f_i'$. これより $f_i' = f_i$ を導け.

8. 仮定から mod I で恒等写像となるような同型 $fA \simeq eA, (1-f)A \simeq (1-e)A$ がある. したがって $u = 1 + c$ ($c \in I$) があって $eA = u(fA)$, $(1-e)A = u(1-f)A$. これより $u^{-1}eu = f$ をえる (前問の証明を見よ).

9. (2) ⇒ (1) $V = U \oplus W$ となる既約な部分加群 W がある. W' を U の既約な部分加群とすれば仮定から $V = U' \oplus W'$. これより $U = (U \cap U') \oplus W'$ となり, U についても (2) の条件がみたされる. したがって V の組成列の長さに関する帰納法で証明される. (3) ⇒ (1) についても同様である.

10. W を $U\oplus V$ の既約な部分加群とする．$U\oplus V$ から U と V への射影を考えることによって，$W\subset \mathrm{soc}(U)\oplus\mathrm{soc}(V)$．

11. (i) I を A のイデアルとすれば $I=\bigoplus_i IA_i$ であり，IA_i は 0 または A_i である．

(ii) 与えられた準同型の核に対し (i) を用いる．

12. (i) $A/J(A)$ が単純因子の直和であることより明らかである．

(ii) $J(A)\not\supset I$ ならば $\bar{I}$ は $\bar{A}=A/J(A)$ のべき等元 $\bar{c}$ を含む$(c\in I)$．$\bar{c}$ を A のべき等元 e に持ち上げたとき，定数項のない整係数の多項式 $f(x)$ があって $e=f(c)$ とかけるから $e\in I$ をえる．

13. $\varphi: A_A\to A_A$ を $\varphi(a)=xa$ によって与える．$xy=1$ であるから φ は全射，したがって問題 3 より同型である．

14. 定理 10.11，10.14 より明らかである．

15. (i) $AeA=A$ より $\sum_i x_iey_i=1$ $(\exists\, x_i, y_i\in A)$．このとき

$$Ve\otimes_\Gamma eA\longrightarrow V \qquad (ve\otimes ea\to vea)$$

$$V\longrightarrow Ve\otimes_\Gamma eA \qquad (v\to\sum_i vx_ie\otimes ey_i)$$

は互いに他の逆写像である．

(ii) $f\in\mathrm{Hom}_A(U,V)$ に対し $f(Ue)=0$ ならば，$f(U)=f(UAeA)=f(Ue)A=0$．よって $f=0$．一方 $U\simeq Ue\otimes_\Gamma eA$ より任意の $g\in\mathrm{Hom}_\Gamma(Ue, Ve)$ は $\mathrm{Hom}_A(U,V)$ の元に拡張される．

(iii) $W_\Gamma'\subset W_\Gamma$ に対し自然な写像 $\varphi:\mathfrak{G}(W')\to\mathfrak{G}(W)$ は単射である．実際 $\mathfrak{G}(W')e\simeq W'$，$\mathfrak{G}(W)e\simeq W$ であるから $(\mathrm{Ker}\,\varphi)e=0$．したがって $\mathrm{Ker}\,\varphi=0$．U_A が射影加群のとき，$\mathfrak{F}(V)$ が射影加群となることは上の (i)，(ii) より明らかである．

16. $e_{i\mu}A=x_{i\mu}e_iA=x_{i\mu}ee_iA\subset AeA$ $(\exists\, x_{i\mu}\in A)$．よって $AeA=A$．

17. (i) $P\simeq nA$ のときは $J(M_n(A))=M_n(J(A))$ より明らかである．$P\oplus Q=F\simeq nA$ とし，π を F から P への射影とすれば $\mathrm{End}_A(P)\simeq\pi\,\mathrm{End}_A(F)\pi$ であり，したがって $J(\mathrm{End}_A(P))\simeq\pi J(\mathrm{End}_A(F))\pi$ である．この同型の意味を考えよ．

(ii) 射影加群 P に対しては $\mathrm{End}_A(P)\to\mathrm{End}_A(P/PJ(A))$ は全射である（問題 14 の証明参照）．

18. 必要条件： U は A-自由加群 $F=x_1A\oplus\cdots\oplus x_nA$ の直和因子としてよい．

$u = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i(u)$ $(\varphi_i(u) \in A)$ とおけば，$\varphi_i \in \mathrm{Hom}_A(U, A)$．$\pi$ を F から U への射影とし，$u_i = \pi(x_i)$ とすればよい．

十分条件：　A-自由加群 $F = y_1A \oplus \cdots \oplus y_nA$ を考え，$f : U \to F$，$g : F \to U$ をそれぞれ $f(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i(u)$，$g(\sum_{i=1}^{n} y_ia_i) = \sum_{i=1}^{n} u_ia_i$ によって与えると $gf = \mathrm{id}_U$ である．

19. $Z(A/I)$ の任意のべき等元 ε に対し，A のべき等元 e があって $\bar{e} = \varepsilon$ とできる．条件 (1) または (2) の下では $e \in Z(A)$ であることを示せばよい．

(1) の場合：　$f = 1 - e$ とおく．$eAf \subset eNAf = NeAf$ となるが N がべき零であるから $eAf = 0$．同様にして $fAe = 0$．これより $e \in Z(A)$ となることが容易に示される．

(2) の場合：　$J = J(A)$ とおくと $eAf \subset J^2$，$fAe \subset J^2$．これより $eAf = eJ^2f = eJ(e+f)Jf \subset eJeJf + eJfJf \subset eJ^3f$．これを続けることによって $eAf = 0 = fAe$ がわかる．

20. $\lambda' \otimes \mu'$ によって引き起される　$\xi : V \otimes W/\mathrm{Im}\, f \to V'' \otimes W''$ が同型であることを示せばよい．$V'' \times W'' \to V \otimes W/\mathrm{Im}\, f$　$((v'', w'') \to v \otimes w + \mathrm{Im}\, f$，ただし $\lambda'(v) = v'', \mu'(w) = w'')$ が定義可能で，ξ の逆写像を引き起すことを証明せよ．

21. $W_2/W_1 \cap W_2 \simeq W_1 + W_2/W_1$　より　$V \otimes W_2/V \otimes (W_1 \cap W_2) \simeq (V \otimes W_1 + V \otimes W_2)/V \otimes W_1 \simeq V \otimes W_2/V \otimes W_1 \cap V \otimes W_2$．

22. 2つの完全系列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R \longrightarrow R/L \longrightarrow 0$$

に問題 20 を使え．

問　題　II

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A/J \simeq M_2(K) \oplus K$．また既約な右 A-加群の代表系は $\{(K, K, 0), (0, 0, K)\}$．

2. $c_{ii}A = c_{ii}M_n(K) \simeq \widehat{M_n(K)c_{ii}} = \widehat{Ac_{ii}}$. ここで真中は $M_n(K)$-同型であるから，特に A-同型である．

3. 一般に $a\tilde{a} = \tilde{a}a$ をみたす行列 a は対角化可能である．$J = \tilde{J}$ であるから，$a \in J$ に対し $a + \tilde{a}$ を考えよ．

4. $\boldsymbol{Q}G \simeq \boldsymbol{Q}[x]/(x^m - 1)$. ζ_d のみたす $\boldsymbol{Q}$ 上の既約多項式を $f_d(x)$ とすれば $x^m - 1 = \prod_{d|m} f_d(x)$ であることと，Chinese remainder theorem を使え．

5. (ii) $J(A) = 0$ ならば A は半単純であるから，B は A の単純因子のいくつかの直和となり，単位元をもつ．

(iii) $J(A) \cap B = 0$ ならば $A = J(A) + B$ となって $A = B$.

6. $A/J(A) \supset B + J(A)/J(A) \simeq B/B \cap J(A)$ であることと，φ が $B \cap J(A)$ 上で 0 となることより，A は初めから半単純と仮定してよい：$A = Ke_1 \oplus \cdots \oplus Ke_n$ $(e_i \in \mathrm{pi}(A))$. 前問より，B は単位元をもつ半単純多元環となるから，$B = Kf_1 \oplus \cdots \oplus Kf_r$ $(f_i \in \mathrm{pi}(B))$. よって $\varphi(f_1) = 1, \varphi(f_i) = 0$ $(2 \leq i \leq r)$ としてよい．$f_1 = e_1 + \cdots + e_s$ とするとき，$\hat{\varphi}(e_1) = 1, \hat{\varphi}(e_j) = 0$ $(2 \leq j \leq n)$ とおけば，$\hat{\varphi}$ は φ の拡張である．

7. (i) $Z(D) = \boldsymbol{R}$ であるから，$\dim_{\boldsymbol{R}} D = [\boldsymbol{C} : \boldsymbol{R}]^2 = 4$.

(ii) $\sigma^{-1}i\sigma = -i$ $(\sigma \in D)$ とすれば $D = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}\sigma$ であり，$\sigma^2 \in Z(D) = \boldsymbol{R}$. もし $\sigma^2 = a > 0$ ならば，$(\sigma - \sqrt{a})(\sigma + \sqrt{a}) = 0$ より $\sigma \in \boldsymbol{R}$ となって矛盾．よって $a < 0$ であるから，$j = \sigma/\sqrt{-a}$ とおけばよい．

8. (i) L は K 上有限次としてよい．このとき $L \otimes_K A/J(A)$ は半単純であるから，$J(A^L) \subset J(A)^L$.

(ii) K 上有限次の L の部分体 E と有限生成の A^E-加群 U があって，$V = L \otimes_E U$ とできる．E は K 上分離的であるから，${}_EE_E | E \otimes_K E$. $V = L \otimes_E E \otimes_E U | L \otimes_E (E \otimes_K E) \otimes_E U = L \otimes_K U$. U を A-加群とみたものを W とすればよい．

9. $K = K(\tilde{\xi})$ と仮定してよい．このとき $A = M_n(D)$ は K 上の中心的単純環である．$L \otimes_K D \simeq M_l(D')$ (D' は多元体) とすれば $\dim_K D = l^2 \dim_L D'$，すなわち $m_K(\tilde{V}) = lm_L(\tilde{V})$. また $L \otimes_K D \simeq lU$ (U は既約な $L \otimes_K D$-加群) となるから両辺の D 上の階数を比較して，$\dim_K L = l \dim_D U$，すなわち $l | \dim_K L$. 以上から (i)，(ii) が示される．

11. (⇐) $f_p \sim 0$ ($\forall p \| |G|$) を示す．g を f の p'-部分とすると $g_S \sim 0$．これと $f_S \sim 0$ より $(f_p)_S \sim 0$．前問より $|G:S| f_p \sim 0$ となるから，$f_p \sim 0$．

12. (ii) 全射 $\boldsymbol{Q}G \to \boldsymbol{Q}[G/\langle y\rangle] \simeq \boldsymbol{Q}H = \boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{Q}[\zeta_5]$ があることと，(i) より，$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}[\zeta_5], M_5(K)$ はいずれも $\boldsymbol{Q}G$ の単純因子である．

13. $A = \bigoplus_{x \in G} u_x K$，$u_x u_y = u_{xy}\alpha(x,y)$ とおく．λ を A の一次元の表現とすれば，$\lambda(u_x)\lambda(u_y) = \alpha(x,y)\lambda(u_{xy})$ となることから $\alpha \sim 1$．

14. (i) $V/S_{i-1}(V) = M$ とおく．$S_i(V)/S_{i-1}(V) = \mathrm{soc}(M) = \sum_\alpha M_\alpha$ (M_α は M の既約部分加群全体をわたる．) より $\widehat{V/S_i(V)} = \widehat{M/\mathrm{soc}(M)} = (\sum_\alpha M_\alpha)^\perp = \bigcap_\alpha M_\alpha^\perp = J\hat{M} = J\widehat{V/S_{i-1}(V)} = J(J^{i-1}\hat{V}) = J^i\hat{V}$．(4 番目の等号は問題 I, 6 による．)

(ii) $0 \to S_{i+1}(V)/S_i(V) \to V/S_i(V) \to V/S_{i+1}(V) \to 0$ (完全)

の双対を考え，(i) を使う．

15. $\mathrm{Hom}_A(eA/eJ, A) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(eA, A) = Ae\,;\, \varphi(eJ) = 0\} = l(J)e$．

(ii) (⇒) (i)より $\forall e \in \mathrm{pi}(A)$ に対し，$l(J)e \neq 0$．すなわち $r(l(J))$ はべき等元を含まないから J に入る．

(⇐) 仮定から $l(J)e \neq 0$ ($\forall e \in \mathrm{pi}(A)$) であるから，(i) より $\mathrm{Hom}_A(eA/eJ, A) \neq 0$．

17. K が A の分解体であるから，A_A における $\bar{e}\bar{A}$ の重複度は $\dim_K Ae$ に等しい．ところが $eA \simeq \widehat{(Ae)}^\sigma$ であることから $\dim_K Ae = \dim_K eA$ (σ は中山の自己同型)．

18. (⇒) $\lambda \in \hat{A}$ を正則かつ対称的とするとき，$a \mapsto \lambda_a$ によって ${}_AA_A \simeq {}_A\hat{A}_A$ となる．

(⇐) 与えられた同型で 1_A に対応する $\hat{A}$ の元を λ とする．λ が正則かつ対称的であることは定理 8.16 の証明を参照せよ．

19. (i) $\hat{V} = \mathrm{Hom}_K(V \otimes_A A, K) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, \hat{A}) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, A)$．

(ii) eA から eA への c 倍する写像を考えよ．

20. (i) $\Gamma = eAe$ を A の basic ring とする．L を K の拡大体とすれば $J(\bar{\Gamma}^L) = J(e\bar{A}^L e) = eJ(\bar{A}^L)e = 0$ であるから，$\bar{\Gamma}^L$ は半単純．よって $\bar{\Gamma}$ は K 上分離的である．$P = (Ae)_\Gamma$ は射影加群であり，$A \simeq \mathrm{End}_\Gamma(P)$．$n\Gamma = P \oplus P'$ とおいて ($n \geq 1$)，π を $n\Gamma$ から P への射影とすれば，$A \simeq \pi M_n(\Gamma)\pi$ である．もし $\Gamma = \Gamma' \oplus J(\Gamma)$ となる部分多元環 Γ' があれば $A \simeq \pi M_n(\Gamma')\pi \oplus \pi M_n(J(\Gamma))\pi =$

$\pi M_n(\bar{\Gamma}')\pi \oplus J(A)$ となる（ただし $\bar{\Gamma} = \Gamma/J(\Gamma)$）.

（ii）$J^2 \neq 0$ ならば帰納法によって，$A/J^2 = B'/J^2 \oplus J/J^2$ とかける．さらに $B' = B \oplus J^2$ とかけるから $A = B \oplus J$.

（iii）$(A' \oplus W) \cap A$ が部分環となることを示す．$a_i = \gamma_i + w_i \in (A' \oplus W) \cap A$ とする（$\gamma_i \in A', w_i \in W, i = 1,2$）．このとき $a_1a_2 = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1 w_2 + w_1\gamma_2$ であり，$\gamma_1 w_2 = (\gamma_1 + w_1)w_2 = a_1 w_2 \in W, w_1\gamma_2 = w_1 a_2 \in W$．よって $a_1a_2 \in (A' \oplus W) \cap A$.

（iv）K が代数的閉体で，A がその basic ring と一致しておれば $A/J \simeq Ke_1 \oplus \cdots \oplus Ke_k$ ($e_i \in \mathrm{pi}(A)$)．よって $B = \bigoplus_{i=1}^{k} Ke_i$ とおけば $A = B \oplus J$ となる．

21. 自然な対応によって $\mathrm{End}_R(V) \otimes_R \mathrm{End}_R(W)$ と $\mathrm{End}_R(V \otimes W)$ を同一視してよい．$\mathrm{End}_\Lambda(V)$ は $\Lambda^0 \mathrm{id}_V$ の $\mathrm{End}_R(V)$ における可換子環であるが，R が単項イデアル整域であるからこれは R 上有限生成自由である．以上から補題 4.1 (ii) と同様な方法で証明される．

問題 III

3. $\mathrm{Hom}_{FG}(W, V) \simeq \mathrm{Hom}_{FP}(W_P, F) \neq 0, \mathrm{Hom}_{FG}(V, W) \simeq \mathrm{Hom}_{FP}(F, W_P) \neq 0$.

4.（i）$U_1 \otimes W_i$ は射影加群で，しかも $U_1 \otimes W_i/U_1J(FG) \otimes W_i \simeq W_i$.

（ii）$|G| = \sum_{i=1}^{l} (\dim_F W_i)(\dim_F U_i)$ であることと (i) を利用せよ．

5. $A = FG, J = J(FG)$ とおく．δ は A の逆自己同型である（$\delta(uv) = \delta(v)\delta(u)$）から，$\delta(e) \in \mathrm{pi}(A)$．$\forall \varphi \in \widehat{eA}, \forall u \in eA$ に対し，$(\varphi\delta(e))(u) = \varphi(ue) = \varphi(eue)$．これと $eAe \neq eJe$ より $\exists \psi \in \widehat{eA/eJ}$ に対し，$\psi\delta(e) \neq 0$．$\widehat{eA/eJ} = \mathrm{soc}(\widehat{eA})$ であるから $\delta(e)A \simeq \widehat{eA}$.

6. G は Ω 上の置換群とし，$C = x^G$ とおく．$|C|\chi(x) = \sum_{y \in C} \chi(y) = \sum_{y \in C} \#\{\omega \in \Omega\,; y \in G_\omega\} = \sum_{\omega} |C \cap G_\omega|$．$G$ は可移であるから $|C \cap G_\omega| = m$ は ω によらず一定である．よって $|C|\chi(x) = |\Omega| m = \chi(1)m$.

7. $|C_{\bar{G}}(\bar{x})| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(\bar{G})} |\chi(x)|^2 \leq \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(x)|^2 = |C_G(x)|$.

8.（i）$\chi(x) = \sum_i \zeta_i$（固有値の和）$\Longrightarrow \chi(x)^\sigma = \sum_i \zeta_i{}^\sigma = \sum_i \zeta_i{}^{m_\sigma} = \chi(x^{m_\sigma})$.

（iii）$\#\{G$ の既約な K-指標$\} = \#\{\mathrm{Irr}(G)$ の $\mathfrak{G}$-軌道$\}$（定理 1.30 (ii)）．これと

Brauer の置換補題を用いる．

9. 前問 (i) より $\prod_x |\chi(x)|^2 \in \boldsymbol{Z}$ である．よって $\forall x \in G$ に対し，$\chi(x) \neq 0$ ならば $\sum_{x \neq 1} |\chi(x)|^2 \geq |G| - 1$ となる．これより $|G| = \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 \geq \chi(1) + |G| - 1 \geq |G|$ となって，$\chi(1) = 1$.

10. $\boldsymbol{T}: G \to GL_2(\boldsymbol{C})$ を既約表現とする．一次の表現は単位表現に限るから，$\det T(x) = 1$ ($\forall x \in G$)．2 は $|G|$ の約数であるから，G は位数 2 の元 y をもつ．このとき $T(y) = -I$ としてよいから $y \in Z(G)$ となり，G の単純性に反する．

11. (i) $T(\zeta) = G$ としてよい．G/H の射影表現は線型表現に限るから（補題 5.4）その次数は 1 である．

(ii) $\zeta^G(x) = 0$ ($\forall x \in G - H$) であり，$(\zeta^G)_H$ は ζ の G-共役の和である．したがって $\zeta^G = m\chi$ となる（$\exists\, m \in \boldsymbol{C}$）．これより $m = e$ を導け．

(iii) χ は $G - \operatorname{Ker}\lambda$ 上で常に 0 であり，$G/\operatorname{Ker}\lambda$ は巡回群である．これと上の (i)，(ii) から明らかである．

12. (i) $\zeta^G = \sum_i e_i\chi_i$ とすれば，$\sum_i e_i{}^2 = (\zeta^G, \zeta^G)_G = ((\zeta^G)_H, \zeta)_H = |G:H|$.

(ii) 上の証明から (1) ⇔ (2) は明らかであり，(2) ⇔(3) は自明．(3) ⇔ (4) は定理 5.8 より明らかである．

13. 定理 5.11 より (1) をみたす $\boldsymbol{X}$ がある．$\boldsymbol{X}$ の次数を n とすれば，$(n, |S|) = 1$ より $(\det \boldsymbol{X})_S = \mu^{-n}$ となる S の一次の指標 μ がある．μ を G の表現とみて，$\mu\boldsymbol{X}$ をあらためて $\boldsymbol{X}$ とすればよい．一意性は系 5.9 と $(n, |S|) = 1$ より明らかである．

14. 定理 5.7 (iii) と問題 II, 11 より明らかである．

15. $Z^2(G, \boldsymbol{C}^\times) = M_{\boldsymbol{C}}(G) \times B^2(G, \boldsymbol{C}^\times)$ と考える．このとき $\alpha \in M_{\boldsymbol{C}}(G)$ が位数 n をもてば，任意の $x, y \in G$ に対し $\alpha(x, y)^n = 1$ となる．特に α が p' 元ならば，α は自然に $M_F(G)$ の元とみることができる．この意味で $M_F(G)$ と $M_{\boldsymbol{C}}(G)/M_{\boldsymbol{C}}(G)_p$ の間の同型がえられる．

16. 与えられた付値を拡張して，その付値環 S は 1 の原始 $|G|$ 乗根を含むとしてよい．このとき主直既約指標の一次独立性から $\tilde{S} \otimes_R U \simeq \tilde{S} \otimes_R V$ が成り立つ（$\tilde{S}$ は S の完備化）．$\tilde{S}, R$ の剰余体をそれぞれ E, F とし，(π) を R の付値イデアルとすれば，上の同型から $E \otimes_F U/\pi U \simeq E \otimes_F V/\pi V$（$EG$-同型）をえる．これより $U/\pi U \simeq V/\pi V$ であり (II, 3.1)，したがって問題 I, 14 から $U \simeq V$ である．

($\pi RG \subset J(RG)$ に注意せよ.)

17. 補題6.13より $\varphi^*(x) \in F$ ($\forall \varphi \in \mathrm{IBr}(G), \forall x \in G$). これと定理1.32 (i) より明らかである.

19. (i) $m \geq 0$ を $\pi^m S \in M_n(\tilde{R})$ となるように選ぶ. さらに S^{-1} の各成分を π-進展開して, $S^{-1} = T + \pi^{m+1} Y$ とおく ($T \in M_n(K), Y \in M_n(\tilde{R})$). このとき $TS = I - \pi(\pi^m YS)$ は $\tilde{R}$-行列でその行列式の値は $\tilde{R}$ の正則元である.

(ii) 仮定から A の K-表現 $\boldsymbol{Y}$ と $S \in GL_n(\tilde{K})$ があって $Y(a) = SX(a)S^{-1}$ となる($\forall a \in A$). $T \in GL_n(K)$ を (i) をみたすように選べば, $TY(a)T^{-1} = (TS)X(a)(TS)^{-1} \in M_n(K) \cap M_n(\tilde{R}) = M_n(R)$. すなわち $\boldsymbol{X}$ は R で実現可能である.

20. (i) 前問より明らかである.

(ii) $\boldsymbol{Z}/(p)$ は G の分解体である. 問題II, 4を利用せよ.

21. Char $L = 0$ の場合は定理5.6である. Char $L = p > 0$ の場合, G の表現群の位数は p と素である (II, 7.3(i)). よって定理6.12より標数0の場合に帰着される.

問　題　IV

1. X_n が P の F-表現 $\Longleftrightarrow X_n(x)^q = I$ ($q = |P|$) $\Longleftrightarrow (I - X_n(x))^q = 0 \Longleftrightarrow 1 \leq n \leq q$.

2. $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす $T \in GL_2(F)$ を調べよ.

3. (i) $\forall V \in \mathrm{IND}(FG) \Rightarrow V \mid U^G, \exists U \in \mathrm{IND}(FP)$.

(ii) 仮定から $P \triangleright Q$ があって $\bar{P} = P/Q \simeq \langle x \rangle \times \langle y \rangle, x^p = y^p = 1$.

(a) $\mathrm{IND}(F\bar{P}) \subset \mathrm{IND}(FP)$ であるから, 前問より $|\mathrm{IND}(FP)| = \infty$. また W_{FP} が直既約ならば, $V \in \mathrm{IND}(FG)$ があって, $W \mid V_P$ である.

(b) $\tilde{F}$ を F の代数的閉包とする. もし $|\mathrm{IND}(FG)| < \infty$ ならば, 問題II, 8 (ii) より $|\mathrm{IND}(\tilde{F}G)| < \infty$ となる.

4. (ii) $f(u) = \pi v$ ($u \in U_0, v \in V_0$) とすれば, (i) の可換図形から, $u = \pi u'$ となる $u' \in U_0$ がある.

(iii) 下段の合成写像 $V_0 \to U$ は全準同型であるから $\mathrm{rank}_R(\mathrm{Im}\, f) \geq \dim_F U$

$= \mathrm{rank}_R U_0$ である．よって $\mathrm{Ker} f = 0$ となる．また (ii) より $V_0/\mathrm{Im} f$ はトーションがないから R-自由加群である．

(iv) U_0 は $\{1\}$-射影的であるから f は RG-準同型として分裂する（問 2.4，問 2.3 参照）．

5. (ii) V が直既約で $\mathrm{Tr}_1^G(V) \neq 0$ ならば $V \simeq U$ であることを示せばよい．仮定から $v\sigma \neq 0$ となる $v \in V$ がある．そこで $f: U \to V$ を $f(a) = va$ $(a \in U \subset FG)$ によって与えると，f は単準同型である．したがって $U \mid V$ となり，$U \simeq V$ をえる．

(iii) $\sigma = (\sum_{x \in H} x)(\sum_{t \in H\backslash G} t) \in fFG.$

6. (i) $V \mid W^G$ $(\exists W \in \mathrm{IND}(\mathfrak{o}H))$，よって $V_H \mid (W^G)_H = \bigoplus_{t \in H\backslash G} W^t$．また $(V_H)^t \simeq (V^t)_H$ であることに注意せよ．

(ii) $G \geq T \geq H$ のとき，$W_{\mathfrak{o}\bar{T}}$ に対し $W \otimes_T \mathfrak{o}G \simeq W \otimes_{\bar{T}} \mathfrak{o}\bar{G}$.

(iii) $\mathrm{vx}(V) = Q \subset P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とする．仮定から $V_{PH} \mid (V_{QH})^{PH}$ であるが，PH/H は p 群であるから $(V_{QH})^{PH}$ は直既約である．したがって $V_{PH} \simeq (V_{QH})^{PH}$ となり，$|PH : QH| = 1$ をえる．

(iv) $I = J(FH)$ とすれば $P(Y)/P(Y)I \simeq Y/YI$ であるから $P(Y)^G/(P(Y)I)^G \simeq Y^G/(YI)^G$ である．これと $(P(Y)I)^G \subset P(Y)^G J(FG)$，および $(YI)^G \subset Y^G J(FG)$ より $P(Y)^G \simeq P(Y^G)$ をえる．したがって $\Omega(Y^G) \simeq \Omega(Y)^G$ である．II，8.25 より Ω^{-1} についても同じことが成り立つ．

(v) III，1.25 より 左辺 $\supset$ 右辺．等号を示すには任意の $FG/J(FH)FG$-加群 X が完全可約であることをいえばよい．Y を X の部分加群とすれば X_H は完全可約であるから，$0 \to Y \to X \to X/Y \to 0$ は FH-加群の完全系列としては分裂する．$p \nmid |G:H|$ であるから X/Y は H-射影的である．したがって上の系列は FG-加群の完全系列として分裂する．

(vi) Y を任意の主直既約 FH-加群とすれば，Y^G は直既約である．したがって任意の主直既約 FG-加群はこのような形となる．さらに ${}_{FG}(Y^G, W^G) \simeq |T(W):H|_{FH}(Y, \bigoplus_{t \in T(W)\backslash G} W^t)$ であるから，Y がある W^t の射影被覆となる場合に限り ${}_{FG}(Y^G, W^G) \neq 0$．よって $U = \mathrm{hd}(P(W)^G)$ とおけばよい．

7. $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ に対し，$(\mathfrak{o}_H^G)_P$ を考えよ．

8. $P = \mathrm{vx}(U)$ とすると，$P \leq_G \mathrm{vx}(V)$ は明らかである．$\pi_U : R' \otimes_R V \to U$ を射

影とすれば，$\pi_U \in \mathrm{Tr}_P^G(\mathrm{E}_{R'}(R' \otimes_R V)) \simeq R' \otimes_R \mathrm{Tr}_P^G(\mathrm{E}_R(V))$ である．($\mathrm{id}_U \in \mathrm{Tr}_P^G(\mathrm{E}_{R'}(U))$ に注意せよ．) $P \lneqq_G \mathrm{vx}(V)$ ならば $\mathrm{Tr}_P^G(\mathrm{E}_R(V)) \subset J(\mathrm{E}_{RG}(V))$ であるから $\pi_U \in J(\mathrm{E}_{R'G}(R' \otimes_R V))$ となる．π_U はべき等元であるからこれは矛盾である．

9. (i) 問題 II，21 より $\mathrm{E}_{RG}(V_1 \otimes_o V_2)$ は局所環である．

(ii) $V_1 \otimes_o V_2 | (V_1)_{P_1}^{G_1} \otimes_o (V_2)_{P_2}^{G_2} \simeq (V_1 \otimes_o V_2)_{P_1 \times P_2}^G$ となるから $\mathrm{vx}(V_1 \otimes_o V_2) \leq_G P_1 \times P_2$ である．$Q = \mathrm{vx}(V_1 \otimes_o V_2)$ とすれば，$V_1 \otimes_o V_2 | W_Q^G$．$(V_1 \otimes_o V_2)_{G_1} \simeq (\mathrm{rank}_o V_2) V_1$ であるから，$V_1 | (W_Q^G)_{G_1}$．これと Mackey 分解から $P_1 \leq_{G_1} Q \cap G_1 \leq Q$ をえる．同様にして $P_2 \leq_{G_2} Q$ であるから $P_1 \times P_2 \leq_G Q$ となり，等号をえる．

10. (i) 問題 6 (ii) より明らかである．

(ii) 定理 4.7 (iii) において $W = F_P, H = P$ とせよ．

11. (⇐) W は絶対直既約であるから系 7.3 と系 6.8 より明らか．

(⇒) $G = T(W)$ としてよい．$E = \mathrm{E}_{oG}(W^G)$，$E_1 = \mathrm{E}_{oH}(W)$ とすれば $A = E/J(E_1)E$ は $\bar{G} = G/H$ の一般群環である（定理7.2の証明参照)．仮定から $A/J(A) \simeq F$ であるから A は一次の表現をもち，したがって $A \simeq F\bar{G}$ である（問題 II，13)．ところが A は局所環であるから $\bar{G}$ は p 群である（問題 5 (iii))．

12. (ii) $I = J(LN)$ である．

(iii) $\bar{G} = G/N$ とおくと $\bar{G} = \mathrm{Gal}(L/K)$ であり，$A/IA = \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{G}} u_{\bar{x}} L \simeq (L/K, 1) \simeq M_n(K)$，$n = \dim_K L$ (II, 7.9)．

13. $G = T(W)$ と仮定してよい．$E = \mathrm{E}_{oG}(W^G), E_1 = \mathrm{E}_{oH}(W), A = E/J(E_1)E$ とおく．仮定から $L = E_1/J(E_1)$ は有限体であるから II，7.4 より $A \simeq (L, G/H, 1)$ である．G/H は p 群であるから前問 (ii), (iii) より $A/J(A) \simeq M_n(K)$ ($n \geq 1$, $F \subset K \subset L$)．これより E の原始べき等元は互いに同値となるから，W^G の直既約因子は互いに同型である (I，5.4)．

14. (i) Scott 加群を考えよ．(ii) 問題 7 より明らかである．

15. $(\tilde{Q}_p(\chi), R, F) \leq (E, R', F')$ において E は 1 の原始 $|G|$ 乗根を含むものとする．χ を与える $R'G$-加群を V とすれば，$p \nmid |G|$ であるから V^* は既約である．一方 $F = F(\chi^*)$ であるから $V^* = F' \otimes_F W$ となる $W \in \mathrm{IRR}(FG)$ がある．このとき R の完備性から $W = F \otimes_R W_0$ となる $W_0 \in \mathrm{IND}(RG)$ がある．よって V^*

$\simeq (R' \otimes_R W_0)^*$ となるが，$V, R' \otimes_R W_0$ はいずれも RG-射影加群であるから $V \simeq R' \otimes_R W_0$ をえる．すなわち χ は $\tilde{Q}_p(\chi)$ 上で実現可能である．

16. V を直既約とし，$Q = \mathrm{vx}(V)$ とする．$Q = 1$ ならば V は射影加群であるから何も示す必要はない．$f = f(G, Q, N_G(Q))$ とし，$M = f(V)$ とすれば $M^G \simeq V \oplus V'$ で，V' の各直既約因子のヴァーテックスは Q の真部分群である．M^G は局所加群であるから $|Q|$ に関する帰納法によって証明が完了する．

17. $0 \to \Omega(V) \to P(V) \to V \to 0$ より $0 \to \Omega(V) \otimes_F U \to P(V) \otimes_F U \to V \otimes_F U \to 0$ (完全) をえる．これと I, 10.18 より $n = 1$ の場合は正しい．I, 10.19 を使えば $n = -1$ の場合も同様にして示される．一般の場合は帰納法を使え．

18. (i) $\mathrm{Comp}(W^G)$ のうち非射影的なものを $\{V_1, \cdots, V_m\}$ とする．$\Omega^n(W)^G = \Omega^n(W^G) \oplus$(射影加群) であるから，もし $\Omega^n(W) \simeq W$ ならば $\{\Omega^n(V_1), \cdots, \Omega^n(V_m)\} = \{V_1, \cdots, V_m\}$ でなければならない．これより $\Omega^{nr}(V_i) = V_i$ となる $r = r(i)$ が存在する．

(ii) $\Omega^n(V)_H = \Omega^n(V_H) \oplus$(射影加群) であるから (i) と同様にして証明される．

19. (i) $\Phi(P) = \langle x^p, [P, P]; x \in P \rangle$ であることと $x^p - 1 = (x-1)^p$, $x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}\{(x-1)(y-1) - (y-1)(x-1)\} \subset J(FP)^2$ より明らか．

(ii) $F = F_0$ の場合に証明すればよい．$f: P \to J(FP)/J(FP)^2 \,(x \mapsto (x-1) + J(FP)^2)$ は準同型写像である．($xy - 1 = (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$ に注意せよ．) (i) で示した等式から $\mathrm{Ker}\, f \supset \Phi(P)$ であることがわかる．よって $\bar{f}: P/\Phi(P) \to J(FP)/J(FP)^2$ が引き起される．一方 $0 \leq a < p$, $x \in P$ に対し $\bar{a}(x-1) \mapsto x^a\Phi(P)$ によって $g: J(FP) \to P/\Phi(P)$ が定義され，$\bar{g}: J(FP)/J(FP)^2 \to P/\Phi(P)$ が引き起されるが，これは $\bar{f}$ の逆写像である．

(iii) $\Omega(F_P) \simeq \Omega^{-1}(F_P) \Longleftrightarrow J(FP) \simeq FP/\mathrm{soc}(FP) \Longleftrightarrow J(FP)$ は巡回加群 $\Longleftrightarrow J(FP)/J(FP)^2 \simeq F \Longleftrightarrow P/\Phi(P) \simeq \boldsymbol{Z}/(p)$.

20. (i) V を直既約とする．仮定により $f: V^{R'} \to W^{R'}$, $g: W^{R'} \to V^{R'}$ があって $g \circ f$ は $V^{R'}$ の恒等写像となる．I, 11.12 より $f = \sum_i \alpha_i \otimes f_i$, $g = \sum_j \beta_j \otimes g_j$ となる $\alpha_i, \beta_j \in R'$, $f_i \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$, $g_j \in \mathrm{Hom}_A(W, V)$ があるが，$\mathrm{End}_A(V)$ は局所環であるから $g_j f_i$ が $\mathrm{End}_A(V)$ の正則元となるような g_j, f_i が存在せねばならない．これより $V \mid W$ をえる．一般には V の直既約因子の個数に関する帰納法で

証明される．(ii) は (i) より明らかである．

問 題 V

1. φを与える G の F-表現の反傾表現を考えよ．

2. $P^K = U \oplus M$ (M は KG-部分加群) とし，$L = P \cap M$ とおけばこれは P の純部分加群である (II, 1.8)．$V = P/L$ とおけば，L は R-加群として P の直和因子であるから，$L^* \subset P^*$，$P^*/L^* \simeq V^*$，$V^K \simeq U$ となる．また $\mathrm{hd}(V^*) \simeq \mathrm{hd}(P^*)$ は既約である．

3. (i) $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とし，ρ を P の正則表現の指標とすれば仮定より $\chi_P = m\rho$ となる ($m \in N$)．よって $|P| | \chi(1)$．

(ii) $y \in G_{p'}$ であるとき，$|C_G(y)|$ が p で割れるならば $\chi_i(y) \equiv 0 \pmod{\pi}$ である．これとモジュラー指標表のつくる行列が指数 l をもつことより明らか．

4. (i) III, 6.15 の証明を見よ．

(ii) $a_x = \dfrac{1}{|G|}\sum_{\chi \in \Lambda} \chi(1)\chi(x)$ とおくと $\varepsilon = \sum_{x \in G} a_x x^{-1}$．さらに

$$a_x = \begin{cases} \dfrac{1}{|G|}\theta_x(1) \in R & (x \in G_{p'} \text{ のとき}), \\ 0 & (x \notin G_{p'} \text{ のとき}). \end{cases}$$

5. $\chi \in \mathrm{Irr}(B_0(G)) \Longleftrightarrow \omega_\chi(\hat{C}) \equiv |C| \bmod (\pi)$ ($\forall C \in \mathrm{Cl}(G)$) であることに注意する．定理 4.16 の上でのべた記号を用いて，$\chi \in \mathrm{Irr}(B_0(G))$ ならば $\omega_{\chi^\sigma}(\hat{C}) = \omega_\chi(\widehat{C^\sigma}) \equiv |C^\sigma| \equiv |C| \bmod (\pi)$．

6. e_B を B のブロックべき等元とすれば，$\lambda_B(\hat{C}_i) = \lambda(e_B\hat{C}_i)$ であるから定理 4.9 より明らか．

7. 系5.11より $Be_{\tilde{B}}B = B$，$e_{\tilde{B}}Be_{\tilde{B}} = \tilde{B}$，$\tilde{B} \cap L = e_{\tilde{B}}Le_{\tilde{B}}$ が成り立つ．($x \notin T$ ならば $e_{\tilde{B}}xe_{\tilde{B}} = x(e_{\tilde{B}})^x e_{\tilde{B}} = 0$ に注意．) これより (i) は明らかである．FG におけるブロックイデアルについても (i) が成り立つから，$J(B^*)$ のべき零性より (ii) も証明される．

8. (i) 定義より明らか．

(ii) III, (6.17) において $\mathrm{ht}(\chi') = 0$ とすれば $a_{\theta\chi'} \not\equiv 0 \pmod{p}$．

(iii) $\mathrm{ht}(\chi') = 0$ とすれば $\nu(a_{\theta\chi'}) = \nu(a_{\chi'\theta}) = \mathrm{ht}(\theta) > 0$．よって III, (6.17)

より明らか.

(iv) $\nu(n_{\theta\chi}/\chi(1)) = a - d + \nu(a_{\theta\chi}) - \nu(\chi(1)) = 0$ であるから, III, 6.33 (i) の証明より明らかである.

9. FQ の添加イデアルを $I(Q)$ とするとき, $B^*/I(Q)B^*$ が両側加群として直既約であることを示せばよい.

10. (a) e は G/H のある既約射影表現の次数であり, G/H は p'-群であるから e は $|G:H|$ の約数である (問題 III, 21.).

(b) U を任意の既約 FH-加群とする. 問題 IV, 6(v) より U^G が完全可約であることに注意すると次の同型をえる.

$\mathrm{Hom}_{FH}(P_H, U) \simeq \mathrm{Hom}_{FG}(P, U^G) \simeq \mathrm{Hom}_{FG}(V, U^G) \simeq \mathrm{Hom}_{FH}(V_H, U)$.

最後の F-加群の次元は $U \simeq W^a$ $(\exists a \in G)$ の場合に限り e に等しく, それ以外の場合は 0 である.

(c) G/H は p-群であるから既約射影表現は自明なものに限る. よって $e = 1$.

(d) Green の定理から Q^G は FG の主直既約加群である. また $\mathrm{Hom}_{FG}(Q^G, V) \simeq \mathrm{Hom}_{FH}(Q, V_H) \neq 0$ であるから $Q^G \simeq P$ をえる.

11. 仮定より G/H が自明でない p-群または p'-群となるような $G \triangleright H$ がある. H に対して主張が正しいものとし, 前問の記号を用いて以下を進める.

(a) G/H が p'-群のとき : $\dim_F P = e|G:T| \dim_F Q$. ここで Q に帰納法の仮定を適用せよ.

(b) G/H が p-群のとき : $\dim_F P = |G:H| \dim_F Q$ であることと $(\dim_F V)_{p'} = (\dim_F W)_{p'}$ を用いよ.

12. (i) $\#\mathrm{IND}(FD) = q$ である (問題IV, 1). 一方 $D = \langle x \rangle$ とすれば $(x-1)^{q-1} = x^{q-1} + \cdots + 1 = \widehat{D} \neq 0$ であるから I^j $(0 \leq j \leq q-1)$ は互いに非同型な直既約加群である.

(ii) $V \in \mathrm{IND}(B^*)$ とする. V は D-射影的であるから, ある j $(0 \leq j \leq q-1)$ があって $V | I^j \otimes_D B^* \simeq I^j B^* = B^* I^j$. よって $V \simeq U_i I^j$ となる U_i がある.

(iii) $\mathrm{soc}(U_i I^j) \simeq \mathrm{soc}(U_k I^l)$ より $i = k$ がわかる. $U_i = e_i FG$ としてよい $(e_i \in \mathrm{pi}(FG))$. $j < l$ に対し $U_i I^j = U_i I^l$ ならば, $U_i I^{q-1} = 0$, 特に $e_i \widehat{D} = 0$ となる. よって $e_i \in (FG)I \subset J(FG)$ となって矛盾である.

13. b を B によって被覆される $H = O_{p'}(G)$ のブロックとする．$G = T(b)$ としてよい．このとき $\delta(B) = P$ である（補題 12.2）また B は b を被覆する唯一つのブロックである（系 5.6）．$\mathrm{Irr}(b) = \{\beta\}$ とすれば $T(\beta) = G$ であるから III, 5.11 (iii) によって β は G の既約指標 $\hat{\beta}$ に持ち上がる．このとき $\mathrm{Irr}(B) = \mathrm{Irr}(G|\beta) = \{\hat{\beta}\gamma\,;\,\gamma \in \mathrm{Irr}(P)\}$ となる (III, 5.12 (ii))．これより (i) がえられる．$(\hat{\beta}\gamma)^* = \gamma(1)\hat{\beta}^*$ であるから B^* に属する G の既約 F-指標は $\hat{\beta}^*$ だけである．よって (ii) が成り立つ．

15. (i) $\subset$ は明らかである．一方右辺は FG のイデアルで，原始べき等元を含まないから $J(FG)$ に入る．

(ii) $x, y \in S_j$ ならば $\varphi_i{}^*(x) = \varphi_i{}^*(y)$ であることと，$\{\varphi_1{}^*, \cdots, \varphi_l{}^*\}$ が F 上一次独立であることに注意せよ．

16. $V_{\langle y\rangle}$ は射影的な $F\langle y\rangle$-加群となるから，$R\langle y\rangle$-加群に持ち上げることができる．

(ii) $|G|$ に関する帰納法によって示す．V は既約と仮定してよい．したがって $O_p(G) = 1$ としてよい．問題 IV, 16 を FG-加群に適用すると結局 V が射影加群，もしくは局所加群の場合に証明すればよい．前者の場合 V は RG-加群に持ち上げることができるから明らかである．後者の場合 p-局所部分群は G の真部分群であるから帰納法の仮定が使える．

参　考　文　献

秋月康夫・鈴木通夫

[1]　代数 I, II, 岩波書店, 1980.

Alperin, J. L.

[1]　*The main problem of block theory,* Proc. of the Conference on Finite Groups, 341-356, Academic Press, New York, 1976.

[2]　*On the Brauer correspondence,* J. Alg. **47** (1977), 197-200.

[3]　*Local representation theory,* Proc. Symposia in Pure Math. **37** (1980), A. M. S., Providence RI.

[4]　*The Green correspondence and the Brauer lift,* J. Alg. **104** (1986), 78-79.

[5]　Local representation theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

Alperin, J. L. and Broué, M.

[1]　*Local method in block theory,* Ann. of Math. **110** (1979), 143-157.

Alperin, J. L. and Burry, D. W.

[1]　*Block theory with modules,* J. Alg. **65** (1980), 225-233.

Anderson, F. W. and Fuller, K. R.

[1]　Rings and Categories of modules, Graduate Text in Math. 13, Springer Verlag, Berlin, 1974.

浅野啓三

[1]　*Einfacher Beweis eines Brauerschen Satzes über Gruppencharaktere,* Proc. Jap. Acad. **31** (1955), 501-503.

浅野啓三・大嶋 勝・高橋陸男

[1]　*Über Darstellung von Gruppen durch Kollineationen in Körper der Characteristic p,* Proc. Phy. -Math. Soc. Jap. **19** (1937), 199-209.

東屋五郎

[1] *Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem,* Nagoya Math. J. **1** (1951), 117-124.

[2] *On maximally central algebras,* Nagoya Math. J. **2** (1951), 119-150.

東屋五郎・中山 正

[1] 代数学II, 岩波書店, 1954.

Banaschewski, B.

[1] *On the character rings of finite groups,* Canad. J. Math. **15** (1963), 605-612.

Benson, D.

[1] Modular representation theory : New trends and methods, Lecture notes in Math. **1081** (1984), Springer Verlag, Berlin.

Brauer, R.

[1] *Über Darstellungen von Gruppen in Galoischen Feldern,* Act. Sci. Ind. **195** (1935), Paris.

[2] *On the modular and* $\mathfrak{p}$*-adic representations of algebras,* **25** (1939), 252-258.

[3] *On the Cartan invariants of groups of finite order,* Ann. of Math. **42** (1941), 53-61.

[4] *On the connection between the ordinary and modular characters of groups of finite order,* Ann. of Math. **42** (1941), 926-935.

[5] *Investigations on group characters,* Ann. of Math. **42** (1941), 936-958.

[6] *On the arithmetic in a group ring,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **30** (1944), 109-114.

[7] *On the representation of a group of order g in the field of g-th root of unity,* Amer. J. Math. **67** (1945), 461-471.

[8] *On blocks of characters of groups of finite order,*

I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **32** (1946), 182-186.

II, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **32** (1946), 215-219.

[9] *A characterization of characters of groups of finite order,* Ann. of

Math. **57** (1953), 357-377.

[10] *Number theoretical investigations on groups of finite order,* Proc. of the International Symposium on Algebraic Number Theory, 55-62, Tokyo and Nikko, Science Counsil of Japan, 1955.

[11] *Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung,*
I, Math. Z. **63** (1956), 406-444.
II, Math. Z. **72** (1959), 25-46.

[12] *Representations of finite groups,* Lectures on Modern Mathematics, vol. 1, 133-175, Wiley, New York, 1963.

[13] *Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups,*
I, J. Alg. **1** (1964), 152-167.
II, J. Alg. **1** (1964), 307-334.
III, J. Alg. **3** (1966), 225-255.
IV, J. Alg. **17** (1971), 489-521.
V, J. Alg. **28** (1974), 433-460.

[14] *On blocks and sections in finite groups,*
I, Amer. J. Math. **89** (1967), 1115-1136.
II, Amer. J. Math. **90** (1968), 895-925.

[15] *Defect groups in the theory of representations of finite groups,* Illinois J. Math. **13** (1969), 53-73.

[16] *On the first main theorem on blocks of characters of finite groups,* Illinois J. Math. **14** (1970), 183-187.

[17] *Character theory of finite groups with wreathed Sylow* 2*-subgroups,* J. Alg. **19** (1971), 547-592.

[18] *On the structure of blocks of characters of finite groups,* Lecture notes in Math. **372** (1974), Springer Verlag, Berlin, 103-130.

[19] *On* 2*-blocks with dihedral defect groups,* Symposia Mathematica **13** (1974), 367-393, Academic Press, London.

[20] *Notes on the representations of finite groups,* J. London Math. Soc.

13 (1976), 162-166.

[21] *On finite groups with cyclic Sylow subgroups,*

I, J. Alg. **40** (1976), 556-584.

II, J. Alg. **58** (1979), 291-318.

Brauer, R. and Feit, W.

[1] *On the number of irreducible characters of finite groups in a given block,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **45** (1959), 361-365.

Brauer, R. and Nesbitt, C. J.

[1] *On the modular representation of groups of finite order,* Univ. of Tronto Studies Math. Ser. **4** (1937).

[2] *On the modular characters of groups,* Ann. of Math. **42** (1941), 556-590.

Brauer, R. and Tate, J.

[1] *On the characters of finite groups,* Ann. of Math. **62** (1955), 1-7.

Broué, M.

[1] *Sur l'induction des modules indécomposables et la projectivité relative,* Math. Z. **149** (1976), 227-245.

[2] *Radical, hauteurs, p-sections et blocs,* Ann. of Math. **107** (1978), 89-107.

[3] *Brauer coefficients of p-subgroups associated with a p-block of a finite group,* J. Alg. **56** (1979), 365-383.

Burry, D. W.

[1] *A strengthened theory of vertices and sources,* J. Alg. **59** (1979), 330-344.

[2] *Scott modules and lower defect groups,* Comm. Alg. **10** (1982), 1855-1872.

[3] *Components of induced modules,* J. Alg. **87** (1984), 483-492.

Burry, D. W. and Carlson, J. F.

[1] *Restrictions of modules to local subgroups,* Proc. A. M. S. **84** (1982), 181-184.

Cline, E.

[1] *Stable Clifford theory,* J. Alg. **22** (1972), 350-364.

Clifford, A. H.

[1] *Representations induced in an invariant subgroup,* Ann. of Math. **38** (1937), 533-550.

Conlon, S. B.

[1] *Twisted group algebras and their representations,* J. Austal. Math. Soc. **4** (1964), 152-173.

Curtis, C. W. and Reiner, I.

[1] Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New York, 1962.

[2] Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, vol. 1, John Wiley and Sons, New York, 1981.

Dade, E. C.

[1] *Compounding Clifford's theory,* Ann. of Math. **91** (1970), 236-290.

[2] *Extending irreducible modules,* J. Alg. **72** (1981), 374-403.

Dress, A.

[1] *Operations in representation rings,* Proc. Symposia in pure Math. **21** (1971), 39-45, A. M. S., Providence RI.

Fein, B., Kantor, W. M. and Schacher, M.

[1] *Relative Brauer Groups* II, J. reine angew. Math. **328** (1981), 39-57.

Feit, W.

[1] *Some consequences of the classification of simple groups,* Proc. Symposia in pure Math. **37** (1980), A. M. S., Providence.

[2] The representation theory of finite groups, North Holland, Amsterdam, 1982.

Fong, P.

[1] *On the characters of p-solvable groups,* Trans. A. M. S. **98** (1961), 263-284.

[2] *Solvable groups and modular representation theory,* Trans. A. M. S.

103 (1962), 484-494.

[3] *On decomposition numbers of J_1 and $R(q)$*, Symposia Mathematica **XIII** (1974), 415-422, Academic Press, London.

Gallagher, P. X.

[1] *Group characters and normal Hall subgroups,* Nagoya Math. J. **21** (1962), 223-230.

Glauberman, G.

[1] *Correspondence of characters for relatively prime operator groups,* Canad. J. Math. **20** (1968), 1465-1488.

Goldschmidt, D. M.

[1] *A group theoretic proof of the $p^a q^b$ theorem for odd primes,* Math. Z. **113** (1970), 373-375.

Gow, R.

[1] *Extensions of modular representations for relatively operator groups,* J. Alg. **36** (1975), 492-494.

Green, J. A.

[1] *On the indecomposable representations of a finite group,* Math. Z. **70** (1959), 430-445.

[2] *Blocks of modular representations,* Math. Z. **79** (1962), 100-115.

[3] *A transfer theorem for modular representations,* J. Alg. **1** (1964), 73-84.

[4] *Some remarks on defect groups,* Math. Z. **107** (1968), 133-150.

[5] Vorlesungen über Modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen, Vorlesungen aus dem Mathematischen Institute Giessen, Heft 2, 1974.

[6] *On the Brauer homomorphism,* J. London Math. Soc. **17** (1978), 58-66.

Heller, A.

[1] *Indecomposable modules and the loop space operation,* Proc. A. M. S. **12** (1961), 640-643.

[2] *On group representations over a valuation ring,* Proc. Nat. Acad. Sci.

47 (1961), 1194-1197.

Higman, D. G.

[1] *Modules with a group of operators,* Duke Math. J. **21** (1954), 369-376.

Howlett, R. B. and Issacs, I. M.

[1] *On groups of central type,* Math. Z. **179** (1982), 555-569.

Huppert, B. and Blackburn, N.

[1] Finite groups II, Springer Verlag, Berlin, 1982.

飯塚健三

[1] *On Brauer's theorem on sections in the theory of blocks of characters,* Math. Z. **75** (1961), 299-304.

[2] *A note on blocks of characters of a finite group,* J. Alg. **20** (1972), 196-201.

Issacs, I. M.

[1] *Characters of solvable and symplectic groups,* Amer. J. Math **95** (1973), 594-635.

[2] Character theory of finite groups, Academic Press, New York, 1976.

[3] *Extensions of group representations over arbitrary fields,* J. Alg. **68** (1981), 54-74.

伊藤 昇

[1] *On the degrees of irreducible representations of a finite group,* Nagoya Math. J. **3** (1951), 5-6.

岩堀長慶・松本英也

[1] *Several remarks on projective representations of finite groups,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **10** (1964), 129-146.

彌永昌吉（編）

[1] 数論，岩波書店，1969.

Juhász, A.

[1] *A short proof to Brauer's third main theorem,* Hokkaido Math. J. **13** (1984), 89-91.

Juhász, A.・津島行男

[1] *A proof of the Brauer's second main theorem and related results,* Hokkaido Math. J. **14** (1985), 33-37.

Knörr, R.

[1] *Blocks, vertices and normal subgroups,* Math. Z. **148** (1976), 53-60.

Külshammer, B.

[1] *Quotients, Cartan matrices and Morita equivalent blocks,* J. Alg. **90** (1984), 364-371.

Landrock, P.

[1] Finite group algebras and their modules, Cambridge Univ. Press, 1983.

Mackey, G. W.

[1] *On induced representations of groups,* Amer. J. Math. **73** (1951), 576-592.

Maranda, J. M.

[1] *On p-adic integral representations of finite groups,* Canad. J. Math. **5** (1953), 344-355.

松山 廣

[1] *Solvability of groups of order $2^a p^b$,* Osaka J. Math. **10** (1973), 375-378.

Michler, G. O.

[1] *Brauer's conjectures and the classification of finite simple groups,* Lecture notes in Math. **1178** (1986), 129-142, Springer Verlag, Berlin.

永尾 汎

[1] *A remark on the orthogonal relations in the representation theory of finite groups,* Canad. J. Math. **11** (1959), 59-60.

[2] *A proof of Brauer's theorem on generalized decomposition numbers,* Nagoya Math. J. **22** (1963), 73-77.

[3] *Some correspondences in the representation theory of finite groups,* Proc. International Math. Conf. Singapore, 35-41, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[4] 代数学，朝倉書店，1983.

中山 正

[1] *Some studies on regular representations, induced representations, and modular representations,* Ann. of Math. **39** (1938), 361-369.

[2] *On Frobeniusean algebras,*

I, Ann. of Math. **40** (1939), 611-633.

II, Ann. of Math. **42** (1941), 1-21.

奥山哲郎

[1] *A note on the Brauer correspondence,* Proc. Japan Acad. **54** (1978), 27-28.

Olsson, J. B.

[1] *On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups,* J. Alg. **36** (1975), 212-241.

[2] *Lower defect groups,* Comm. Alg. **8** (1980), 261-288.

[3] *On subpairs and modular representation theory,* J. Alg. **76** (1982), 261-279.

大嶋 勝

[1] *Notes on basic rings,* Math. J. Okayama Univ. **2** (1953), 103-110.

[2] *Notes on blocks of group characters,* Math. J. Okayama Univ. **4** (1955), 175-188.

[3] *On some properties of group characters,*

I, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 18-21.

II, Math. J. Okayama Univ. **10** (1960), 61-66.

Parks, A. E.

[1] *A group theoretic characterization of M-groups,* Proc. A.M.S. **94** (1985), 209-212.

Passman, D. S.

[1] *Blocks and normal subgroups,* J. Alg. **12** (1969), 569-575.

Reynolds, W. F.

[1] *Blocks and normal subgroups of finite groups,* Nagoya Math. J. **22**

(1963), 15-32.

Roquette, P.

[1] *Arithmetishe Untersuchung des Characterringes einer endlichen Gruppen,* J. reine angew. Math. **190** (1952), 148-168.

Rosenberg, A.

[1] *Blocks and centers of group algebras,* Math. Z. **76** (1961), 209-216.

Scott, L. L.

[1] *Modular permutation representations,* Trans. A. M. S. **175** (1973), 101-121.

Serre, J. P.

[1] Represéntations linéaires des groupes finis, Herman, Paris, 1971. (邦訳：有限群の線型表現（岩堀長慶・横沼健雄訳），岩波書店，1974).

Solomon, L.

[1] *The representation of finite groups in algebraic number fields,* J. Math. Soc. Jap. **13** (1961), 144-164.

Swan, R. G.

[1] *Induced representations and projective modules,* Ann. of Math. **71** (1960), 552-578.

[2] *The Grothendieck ring of a finite group,* Topology **2** (1963), 85-110.

鈴木通夫

[1] 群論 上，下，岩波書店，1977-78.

太刀川弘幸

[1] *A remark on generalized characters of groups,* Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **4** (1954), 332-334.

Thompson, J. G.

[1] *Vertices and sources,* J. Alg. **6** (1967), 1-6.

津島行男

[1] *On the p′-section sum in a finite group ring,* Math. J. Okayama Univ. **20** (1978), 83-86.

[2] *On the second reduction theorem of P. Fong,* Kumamoto J. Sci.

(Math.) **13** (1978), 6-14.

宇野勝博

[1] *Character correspondences in p-solvable groups,* Osaka J. Math. **20** (1983), 713-725.

Ward, H. N.

[1] *The analysis of representations induced from a normal subgroup,* Michigan J. Math. **15** (1968), 417-428.

渡辺アツミ

[1] *Relations between blocks of a finite group and its subgroup,* J. Alg. **78** (1982), 282-291.

Wolf, T.R.

[1] *Character correspondence in solvable groups*, Illinois J. Math. **22** (1978), 327-340.

山崎圭次郎

[1] *On projective representations and ring extensions of finite groups,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **10** (1964), 147-195.

あ と が き

本書の執筆に当っては，Anderson - Fuller[1]，秋月 - 鈴木[1]，東屋 - 中山[1]，Feit[2]，Issacs[2]，Serre[1]，彌永[1]を主に参考にした．以下若干の補足的注意を記しておく．

I 章の問題 15, 16 はいわゆる森田同値理論の特別な場合を解説したものである．問題 19 に関する歴史的に最も妥当な引用文献は不明であるが，(1)は Külschammer[1]，(2)は大嶋[1]に見られる．

II 章の問題 16 は対称多元環が意外とも思われる形で頻出することを意味するが，これは太刀川弘幸氏による割と最近の注意である．

III 章の定理 5.11 (iii) は正標数の場合も含め，全く一般の体で成り立つことが知られている．(Gow[1]，Dade[2]，Issacs[3]参照.) 問題 12 (ii) の同値な 4 条件がみたされるならば G/H は可解群になるという予想があったが（岩堀 - 松本[1]），最近 Howlett - Issacs[1]によって単純群の分類結果を仮定した上で肯定的に解決されている．問題 14 は Gaschütz の定理として知られている．

IV 章において§6 の内容とそれに続く Green の直既約性定理の証明方法は本質的には Conlon[1]，Ward[1]にさかのぼるといってよい．その後 Broué[1]によってより一般的な考察がなされた．最近のいわゆる Auslander - Reiten 系列を駆使する直既約加群の研究については Benson[1]を参照されたい．

V 章の定理 4.1 は永尾[2]による第 2 主定理の証明に若干の改良を加えて得られたものである（Juhász - 津島[1]）．本書の流れとしては，このように Green の直既約性定理を使う形で第 2 主定理の証明を行ったが，直接的な方法

として有名なものに Brauer の原証明を簡易化した飯塚[1]による証明がある．定理 5.16 (ii) は当初 B' が弱正則の場合に証明されていたが，Knörr[1]がこのように一般化したものである．なおモジュラー表現の群論への応用例で代表的なものが鈴木（[1]，6 章)，Feit（[2]，Chap. XII）で解説されている．

ところで Brauer は[12]においていくつかの本質的な問題を提出し，その後の発展に大きな刺激を与えたが，未解決のまま残されている問題も多い．これらと Alperin - Mckay 予想については Feit（[2]，Chap. IV，§5）および Alperin[3]を見られたい．また有限単純群の分類結果との関連については Feit [1]および Michler[1]を参照されたい．

索　　引

記　　号

事　　項

A　B

イ

ウ オ

カ

キ

ク ケ

コ

ソ

タ

チ

著者略歴

永 尾　汎 (Nagao Hirosi)　1925 年 広島県呉市に生まれる．1946 年 大阪大学理学部数学科卒業．大阪大学理学部講師，大阪市立大学助教授，教授を経て，1968 年 大阪大学理学部教授，1985 年 大阪大学理学部長となり現在に至る．国立台湾大学（1966），カリフォルニア工科大学（1966—67）の客員教授．理学博士．
著書：　群論（共著，岩波書店），群とデザイン（岩波書店），群論の基礎（朝倉書店），代数学（朝倉書店）．

津 島 行 男 (Tsushima Yukio)　1941 年 東京に生まれる．1966 年 名古屋大学理学研究科修士課程卒業．大阪市立大学理学部助手，講師，助教授を経て，1983 年 同教授となり現在に至る．エッセン大学（西ドイツ，1983—84）客員教授．理学博士．

数学選書 8．**有限群の表現**　　**定価 4200 円**

1987 年 8 月 15 日　第 1 版印刷
1987 年 8 月 20 日　第 1 版発行©

著作者の了解により検印を省略いたします

著 作 者　永 尾　汎
　　　　　津 島 行 男

発 行 者　吉 野 達 治

発 行 所　東京都千代田区四番町 8 番地
　　　　　電 話 東 京　262-9166～9
　　　　　株式会社 裳 華 房

印 刷 所　株式会社 精 興 社

製 本 所　株式会社 中條製本工場

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN4-7853-1310-2

Printed in Japan